1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

   (a) [false] ein geordnetes Paar $(x, f(x))$.

   (b) [false] die Menge $G(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$.

   (c) [true] eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

   (d) [false] das Produkt aus Definitions- und Zielmenge.

2. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine inhaltliche Deutung, die diesem Sinn gibt.

   (b) [true] Universelle Grundvorstellungen haben normativen Charakter.

   (c) [false] Aspekte eines mathematsichen Begriffs gehen auf eine fachdidaktische Analyse zurück.

   (d) [true] Primäre Grundvorstellungen beziehen sich auf Alltagserfahrungen.

3. *(Folgen & Grenzwert)* Sei (x_n) eine relle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Liegen in jeder Umgebung von a unendlich viele der x_n, dann konvergiert (x_n) gegen a.

   (b) [false] Liegen ab einem bestimmten N alle weiteren x_n in einer ε-Umgebung von a, dann ist a Grenzwert von (x_n).

   (c) [true] Liegen außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele der x_n, dann ist a Limes von (x_n).

   (d) [true] Liegen in jeder Umgebung von a fast alle der x_n, dann gilt $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die übliche ε-N-Definition des Grenzwerts ist wesentlich mit der Umgebungsvorstellung verbunden.

   (b) [true] Dynamische Vorstellungen zum Grenzwert korrelieren mit der Annäherungsvorstellung.

(c) [false] Die Annäherungsvorstellung baut auf der Vorstellung vom aktual Unendlichen auf.

(d) [false] Die Objektvorstellung baut auf dem Begriff des potentiell Unendlichen auf.

5. (*Differenzen- und Differentialquotient.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Der Differenzenquotient entspricht der Sekantensteigung.

   (b) [true] Der Differenzenquotient ist eine reellel Zahl.

   (c) [true] Der Differentialquotient ist (falls er existiert) einen reelle Zahl.

   (d) [false] Der Differenzenquotient ist Limes des Differentialquotienten.

6. (*Integralbegriff.)* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $[a = x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n = b]$ eine Unterteilung von $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge $L = (b-a)/n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Das Riemannintegral von f auf $[a,b]$ ist, falls existent, der gemeinsame Limes von Ober- und Untersummen.

   (b) [true] Die n-te Obersumme von f auf $[a,b]$ ist gegeben durch

   $$O_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)\,(x_i - x_{i-1}).$$

   (c) [false] Die n-te Untersumme von f auf $[a,b]$ ist gegeben durch

   $$U_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x)|\,(x_{i+1} x_i).$$

   (d) [false] Das Riemannintegral von f auf $[a,b]$ ist, falls existent, durch eine Stammfunktion gegeben.

2 Sätze & Resultate

1. *(Folgen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Jede beschränkte Folge hat zumindest einen Häufungswert.

   (b) [false] Jede beschränkte Folge hat höchstens einen Häufungswert.

(c) [true] Jede beschränkte Folge hat höchstens einen Grenzwert.
(d) [true] Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

2. *(Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Ist (x_n) ein Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, dann konvergiert (x_n) in $\mathbb{R}$.
   (b) [true] Ist (x_n) ein Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, dann konvergiert (x_n) in $\mathbb{R}$.
   (c) [true] Jede beschränkte und streng monotone Folge konvergiert.
   (d) [false] Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Maximum.

3. *(Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dann ist f stetig im Punkt x_0.
   (b) [true] Ist f stetig in x_0, dann weicht f nahe x_0 im folgenden Sinne nur wenig von der waagrechten Geraden $g(x) = f(x_0)$ ab:

   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

   (c) [true] Ist f stetig im Punkt x_0, dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   (d) [false] Falls $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ gilt, dann ist f unstetig.

4. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
   (b) [fasle] Hat f in x_0 ein lokales Maximum, so gilt für $x < x_0$ und nahe bei x_0 jedenfalls $f'(x) > 0$.
   (c) [false] f hat lokale Extrema jedenfalls dort, wo die Tangente waagrecht ist.
   (d) [true] Falls f streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $f'(x) \geq 0$.

5. *(Differenzieren & Integrieren)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Jede Stammfunktion F von f ist differenzierbar.
   (b) [false] Es gibt mehr differenzierbare Funktionen, als es integrierbare Funktionen gibt.

(c) [false] Isf f stetig, so gilt

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x).$$

(d) [true] Isf f stetig, so gilt

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

6. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Formulierungen geben korrekt den 1. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wieder?

   (a) [true] Leitet man die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ ab, so erhält man die Berandung f zurück.

   (b) [true] Die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion der Berandung f.

   (c) [false] $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(x)dx = f(x).$

   (d) [true] $\displaystyle \frac{d}{dx}\int\limits_x^a f(y)dy = -f(x).$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. *(Nullfolge.)* Klarerweise konvergiert die Folge

$$x_n = \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 1)$$

   gegen 0. Aber welche der folgenden Argumente dafür sind schlüssig?

   (a) [true] Für beliebiges $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $N = 1/\sqrt{\varepsilon}$ zu wählen, denn dann gilt für alle $n > N$, dass $x_n < \varepsilon$ ist.

   (b) [false] Für beliebiges N brauchen wir nur $\varepsilon = 1/\sqrt{N}$ zu wählen, denn dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon)$, dass $x_n < \varepsilon$ ist.

   (c) [true] Es gilt $x_n = \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n}$ und daher ist x_n als Produkt zweier Nullfolgen eine Nullfolge.

(d) [true] Weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, muss $x_n = \frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergieren.

2. *(Konkrete Folgen.* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Folge $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{-n}$ ist beschränkt.

   (b) [false] Die Folge $y_n = \left|\frac{1}{n}\right|^{-n}$ ist monoton fallend.

   (c) [true] Es gilt $\frac{n^2 + 4n^3 - 27n}{2n^3 - 4n^2 + 8} \to 2 \ (n \to \infty)$.

   (d) [false] Die Folge $x_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergiert.

3. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

   (a) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

   (b) [false] $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

   (c) [true] $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = 0$.

   (d) [false] $\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

4. *(Differenzierbarkeit.)* Klarerweise gilt für die Funktion $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$, dass sie differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x) = 2x.$$

   Aber welche der folgenden Argumentationen belegen das schlüssig?

   (a) [true]
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h \to 2x \quad (h \to 0).$$

   (b) [true] $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 = f'(x)h + r(h)$ und $r(h)/h = h \to 0$ für $h \to 0$.

(c) [true] Die Aussage folgt aus der Ableitungsregel für Potenzfunktionen $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(d) [false] f ist stetig und daher differenzierbar. Die Form der Ableitung ergibt sich dann aus der Ableitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$.

5. *(Maxima und Minima.)* Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein striktes globales Maximum.

   (b) [true] Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat weder ein globales noch ein lokales Maximum.

   (c) [true] Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

   (d) [false] Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, das aber nicht global ist.

6. *(Integrale explizit.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

   (b) [true] $\int\limits_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}$.

   (c) [true] $\int\limits_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$.

   (d) [false] $\int\limits_0^x e^t dt = e^x$.

I. AUFGABEN ZU FACHBEGRIFFEN DER ANALYSIS.

[1] Folgen und Reihen.

(a) mögliche Herleitung:

$x_n = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\,,\quad n = 1,2,3,\ldots \;\rightarrow\; 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = x_n + 2$ und $x_1 = -\frac{5}{4}$

$x_{n+1} = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 2 = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4}\cdot(x_n+2) - 2 = \frac{1}{4}\cdot x_n - \frac{3}{2}$

$\rightarrow\; x_{n+1} = \frac{1}{4}\cdot x_n - \frac{3}{2}\quad (n = 1,2,3,\ldots)$ und $x_1 = -\frac{5}{4}$. (2P)

(b) Die Folge (x_n) konvergiert gegen -2 (sie ist streng monoton fallend und hat den Grenzwert $a = -2$)

$\Rightarrow$ sie ist beschränkt. (1P)

$\operatorname{Sup}(x_n) = x_1 = -\frac{5}{4}\qquad \operatorname{Inf}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = -2$ (1P)

(c) Die Reihe divergiert, weil die Koeffizientenfolge nicht gegen null konvergiert. (1P)

II. AUFGABEN ZUR FACHDIDAKTISCHEN REFLEXION

$\boxed{2}$ Die Grenzwertdefinition.

(a) Bei dieser Definition handelt es sich um eine statische Formulierung, da dabei von der Zahl a (dem Grenzwert) ausgegangen wird und jenes n_0 gesucht wird, ab dem alle weiteren Folgeglieder in der vorgegebenen ε-Umgebung von a liegen.
Im Sinne des aktual Unendlichen liegt in dieser Definition das Ergebnis eines unendlichen Prozess bereits vor. (2P)

(b) Im Vordergrund steht die **Umgebungsvorstellung** und teilweise auch die Objektvorstellung.
Die **Annäherungsvorstellung** steht bei dieser Definition nicht im Vordergrund. (2P)

(c) mögliche Formulierung:
Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (x_n), falls die x_n / die Folgenglieder a schließlich beliebig nahe kommen. (unendlich nahe kommen) (2P)

III. AUFGABEN ZUR UNTERRICHTSPRAXIS

3 Momentangeschwindigkeit.

Lieber Tim, deine Überlegung zeigt, dass das Konzept der Momentangeschwindigkeit nicht so leicht zu fassen ist; sie kann eben nicht in einem statischen Foto festgehalten werden.

Zunächst ist die Geschwindigkeit des Balls gegeben durch die pro Zeiteinheit zurückgelegte Strecke; genauer ist die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 zurückgelegte Strecke durch die vergangene Zeit $t_2 - t_1$ die Durchschnittsgeschwindigkeit des Balls im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. Die Momentangeschwindigkeit ist dann definiert/festgelegt als der Grenzwert der Durchschnittsgeschwindigkeiten, wenn das Zeitintervall immer kleiner wird / gegen null geht. Bei diesem Prozess siehst du auch klar, dass die Momentangeschwindigkeit eines fliegenden Balls nicht 0 ist. (4P)

$\boxed{4}$ Stetigkeit am Pol?

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist als rationale Funktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Die Frage „Ist $\frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$ stetig?" ist nicht sinnvoll, da Stetigkeit überhaupt nur für Punkte im Definitionsbereich definiert ist und $x_0 = 0$ eben nicht zum Definitionsbereich gehört. (3P)

[Eventuell zusätzlich: Tatsächlich hat $\frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$ eine Polstelle, daher kann die Funktion nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.]