

Blatt 10: Differentialrechnung, Teil 2

44 Differenzierbarkeit & Ableitung 1. Sind die folgenden Funktionen auf \mathbb{R} differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?

Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$ (c) $f_3(x) = \exp(x) \sin(x)$

(b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$ (d) $f_4(x) = \frac{\cos(x)}{1 + x^2}$

45 Tangente explizit. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in dem jeweils angegebenen Punkt P . Fertigen Sie eine Skizze an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1, 1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0, 1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0, 0)$

46 Näherungsweise Berechnungen mittels Ableitung. Geben Sie unter Verwendung der Ableitung der Wurzelfunktion eine Näherung für $\sqrt{8.92}$ an. Wie gut ist diese Näherung?

47 Knicke und Sprünge.

(a) Betrachten Sie die sog. Knick-Funktion

$$x_+ := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist x_+ stetig, in welchen differenzierbar? Begründen Sie.

(b) Betrachten Sie die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen, dann verifizieren & begründen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) H ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
- (ii) H' ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
- (iii) Trotzdem ist H in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
- (iv) Die nicht-Differenzierbarkeit von H in $x = 0$ äußert sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.

48 Differenzierbarkeit & Ableitung 2. Für welche reellen x sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

- (a) $f_1(x) = x^{-3} + \frac{x-1}{x-2}$ (c) $f_3(x) = x \log(x) - x$ (e) $f_5(x) = \frac{\log(x)}{x}$
 (b) $f_2(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$ (d) $f_4(x) = e^{2x+3}$ (f) $f_6(x) = \frac{1}{\log(x)}$

49 Die Tangente als „beste“ Gerade — warum $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$? Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der

„verschärften Bedingung“ $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ aus D§2.2 zu tun hat.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen bzw. bearbeiten Sie nacheinander die folgenden Punkte:

- (a) Jede Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ ist von der Form $g(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$.
 (b) Geben Sie den Fehler

$$r(h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$$

der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und k an.

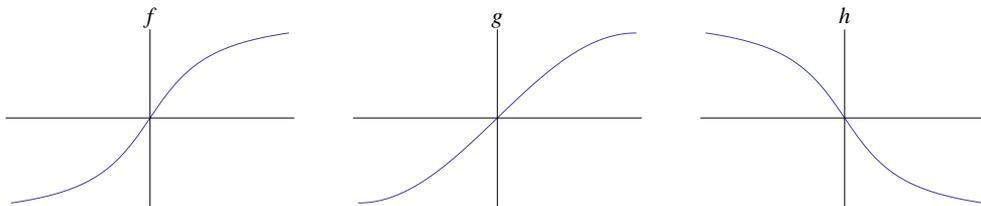
- (c) Es gilt $r(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in x_0 ist.
 (d) Es gilt

$$\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \text{ genau dann, wenn } g \text{ die Tangente an } f \text{ in } x_0 \text{ ist,}$$

d.h. falls $k = f'(x_0)$ ist.

- (e) Fertigen Sie eine Skizze an.

50 Ableitungspuzzle 1. Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h .



Welche der Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von f, g bzw. h ? Begründen Sie Ihre Auswahl!

