Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2018/19

Evelyn Süss-Stepancik
Pädagogische Hochschule
Niederösterreich
Mühlgasse 67
A-2500 Baden

Roland Steinbauer
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien

Kapitel F: Integralrechnung

Integralrechnung im Lehrplan AHS (8. Klasse)

Grundlagen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen“ allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \sum_i f(x_i)\ \Delta x_i .$$

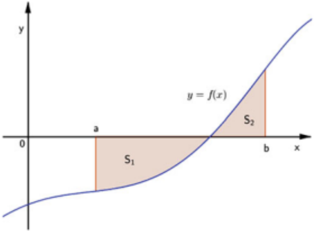
- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (zB für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können.
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können.

Integralrechnung im Lehrplan AHS (8. Klasse)

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen).
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können.
- Das unbestimmte Integral kennen.

Fehlvorstellung: Integral und Fläche

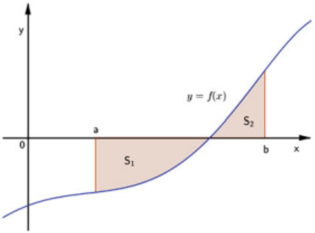


Die Figur zeigt den Graphen von $y = f(x)$.
S_1 ist die Fläche, welche von der x-Achse, $x = a$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.
S_2 ist die Fläche, welche von der x-Achse, $x = b$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.
Dabei ist $a < b$ und $0 < S_1 < S_2$.
Der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist:

- ☐ $S_1 + S_2$
- ☐ $S_1 - S_2$
- ☐ $S_2 - S_1$
- ☐ $|S_1 - S_2|$
- ☐ $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

Abb.: Aufgabe aus der TIMSS-Studie 1999

Fehlvorstellung: Integral und Fläche



Die Figur zeigt den Graphen von $y = f(x)$.
S_1 ist die Fläche, welche von der x-Achse, $x = a$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.
S_2 ist die Fläche, welche von der x-Achse, $x = b$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.
Dabei ist $a < b$ und $0 < S_1 < S_2$.
Der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$ ist:

- ☐ $S_1 + S_2$
- ☐ $S_1 - S_2$
- ☐ $S_2 - S_1$
- ☐ $|S_1 - S_2|$
- ☐ $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

Abb.: Aufgabe aus der TIMSS-Studie 1999

- Antwortalternativen testen mögliche Fehlvorstellungen
- Ergebnisse:
  - internat. 35%
  - D: 23% korrekt
- Fazit:

Vorstellung des Integrals als Flächeninhalt erfordert erweiterte Sichtweise

Kapitel F: Integralrechnung

2.1.1 Beispiel (Badewanne, Teil 1)

In eine leere Badewanne wird eine Zeit lang Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr beendet. Schließlich wird nach einer Weile der Abfluss geöffnet und das ganze Wasser wieder ausgelassen.

Wir interessieren uns nun für die Frage:

> *Wie lässt sich aus der Kenntnis der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit des Wassers auf die zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Badewanne vorhandenen Wassermenge (genauer das Wasservolumen) schließen?*

2.1.1 Beispiel (Badewanne, Teil 1)

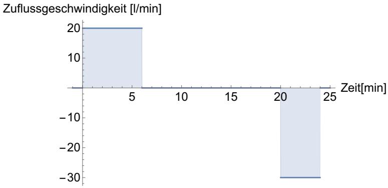


Abb.: Wasserzufluss

2.1.1 Beispiel (Badewanne, Teil 1)

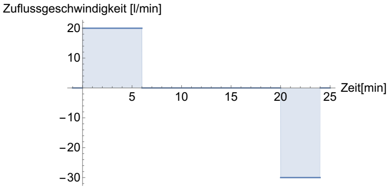


Abb.: Wasserzufluss

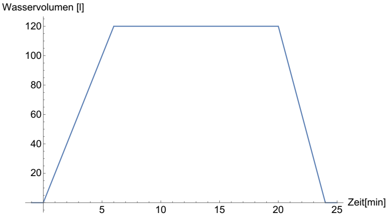


Abb.: Wasservolumen

2.1.1 Beispiel (Badewanne, Teil 1)

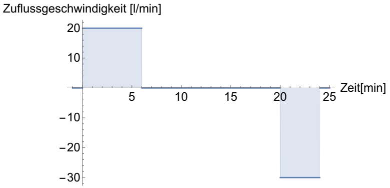


Abb.: Wasserzufluss

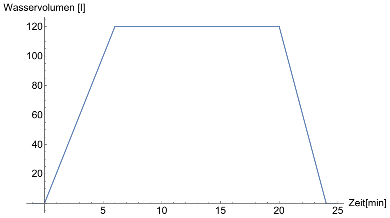


Abb.: Wasservolumen

$$V(t) = \begin{cases} 20t & 0 \leq t \leq 6 \\ 120 & 6 \leq t \leq 20 \\ 120 - 30(t-20) = 720 - 30t & 20 \leq t \leq 24 \\ 0 & t \geq 24 \end{cases}$$

2.1.1 Beispiel (Badewanne, Teil 1)

Fazit

- rechnerisch aus Zu- bzw. Abflussgeschwindigkeit die zu jedem Zeitpunkt vorhandene Wassermenge bestimmt
- Die auftretenden Produkte

$$20t \quad \text{und} \quad 30(t-20)$$

haben eindringliche geom. Bedeutung: **Rechtecksflächen**

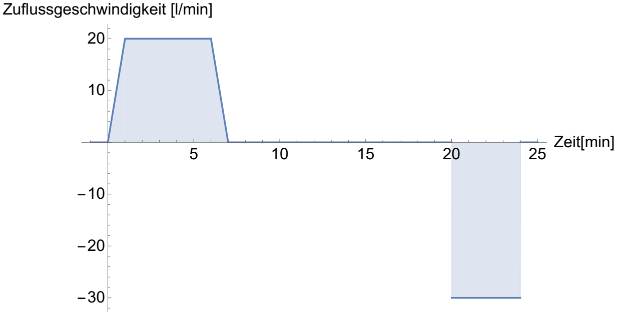
> *Zur Berechnung der Gesamtbilanz werden die oberhalb der (Zeit-)Achse gelegenen Flächen positiv und die darunter liegenden negativ gezählt. In diesem Sinne ist die Funktion V eine Summe vorzeichenbehafteter Rechtecksinhalte oder orientierter Flächeninhalte.*

2.1.2. Reflexion: Rekonstruieren ist Integrieren

- Wir haben aus der Zuflussgeschwindigkeit den Wasserinhalt V berechnet.
- Zuflussgeschwindigkeit ist aber *momentane Änderung der Wassermenge*, also deren *Ableitung* V'
- mathematisch: haben aus der Ableitungsfunktion V' die Funktion V selbst *rekonstruiert* (wiederhergestellt, integrare)
- fachdidaktische Reflexion:
  1. Das Integrieren tritt als Rekonstruieren von Funktionen aus ihrer Ableitung auf; eine der zentralen Grundvorstellungen
  2. Die Vorstellung des Intergrals als *orientierer* Flächeninhalt wird maßgeblich bedient.

2.1.3. Beispiel (Badewanne, Teil 2)

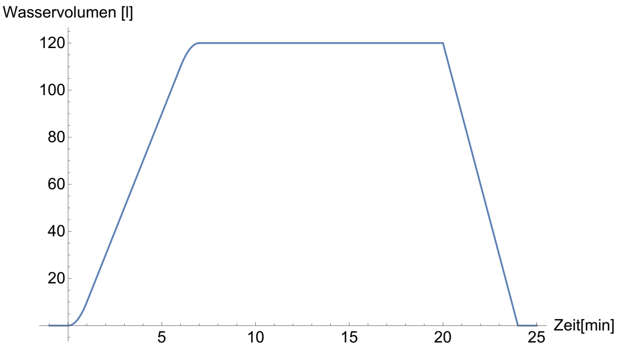
Verfeinern Modellierung $\rightsquigarrow$ auf allgemeinere Sichtweise gestoßen



$$V'(t) = \begin{cases} 20t & 0 \le t \le 1 \\ 20 & 1 \le t \le 6 \\ 20 - 20(t-6) \; = \; 140 - 20t & 6 \le t \le 7 \\ 0 & 7 \le t \le 20 \\ -30 & 20 \le t \le 24. \end{cases}$$

2.1.3. Beispiel (Badewanne, Teil 2)

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 20t & \text{(Dreiecksfläche)} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 10 + 20(t-1) & \text{(wie gehabt)} \quad 1 \leq t \leq 6 \\ 110 + 10 - (\frac{1}{2}(7-t)V'(t)) & \\ \qquad = \; 120 - 10(7-t)^2 & \quad 6 \leq t \leq 7 \\ \text{Rest wie gehabt} & \end{cases}$$



2.1.3. Beispiel (Badewanne, Teil 2)

Wir sind hier derselben Strategie gefolgt, wie im Fall konstanter Zuflussgeschwindigkeit.

Aber wie ist das zu rechtfertigen?

- Tatsächlich Vorgehensweise mathematisch korrekt
- sogar für nichtlinearer Zuflussgeschwindigkeiten, solange Fkt. „schön genug"
- diskutieren die dahinter stehende **analytische Idee**
- später **analytische Präszisierung**

2.1.4. Die analytische Idee

In sehr kleinen Zeiteinheiten ist die Zuflussgeschwindigkeit fast konstant.

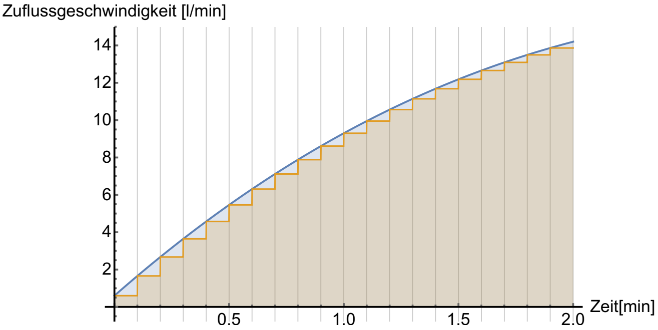


Abb.: nichtlineare aber „schöne“ Zuflussgeschwindigkeit

ACHTUNG: Zuflussgeschw.-Fkt. muss „schön genug“ sein!

2.1.4. Die analytische Idee

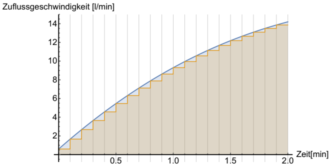


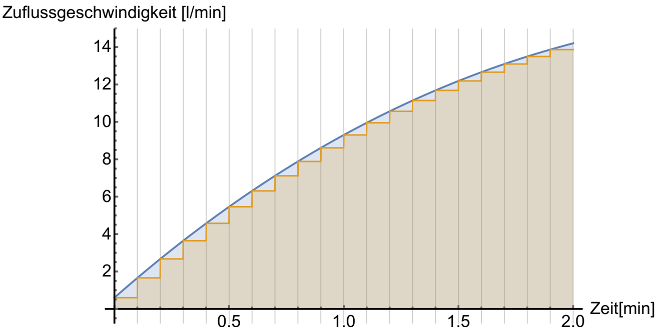
Abb.: Zuwachs der Wassermenge angenähert durch Rechtecksflächen

- betrachten V' im „kleinen“ Zeitintervall $[t, t']$
- Was trägt V' in $[t, t']$ zum Gesamteffekt bei?
- $$V'(t) \approx \frac{V(t) - V(t')}{t' - t} =: \frac{\Delta V(t)}{\Delta t} \quad \text{also} \quad \boxed{\Delta V(t) \approx V'(t)\Delta t}$$

  Zuwachs der Wassermenge in $[t, t']$ ist geometrisch annähernd die „kleine“ Rechtecksfläche

  $$V'(t)\Delta t$$

2.1.4. Die analytische Idee



Gemäß unserer Idee:

- Wassermenge zum Zeitpunkt t: Summe von Rechtecksflächen über kleinen Teilintervallen
- Wert der rekonstruierten Funktion $V(t)$: Summe dieser „kleinen“ (orientierten) Rechtecksflächen.

2.1.4. Die analytische Idee

Anschaulich ist klar: bei genügend kleiner „Streifenbreite“ ist diese Summe von orientierten Rechtecksflächen nahe an der orientierten Fläche unter dem Graphen von V'.

> *Die Rekonsruktion von $V(t)$ aus V' gelingt durch Berechnen des orientierten Flächeninhalts, den V' mit der x-Achse einschließt.*

2.1.5. Fachdidaktische Reflexion

- Erstbegegnung mit Integralbegriff wie hier auch im Unterrichtskontext möglich (Dankwerts, Vogfel, p. 101f.)
- Warnung vor zu früher Präzisierung!
- stärkt 3. Winter'schen Grunderfahrung (Heuristik)
- auf der *Präexistenz* des Inhaltsbegriffs aufbauen

2.1.6. Vorläufige Zusammenfassung

1. Kennt man die lokale Änderungsrate einer Funktion in einem Intervall, so können dort die Werte der Funktion rekonstruiert werden.
2. Diese rekonstruierten Funktionswerte sind als orientierte Flächeninhalte interpretier- und berechenbar.

Vorgehensweise auch in anderen Anwendungszusammenhängen

- Fahrtenschreiber erlaubt Rekonstruktion des zurückgelegten Weges
- Beschleunigung einer Rakete erlaubt Rekonstruktion der Geschwindigkeit
- Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie erlaubt Bererchnung der Zahl der Infizierten
- Stromstärke erlaubt Berechnung des Ladezustand eines Akkus

2.1.7. Von der Berandnung zur Integralfunktion

Bisher erfolgreichen Zugang um entscheidende Idee erweitern!

> *Für die konkrete Berechnung der Rekonstruktion war es unwichtig, dass die „berandende" Funktion als Ableitung gegeben war.*

Lösen uns von dieser Voraussetzung und definieren
die *Integralfunktion einer Berandung*:

> *Zu einer gegebenen Funktion Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (genannt Berandung) definieren wir die* **Integralfunktion**

$$I_a : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto I_a(x) \equiv \int_a^x f(t)\, dt$$

> *die jedem $x \in [a, b]$ den orientierten Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse zwischen a und x zuordnet.*

2.1.7. Von der Berandnung zur Integralfunktion

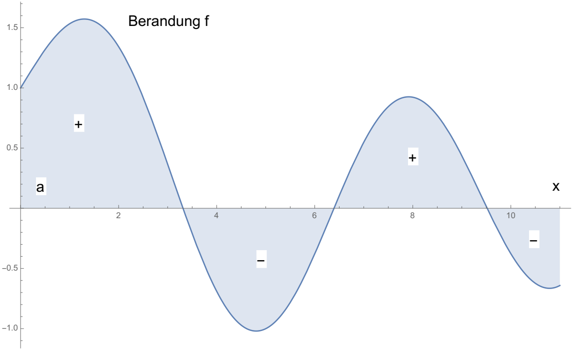


Abb.: Die Integralfunktion I_a ordnet jedem $x \in [a, b]$ die Summe der orientierten Flächeninhalte zu, die die Berandung f beginnend mit a mit der x-Achse einschließt.

$$[a, b] \ni x \mapsto I_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Kapitel F: Integralrechnung

2.2.1. Integralfunktion und Rekonstruierte

- Badenwannenbeislpiel:
  - Berandung explizit als Ableitunsgfunktion V' gegeben
  - Integralfunktion I_a war rekonstruierte Funktion V selbst

  Schematisch

$$\boxed{\text{Berandung} \quad V' \qquad \leadsto \qquad \text{Integralfunktion} \quad I_a = V} \qquad (*)$$

- Frage: inwieweit überlebt (*) unser Manöver aus 2.1.7?
  Genauer:

  Wenn die Berandung nicht schon als Ableitungsfunktion gegeben ist, inwieweit ist die Integralfunktion noch eine „Rekonstruierte“ und wenn ja, was bedeutet das?

2.2.1. Integralfunktion und Rekonstruierte

- Frage: Wenn Berandung nicht schon Ableitungsfunktion, inwieweit ist Integralfunktion „Rekonstruierte"?
- zurück zum Spezialfall: Berandung als Ableitung V'

$$I_a' = \text{ Berandung } = V', \qquad \text{weil ja nach (*)} \quad I_a = V$$

- Vermutung: Das ist immer so, d.h für allgemeine Berandung f gilt

$$I_a' = \text{ Berandung } = f$$

Tatsächlich: **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

- Formulierung, die auch im axiomatischen Zugang zur Analysis korrekt ist
- anschaulich begründen in unserem Zugang, der auf der „ontologischen Bindung an den naiven Flächeninhaltsbegriff" beruht (Dankwerts, Vogel, p. 104)

Mathematische Faktenbox 22: Stammfunktionen

2.2.2. Definition (Stammfunktion) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Intervall I. Dann heißt eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ eine *Stammfunktion* vonf f auf I, falls

$$F'(x) \; = \; f(x) \qquad \text{für alle } x \in I \text{ gilt.}$$

2.2.3. Beispiel (Stammfunktionen von $f(x) = x$) Die Funktion $F(x) = \frac{x^2}{2}$ ist eine Stammfunktion der identischen Funktion $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$, denn es gilt

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

Allerdings ist auch $G(x) = \frac{x^2}{2} + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, denn

$$G'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = x = f(x).$$

Mathematische Faktenbox 23: Stammfunktionen

Tatsächlich ist dieses Beispiel paradigmatisch, was die Nicht-Eindeutigkeit von Stammfunktionen angeht. Es gilt nämlich (mit einfachem(!) Beweis)

2.2.4. Proposition (Differenz von Stammfunktionen) Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ auf I, dann gilt für jede Funktion $G : I \to \mathbb{R}$

$$G \text{ ist (ebenfalls) Stammfkt. von } f \text{ auf } I \;\Leftrightarrow\; F - G \;=\; \text{konstant.}$$

Die Frage nach der Existenz von Stammfunktionen ist also genau die Frage, die wir in 2.2.1 aufgeworfen haben und die wir daher nun wie folgt formulieren können:

> *Haben alle „schönen“ Funktionen, also z.B. alle stetigen Funktionen eine Stammfunktion?*

Die positive Antwort liefert nun der Hauptsatz.

Mathematische Faktenbox 24: Hautsatz Diff/Int

2.2.3 Theorem. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in I$. Dann gilt:

1. Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

   ist stetig differenzierbar[a] und es gilt $F' = f$. Insbesondere ist F eine Stammfunktion von f.

2. Sei F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a).$$

---

[a] Das bedeutet, dass F differenzierbar und die Ableitungsfunktion F' stetig ist. WARNUNG: Hier geht es um die Stetigkeit der Ableitungsfunktion F' und *nicht* um die Stetigkeit der Funktion F selbst. Diese folgt ja schon aus der Differenzierbarkeit von F.

Mathematische Faktenbox 25: Hautsatz Diff/Int

2.2.6. Suggestive Schreibweisen. Folgende eindringliche Formulierungen der beiden Ausssagen des Hs. sind weit verbreitet:

$$(1) \qquad \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\,dt \;=\; f(x)$$

$$(2) \qquad \int\limits_a^b F'(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a)'$$

Spätenstens hier mit der Nase darauf gestoßen:

> *Differenzieren und Integrieren sind zueinander inverse Operationen.*

Mathematischen Präzisierung dieser Aussage z.B. in (AieVfLAK, $\boxed{4}$, Bem. 2.8(ii)ff.)

2.2.7. Beweisidee/-skizze des Hauptsatzes

2.2.8. Die Aussage des Hauptsatzes

Wegen der Wichtigkeit: Umformulierung bzw. Interpretation

1. besagt:
   - Alle stetigen Funktionen haben eine Stammfunktion.
   - Sie ist durch die Integralfunktion gegeben.
2. sagt wie man integriert:
   - Nimm beliebige Stammfunktion
   - berechne $F(b) - F(a)$.

2.2.9. Differenzieren vs. Integrieren

Hauptsatz besagt:

> *Differenzieren (als Bilden der lokalen Änderungsrate) und Integrieren (als Rekonstruieren) sind Umkehroperationen.*

Schematisch:

f	$\overset{\text{Integrieren}}{\longrightarrow}$ Rekonstruieren, Übergang zur Integralfkt.	I_a	$\overset{\text{Differenzieren}}{\longrightarrow}$ Übergang zur lokalen Änderungsrate	$I_a' = f$

2.2.9. Differenzieren vs. Integrieren

Hauptsatz besagt:

Differenzieren (als Bilden der lokalen Änderungsrate) und Integrieren (als Rekonstruieren) sind Umkehroperationen.

Und umgekehrt:

$$g \quad \underset{\substack{\text{Übergang zur}\\ \text{lokalen}\\ \text{Änderungsrate}}}{\overset{\text{Differenzieren}}{\longrightarrow}} \quad g' \quad \underset{\substack{\text{Rekonstruieren,}\\ \text{Übergang zur}\\ \text{Integralfkt.}}}{\overset{\text{Integrieren}}{\longrightarrow}} \quad I_a = g$$

2.2.10. Zur Terminolgie

(1) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Funktion (von x), und

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine Zahl, manchmal *bestimmtes Integral* genannt

Darüber hinaus wird oft der Ausdruck

$\displaystyle\int f(x)\,dx$ (oder glelegentlich noch schlechter $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$)

(jedenfalls ohne Integralgrenzen) verwendet und als **un***bestimmtes Integral* bezeichnet. Gemeint ist damit *irgendeine* oder auch *alle* Stammfunktion(en) von f.

Diese Terminologie ist ungünstig und führt zu Missverständnissen!

Tipp: Nur von Stammfunktionen bzw. Integralen von a nach b (2) oder mit variabler Obergrenze (1) reden,

„**(un)**bestimmtes Integral“ vermeiden

§2.3 Die Analytische Prazisierung des Integralbegriffs

Ziele: Definition der Integralfunktion (einer Berandung)

- vom naiven Flächenbegriff (Präexistenz!) lösen
- analytisch fassen

2.3.1 Leitfrage:

In welchen Sinne wird das Integral — definiert als orientierter Flächeninhalt unter einer gegebenen Berandnung — beliebig gut durch die Summen orientierter Rechtecksinhalte approximiert?

2.3.2. Ein einfacher Fall: $f(x) = x$

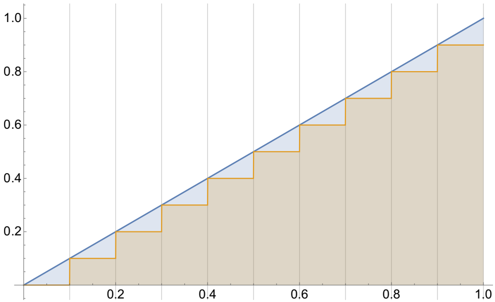


Abb.: Approximation des Integrals von $f(x) = x$ durch Rechtecksflächen, die unterhalb des Graphen liegen

Berechenen n-te Untersumme:

$$U(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} = \frac{1}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

2.3.2. Ein einfacher Fall: $f(x) = x$

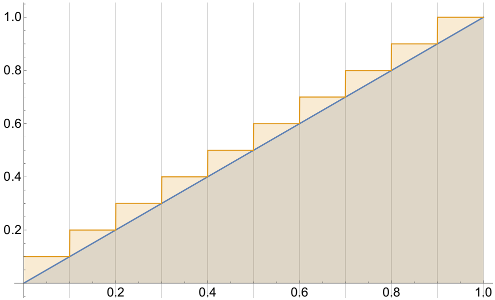


Abb.: Approximation des Integrals von $f(x) = x$ durch Rechtecksflächen, die oberhalb des Graphen liegen

Berechenen n-te Obersumme:

$$O(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

2.3.2. Ein einfacher Fall: $f(x) = x$

- Entscheidende Frage: (wie) approximieren Unter/Obersummen Fläche unter Graphen

! Kennen Fläche: halbe Fläche des Einheitsquadrats, also

$$I_0(1) = \frac{1}{2}$$

- Abweichung der Unter/Obersummen:

$$\begin{aligned} U(n) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2} = I_0(1) \qquad (n \to \infty) \qquad \text{und} \\ O(n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2} = I_0(1) \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

In diesem präszisen Sinn wird das Integral beliebig gut durch die Unter- bzw. Obersummen approximiert.

2.3.3. Eine erste Antwort & ein Problem

Ober und Untersummen gehen im Limes $n \to \infty$ gegen den Flächeninhalt.

- Aber was, wenn wir den Flächeninhlat nicht elementargeometrisch ausrechen können?
- Idee: betrachten die oben definierten Ober- und Untersummen *in formaler Weise*

2.3.4. Produktsummen

Unter/Obersummen haben Form von **Produktsummen:**

$$\sum_i f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{bzw. einfach} \qquad \sum f(x)\,\Delta x$$

Entscheidende Frage:

> *Haben die Produktsummen auch losgelöst vom geometrsichen Kontext einen Sinn?*

Soll heißen: Gegeben $f : I \to \mathbb{R}$, bilden formal, ohne geometrische Interpretation Produktsummen der Länge n. Aber:

> *Ist ein formales Arbeiten mit Produktsummen sinnvoll, bzw. wo führt es uns hin?*

2.3.4. Produktsummen

Unter/Obersummen haben Form von **Produktsummen:**

$$\sum_i f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{bzw. einfach} \qquad \sum f(x)\,\Delta x$$

Entscheidende Frage:

> *Haben die Produktsummen auch losgelöst vom geometrsichen Kontext einen Sinn?*

Soll heißen: Gegeben $f : I \to \mathbb{R}$, bilden formal, ohne geometrische Interpretation Produktsummen der Länge n. Aber:

> *Ist ein formales Arbeiten mit Produktsummen sinnvoll, bzw. wo führt es uns hin?*

Ja, sogar in der Schule (Dankwerts, Vogel, Abschn. 4.4.1)

- Volumsberechnung mittels Cavalierischem Prinzip
- Energiebegriff der klassichen Mechanik

2.3.5. Der analytische Integralbegriff

- Fokussieren auf die Produktsummen liefert rein analytischen Integralbegriff, losgelöst vom naiven Flächeninhaltsbegriff.
- Grundidee: lasse Flächeninhaltsbegriff einfach weg und betrachte nur Konvergenz der Ober/Untersummen

Genauer

> *Konvergieren Unter- und Obersumme gegen einen gemeinsamen Grenzwert, so definieren wir diesen als Integral.*

Muss noch präszisiert werden!

Mathematische Faktenbox 26: Das Riemann Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir unterteilen $[a, b]$ in n-Stück gleich lange Teilintervalle

$$[a = x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3],\ \dots\ , [x_{n-1}, x_n = b]$$

2.3.6. Definition (Unter- und Obersummen) Bzgl. der obigen Unterteilung definieren wir die n-te Unter- bzw. Obersumme von f auf $[a, b]$ als

$$U(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)\ (x_{i+1} - x_i), \quad \text{bzw.}$$

$$O(n) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)\ (x_{i+1} - x_i).$$

Mathematische Faktenbox 27: Das Riemann Integral

2.3.7. Definition (Riemann Integral) Konvergieren $U(n)$ und $O(n)$ für $n \to \infty$ beide gegen denselben Grenzwert, so heißt dieser gemeinsame Grenzwert der Unter- und Obersummen das (Riemann) Integral von f über $[a, b]$ und wir schreiben

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;:=\; \lim_{n\to\infty} U(n) \;=\; \lim_{n\to\infty} O(n).$$

2.3.8. Die Schreibweise des Integrals (Leibniz) ist eng mit der Idee der Produktsummen verknüpft:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{als Limes von} \quad \sum f(x)\,\Delta x$$

Integral ist als Grezwert von Produktsummen definiert

Rückblick, Ausblick und das Wesen der Mathematik

Analyt. Präzisierung: Integralbegriff von Füßen auf Kopf gestellt

- Flächeninhalt in einfachem Beispiel elementargeometrisch & analytisch berechnet
- bekannten Flächeninhalt als Grenzwert von Produktsummen
- wo kein Flächeninhalt geom. bererchenbar: Grenzwert von Produktsummen als Definition

Rückblick, Ausblick und das Wesen der Mathematik

Analyt. Präzisierung: Integralbegriff von Füßen auf Kopf gestellt

- Flächeninhalt in einfachem Beispiel elementargeometrisch & analytisch berechnet
- bekannten Flächeninhalt als Grenzwert von Produktsummen
- wo kein Flächeninhalt geom. bererchenbar: Grenzwert von Produktsummen als Definition

Beginn der Integrations*theorie*:

- Frage nach Integrierbarkeit
- Frage nach Eistenz von Flächeninhalten/Stammfkt.
- Losgelöst von naiv/geom. Flächenbegriff

Rückblick, Ausblick und das Wesen der Mathematik

Analyt. Präzisierung: Integralbegriff von Füßen auf Kopf gestellt

- Flächeninhalt in einfachem Beispiel elementargeometrisch & analytisch berechnet
- bekannten Flächeninhalt als Grenzwert von Produktsummen
- wo kein Flächeninhalt geom. bererchenbar: Grenzwert von Produktsummen als Definition

Beginn der Integrations*theorie*:

- Frage nach Integrierbarkeit
- Frage nach Eistenz von Flächeninhalten/Stammfkt.
- Losgelöst von naiv/geom. Flächenbegriff

Wichtig: typisch analytisch/mathematische Vorgehensweise:

Begriffe präzisiert & erweitert (G2!)

Kapitel F: Integralrechnung

§3.1 Aspekte des Integralbegriffs

FdPw-Box 26: Stammfunktionsaspekt des Integralberiffs

Der Aspekt des Integrals als Stammfunktion stellt den Zusammenhang zwischen dem Integrieren und dem Differenzieren heraus. Er ist damit untrennbar mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verbunden.

FdPw-Box 27: Produktsummenaspekt des Integralberiffs

Unter einer Produktsumme versteht man einen Ausdruck des Typs

$$\sum f(x)\,\Delta x, \quad \text{vgl. (196), (199).}$$

Sie spielen formal die tragende Rolle bei der analytische Präszisierung des Integralbegriffs, vgl. mathematische Faktenbox 24.

§3.2 Grundvorstellungen zum Integralbegriff

FdPw-Box 28: Flächeninhaltsgrundvorstellung

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung macht den Integralbegriff am naiven Flächeninhaltsbegriff fest. Sie betont also den „klassischen Zugang" zur Integralrechnung, bei dem es das Ziel ist, die Fläche unter einer (beliebigen aber „schönen") Berandnung zu bestimmen.

FdPw-Box 29: Rekonstruktionsgrundvorstellung

Unter Rekonstruktion im Zusammenhang mit dem Integralbegriff versteht man

- die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten (vgl. Abschnitt **??**) und
- die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion oder Berandung (vgl. **??**).

§3.2 Grundvorstellungen zum Integralbegriff

FdPw-Box 30: Mittelwertsgrundvorstellung

Die Mittelwertsgrundvorstellung bringt zum Ausdruck, dass mithilfe des Integrals einer gegebenen Funktion über einem bestimmten Intervall, dividiert durch die Länge des Intervalls, ein Mittelwert berechnet werden kann.

§3.3 Zusammenschau: Aspekte & Grundvorstellungen zum Integralbegriff