1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zum Funktionsbegriff.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist

   (a) [false] eine Zuordnung von Elementen $a \in A$ zu Elementen $f(a) \in B$, wobei jedem $a \in A$ höchstens ein Element in B zugeordnet wird.

   (b) [false] eine Zuordnung von Elementen $a \in A$ zu Elementen $f(a) \in B$, wobei jedem $a \in A$ ein Element in B zugeordnet wird.

   (c) [true] eine Zuordnung von Elementen $a \in A$ zu Elementen $f(a) \in B$, wobei jedem $a \in A$ genau ein Element in B zugeordnet wird.

   (d) [false] eine Zuordnung von Elementen $a \in A$ zu Elementen $f(a) \in B$, wobei jedem $a \in A$ mindestens ein Element in B zugeordnet wird.

2. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [false] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (b) [false] Wenn (x_n) nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (c) [true] Wenn (x_n) monoton und beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) [true] Wenn (x_n) monoton und konvergent ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.

3. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die Annäherungsvorstellung ist eine „statische" Vorstellung.

   (b) [true] Die Definition des Grenzwerts ist vor allem mit der Umgebungsvorstellung aber auch der Objektvorstellung verbunden.

   (c) [true] Die Umgebungsvorstellung zum Grenzwert ist eine „statische" Vorstellung.

   (d) [true] Die Grenzwertdefinition hat Bezüge zur Vorstellung vom aktual Unendlichen.

4. (*Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{bzw. kurz} \quad \sum a_k$$

   sind korrekt?

(a) [true] Unter der Reihe $\sum a_k$ versteht man formal die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_n$.

(b) [false] Unter der Reihe $\sum a_k$ versteht man im Falle der Konvergenz $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k} a_n$.

(c) [false] Die Reihe $\sum a_k$ konvergiert, wenn $a_k \to 0$.

(d) [false] Die Reihe $\sum a_k$ konvergiert, wenn a_k beschränkt ist.

5. (*Differenzen- & Differenzialquotient.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Der Differenzenquotient von f bei $x_0 \in \mathbb{R}$ ist für ein $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch den Ausdruck

   $$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

   und hängt somit von $x \in \mathbb{R}$ ab.

   (b) [false] Der Differenzialquotient von f bei x_0 (falls er existiert) ist der Limes des Differenzenquotienten bei x_0 und hängt daher auch von x ab.

   (c) [false] Den Differenzialquotienten bei x_0 kann man schreiben als

   $$\lim_{h\neq 0\to 0} \frac{f(x+h)}{h}.$$

   (d) [true] Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten entspricht der Vorstellung der Tangente als Schmiegegerade.

6. (*Differenzierbarkeit.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann hat der Graph von f dort keinen Knick.

   (b) [true] Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann hat der Graph von f dort keinen Sprung.

   (c) [false] f ist in x_0 differenzierbar, falls der Differenzialquotient von f bei x_0 einen endlichen Limes hat.

   (d) [false] f ist in x_0 differenzierbar, falls der rechtsseitige und der linksseitige Limes übereinstimmen.

2 Sätze & Resultate

1. *(Zum Funktionsbegriff.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Jede bijektive Funktion f ist injektiv.

   (b) [true] Jede bijektive Funktion f hat eine Umkehrfunktion.

   (c) [true] Jede injektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

   (d) [false] Jede monotone Funktion f ist surjektiv.

2. *(Folgen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [false] Jede Folge (x_n) hat zumindest einen Häufungswert.

   (b) [false] Jede Folge (x_n) hat ein Supremum.

   (c) [true] Jede konvergente Folge (x_n) hat einen Häufungswert.

   (d) [true] Jede unbeschränkte Folge (x_n) divergiert.

3. *(Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert auch für offene Intervalle.

   (b) [true] Jede beschränkte monotone Folge hat einen Häufungswert.

   (c) [true] Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.

   (d) [true] Jede unbeschränkte Folge (x_n) divergiert.

4. *(Funktionen & ihre Eigenschaften, 1.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig.

   (b) [false] Ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}$, so gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f'(x) = f'(x_0) = \lim_{x\searrow x_0} f'(x)$.

   (c) [false] Ist f auf $\mathbb{R}$ stetig und beschränkt, dann ist f auch auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

   (d) [true] Ist f differenzierbar mit positiver Ableitung, dann ist f streng monoton wachsend.

5. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] Hat f in x_0 ein Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

(b) [true] Hat f in x_0 ein Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

(c) [true] f hat lokale Extrema nur dort, wo die Tangente waagrecht ist.

(d) [false] f hat lokale Extrema genau dort, wo die Tangente waagrecht ist.

6. *(Funktionen & ihre Eigenschaften, 2.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$, dann hat f auch eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$.

   (b) [true] Ist f stetig auf $\mathbb{R}$, dann hat f auch eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}$.

   (c) [false] Ist f stetig auf $\mathbb{R}$ und ist $a \in \mathbb{R}$, dann gilt

   $$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)dt = f(a)\,.$$

   (d) [true] Ist f stetig auf $\mathbb{R}$ mit Stammfunktion F, dann gilt für a und $x \in \mathbb{R}$

   $$\int_a^x f(s)ds = F(x) - F(a)\,.$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. *(Nullfolgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

   (a) [true] $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

   (b) [false] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0$.

   (c) [false] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-3}{2n-4} = 0$.

   (d) [false] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-3}{2n^3-4} \to 0$.

2. *(Vorzeichenmaschine.)* Welche der folgenden Aussagen über die Folge

   $$x_n = (-1)^n$$

   sind korrekt?

(a) [true] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

(b) [false] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen fast alle Folgenglieder.

(c) [false] In jeder Umgebung von $x = -1$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

(d) [true] Es gibt eine Umgebung von $x = -1$, in der fast alle Folgenglieder liegen.

3. *(Maxima und Minima.)* Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein globales Maximum.

   (b) [true] Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat ein globales und ein lokales Maximum in $x_0 = 1$.

   (c) [true] Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat ein globales Maximum in $x_0 = 1$.

   (d) [true] Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hat zwei globale Maxima und ein lokales Minimum.

4. *(Wurzelfunktion & Ableitung.)* Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0\,. \end{cases}$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

   (b) [false] f ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und die Tangente ist die Gerade $y = -x$.

   (c) [false] f ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und die Tangente ist die y-Achse.

   (d) [false] f ist $x_0 = 0$ nicht differenzierbar und es gilt $\lim_{0 \neq x \to 0} f'(x) = \infty$.

5. *(Cosinusfunktion & Ableitung.)* Wir betrachten die folgende Überlegung für kleine h

$$\cos(h) = \cos(0 + h) \approx \cos(0) + \cos'(0)\, h = 1\,.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Überlegung ist korrekt, weil die Cosinusfunktion in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(b) [true] Die Überlegung ist korrekt und zeigt, dass die Cosinusfunktion in der Nähe von $x_0 = 0$ gut durch die Gerade $y = 1$ approximiert werden kann.

(c) [false] Die Überlegung ist nicht korrekt, weil das letzte Gleichheitszeichen falsch ist.

(d) [false] Die Überlegung ist korrekt und zeigt, dass der relative Fehler zwischen der Cosinusfunktion und ihrer Tangente,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{1}{h}(\cos(h) - 1)$$

gegen Null geht.

6. *(Ableitung explizit.)* Wir betrachten die Rechnung

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2 \quad (h \to 0).$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Rechnung zeigt, dass die Funktion $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(b) [true] Die Rechnung zeigt, dass die Funktion $f(x) = x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(c) [true] Die Rechnung zeigt, dass die Funktion $f(x) = x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitungsfunktion $f'(x) = 3x^2$ ist.

(d) [false] Die Rechnung ist falsch und zeigt daher gar nichts.

2021-01-30

Ausarbeitung Offener Teil

1 Heron Verfahren. Gesucht ist $\sqrt{a} = \sqrt{6}$

(a)

Iteration $x_{n+1} = \frac{6 + x_n^2}{2 x_n}$

Startwert $x_0 = 3$

$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{array}}$

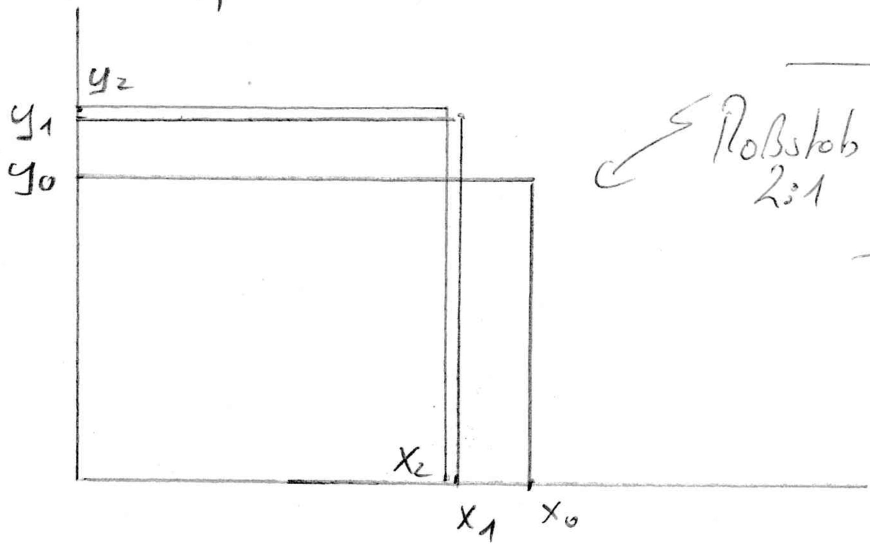
$$x_1 = \frac{6+9}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad y_1 = \frac{6}{x_1} = \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2{,}5 \\ y_1 = 2{,}4 \end{array}}$

$$x_2 = \frac{6 + \frac{25}{4}}{5} = \frac{49}{4 \cdot 5} = \frac{49}{20} = 2{,}45$$

$$y_2 = 6/x_2 = \frac{6 \cdot 20}{49} = \frac{120}{49} \approx 2{,}44898$$

$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 2{,}45 \\ x_3 \approx 2{,}45 \end{array}}$



Maßstab 2:1

(b) Die Rechtecke nähern sich an ein Quadrat an; die Seitenlängen gehen beide gegen $\sqrt{6}$.

2. Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1 Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff.

(a) die Definition betont den Zuordnungsaspekt (eine Folge als Funktion auffassen) (1P)

Platznummer → auch der Aufzählungsaspekt (eine Folge als Aneinanderreihung, Reihenfolge von Zahlen und Objekten) wird angesprochen. Nicht angesprochen wird der Iterationsaspekt (die Folgenglieder werden sukzessive aus dem/den Vorgänger/n konstruiert). (1P)

(b) Damit lassen sich die GV Zuordnungsvorstellung und Reihenvorstellung gut aufbauen. Auch die Objektvorstellung (eine Folge wird als Ganzes betrachtet) kann auf Basis der Definition aufgebaut werden. (1P)

Schwerer lässt sich die Kovariationsvorstellung aufbauen, da kein Bezug darauf genommen wird, wie sich die Werte von einem zum darauffolgenden Folgenglied ändern. (1P)

2 Differenzierbarkeit Ableitung.

Tatsächlich gehen im Differenzenquotient sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null. Das sagt aber nichts über den Grenzwert des Quotienten aus: $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ gilt ja nur, falls b_n nicht gegen Null geht. Daher hat es wenig Sinn, die Grenzwerte von Zähler und Nenner separat zu betrachten und es handelt sich um ein Scheinproblem. Das klingt auch in Cauchy's Formulierung an. (1P)

Im Schulunterricht kann diese Problematik insbesondere im Zusammenhang mit der Überlegung/Vorstellung auftreten, dass beim Annähern der Tangentensteigung durch Sekantensteigungen im Grenzwert ja gar keine Sekante mehr vorliegt (bzw. diese „verschwindet", da es ja (lokal) keinen zweiten Punkt gibt, auf dem sich die Tangente und Graph schneiden). Da wäre dann darauf hinzuweisen, dass die Tangente zwar eine / die Gerade ist, der sich die Sekanten annähern, dass dies aber nicht bedeutet, dass die Tangente in irgendeiner Form eine Sekante sein muss / soll. (1P)

Einige fachdidaktische Zugänge wären:

→ Zugang über mittlere Geschwindigkeiten → Ableitung als lokale Änderungsrate

Die Frage nach dem Grenzwert der mittleren Geschwindigkeiten tritt im Kontext natürlich auf. Nähert man sich der Momentangeschw. über die mittleren Geschwindigkeiten „von links und von rechts", lässt sich die „$\frac{0}{0}$-Problematik" (in diesem Kontext: die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt) thematisieren und begreifbar machen (1P)

→ Aspekt der lokalen Linearisierung aufgreifen → Schmiegeeffekt der Tangente (sozusagen unter der Lupe) untersuchen und nach dem Unterschied zw. Funktionsgraph und Tangente in der nahen Umgebung vom Berührpunkt fragen $\left(\frac{r(h)}{h}\right)$

⇒ Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff durchführen (1P)

3. Aufgaben zur Unterrichtspraxis

1 Überprüfung Stetigkeit.

→ Kommentierung der Angabe (1P)

Durch die Angabe eines Funktionsterms ist keine Funktion gegeben – die Angabe einer Funktion braucht die Angabe des Definitions- und Zielbereichs. Die Frage nach dem Def. bereich macht daher keinen Sinn. Gemeint war wohl der größtmögliche Definitionsbereich. Korrekt wäre die Angabe z.B. wie folgt:

Gegeben ist die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{x}{x-1}$.

I. Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich D von f.

Die 2. Frage ist okay so wie sie ist.

→ Kommentierung der Schülerinantwort: (1P)

Die Schülerinantwort auf I ist jedenfalls eine korrekte Antwort. Ebenso ist an der Antwort zu II prinzipiell nichts falsch, wobei das Verwenden der „Bleistiftstetigkeit" als Begründungsbasis kontextabhängig und je nach Unterrichtsgang (der uns nicht bekannt ist) zu Punkteabzug führen könnte.

→ Punktevergabe: (1P)

I: 2P von 2P

II: 2P von 2P oder auch (siehe 2. Punkt) 1P von 2P

2 Prinzip der Variation und Prinzip des Kontrasts.

(a) Beim Prinzip des Kontrasts sollen die charakteristischen Merkmale eines Begriffs über geeignete Beispiele und Gegenbeispiele entdeckend erfahren werden. Gegenbeispiele unterscheiden sich aber nur in einem wesentlichen Merkmal von jenen Beispielen, die charakteristischen Merkmale enthalten.

(1P)

In der gegebenen Aufgabenstellung sind die Funktionen h_1, h_2 und h_3 Verkettungen der Funktionen $f_1 - f_4$, die das Differenzieren nach der Kettenregel erfordern. Die Funktion h_4 entsteht durch Multiplikation der Funktionen f_1 und f_3. Damit lässt sich h_4 mit der Produktregel, ohne Verwendung der Kettenregel, ableiten und fungiert als „Gegenbeispiel".

(1P)

b) eine geeignete Aufgabenstellung für das Anwenden der Quotientenregel nach dem Prinzip der Variation (charakt. Merkmal ist jeweils gegeben):

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3, wobei

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$$

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_2(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_3(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$$

Aufgabenstellung:

I. Ermittle die Ableitungen von f_1, f_2 und f_3 mit Hilfe der Produktregel.

II. Verwende jeweils die Quotientenregel zum Ableiten von f_1, f_2 und f_3.

III. Vergleiche die Ergebnisse. Beim Anwenden welcher Regel hast du weniger Schritte benötigt?

→ Wahl einer geeigneten Aufgabestellung (1P)
→ formal korrekte Ausführung (1P)