Colombeau-Theorie
und
ultrarelativistischer Limes

DIPLOMARBEIT

Zur Erlangung des akademischen Grades
Magister rer. nat.
an der
Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Wien

eingereicht von
Roland Steinbauer

Wien, November 1995

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

In letzter Zeit hat das Interesse an Gravitationsschockwellen-Geometrien (erzeugt von ultrarelativistischen ($v = c = 1$) Teilchen) vor allem in der Feld- und der Stringtheorie zugenommen (siehe z. B. Loustó und Sánchez [15] und die dort zitierte Literatur). Dabei ist man besonders an der quantenmechanischen Streuung bei höchsten Energien interessiert. Erreicht die Energie die Größenordnung der Planck-Masse, so dominiert die Gravitationswechselwirkung den Stoßprozeß, und die vom ultrarelativistischen Teilchen erzeugte gekrümmte Raum-Zeit Geometrie muß in Betracht gezogen werden.

Schon 1971 konnten Aichelburg und Sexl [11] den ultrarelativistischen Limes der Schwarzschildmetrik (sphärisch symmetrische Lösung der Vakuum-Einsteingleichungen) durch Anwenden eines Boosts (geschwindigkeitsabhängige Lorentztransformation) gefolgt vom Limes Boostgeschwindigkeit v gegen 1 berechnen. Dabei mußten sie jedoch eine singuläre Koordinatentransformation gemeinsam mit dem Grenzübergang ausführen, um ein im Sinne der Distributionentheorie wohldefiniertes Ergebnis zu erhalten. Die resultierende Limesgeometrie gehört der Klasse der pp-Wellen an und beinhaltet eine δ-artige Profilfunktion:

$$ds^2 \;=\; 8p\ln(\rho)\,\delta(u)du^2 - dudv - dy^2 - dz^2$$

(wobei: $m = p/\gamma = p\sqrt{1-v^2}$ und $\rho^2 = y^2 + z^2$). Das Gravitationsfeld ist nur auf der zur Boostrichtung orthogonalen Ebene $\{u = 0\}$ von Null verschieden. Der Energie-Impuls-Tensor, der ebenfalls auf dieser Ebene konzentriert ist, legt die physikalische Interpretation der Metrik als das Gravitationsfeld eines mit Lichtgeschwindigkeit bewegten, masselosen Punktteilchens nahe.

1984 konnten Dray und t'Hooft [19] dasselbe Ergebnis mit einer anderen Methode ableiten. Die Schockwellengeometrie wird hier durch direktes Einführen eines Koordinatenshifts in der Metrik erzielt. Die Einsteingleichungen liefern dann Bedingungen an die Shiftfunktion.

Beide Methoden, besonders aber die erste, wurden Anfang der 90-er Jahre vor allem von Loustó und Sánchez [12], [13], [14] für Geometrien der Kerr-Newman-Familie (axialsymmetrisch und stationär) verallgemeinert.

Balasin und Nachbagauer [16], [17], [18] entwickelten etwa zur selben Zeit eine alternative Methode. Läßt man distributionenwertige Metriken zu, so ist es möglich, sonst singuläre Regionen (z. B. die raumartige Linie $r = 0$ in Schwarzschildkoordinaten) in die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit zu inkludieren. Diese singuläre Region wird dann mit dem Träger des Energie-Impuls-Tensors identifiziert. Die Raum-Zeit ist keine Vakuumgeometrie mehr, sondern der Energie-Impuls-Tensor ist δ-förmig auf ebendieser Region konzen-

triert. Mit dieser Methode konnten Balasin und Nachbagauer [17] für alle Geometrien der Kerr-Newman-Familie einen distributionellen Energie-Impuls-Tensor berechnen. Damit wird die ursprüngliche Geometrie auf eine Stufe mit ihrem ultrarelativistischen Limes gestellt; beide besitzen einen distributionellen Energie-Impuls-Tensor.
Die Limesgeometrie erhält man nun durch Lösen der Einsteingleichungen mit dem ultrarelativistische Energie-Impuls-Tensor als Quelle. Dieser wird durch Boost und Limes $v \to 1$ aus dem Energie-Impuls-Tensor der ursprünglichen Raum-Zeit berechnet.

Beide Methoden führen jedoch im Falle der Kerr-Metrik zu unterschiedlichen Ergebnissen. Der Ursprung dieser Diskrepanz lieg vermutlich in der singulären Koordinatentransformation, die bei der Methode von Aichelburg und Sexl gemeinsam mit dem ultrarelativistische Limes durchgeführt werden muß (siehe oben). Im Falle sphärisch symmetrischer Geometrien (insbesonders für die Schwarzschild-Lösung) liefern jedoch beide Methoden übereinstimmende Ergebnisse.

Schon bei der Berechnung des ultrarelativistischen Limes der Reissner-Nordstrøm Geometrie (sphärisch symmetrische Lösung der Einstein-Maxwell Gleichungen in Vakuum) ergibt sich jedoch folgendes Problem: Um einen im Sinne der Distributionentheorie wohldefinierten Limes der Metrik zu erhalten, ist neben der physikalisch gut motivierten Reskalierung der Masse $m = p/\gamma$ (p im Limes $v \to 1$ fix; d. h. Ruhemasse m des Teilchens im Limes gegen 0 bei gleichzeitig festgehaltener Gesamtenergie p, vgl. Aichelburg und Sexl [11]), auch eine Reskalierung der Ladung in der Form $e^2 = p_e^2/\gamma$ (p_e im Limes fix) unumgänglich. Die Ladungsreskalierung ist physikalisch schlecht motiviert (vgl. Lustó und Sánchez [14]), hat aber auf den ultrarelativistischen Limes des elektromagnetischen Feldes und seines Energie-Impuls-Tensors schwerwiegende Auswirkungen. Für $v \to 1$ bei festgehaltenem p und p_e verschwindet der Limes des Feldes (im Sinne der Distributionstheorie), während der Energie-Impuls-Tensor Komponenten aufweist, die gegen die δ-Distribution streben. Diese Situation ist physikalisch sehr unbefriedigend, da ein verschwindendes elektromagnetisches Feld einen nichtverschwindenden Energie-Impuls-Tensor zu besitzten scheint.

Die Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors gehen quadratisch in den Energie-Impuls-Tensor ein. Daher ist die Berechnung des Energie-Impuls-Tensors eines distributionswertigen Feldes als Multiplikation von Distributionen nicht definiert. Im Rahmen der klassischen Distributionstheorie ist ja im allgemeinen keine Multiplikation zweier Distributionen definierbar (Schwartzsches ,,Unmöglichkeitsresultat").
Mitte der 80-er Jahre jedoch entwickelte J. F. Colombeau [39], [40], [41], [42] eine Theorie verallgemeinerter Funktionen, in deren Rahmen eine Multipli-

kation von Distributionen definiert ist.

Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit ist es nun, die oben beschriebene Situation eines verschwindenden distributionswertigen, elektromagnetischen Feldes bei gleichzeitig nichtverschwindendem Energie-Impuls-Tensor vom Standpunkt der Colombeauschen Theorie aus zu beleuchten.
Sie besteht im wesentlichen aus zwei Teilen: dem *„mathematischen"* und dem *„physikalischen"*. Der „mathematische" Teil ist dem „physikalischen" vorangestellt und behandelt die in den Rechnungen des zweiten Teils verwendeten mathematischen Theorien.

Im *ersten Kapitel* befindet sich eine überblicksartige Zusammenfassung der wesentlichen Elemente der Schwartzschen Distributionentheorie einschließlich der Faltung von Distributionen mit Testfunktionen und einer kurzen Darstellung des Raumes der temperierten Distributionen. Daran schließen zwei Abschnitte über die Erfolge (Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen, Abschnitt 1.2), vor allem aber auch die Grenzen (Multiplikation von Distributionen, Abschnitt 1.3) dieser Theorie an. Auf die Probleme, die sich beim Versuch ergeben, eine „vernünftige" (kommutative, assoziative) Multiplikation von Distributionen zu definieren, wird ausführlich eingegangen. Als Abschluß und Höhepunkt des Kapitels wird das sogenannte „Unmöglichkeitsresultat" von Schwartz formuliert, bewiesen und diskutiert.

Das *zweite Kapitel* beinhaltet eine breite Darstellung der Colombeauschen Theorie der verallgemeinerten Funktionen. Da die Theorie technisch sehr aufwendig ist, wird nicht die allgemeinste Colombeau-Algebra konstruiert, sondern eine vereinfachte Version, die jedoch alle wesentlichen Züge der sogenannten „vollen" Theorie trägt, für konkrete Rechnungen aber wegen der größeren Anschaulichkeit sogar Vorteile bietet. Die „volle" Theorie wird in Abschnitt 2.3 kurz dargestellt. Breiten Raum habe ich der Konstruktion der Einbettung der Distributionen in die Algebra der verallgemeinerten Funktionen ($\iota : \mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{G}$) eingeräumt, da dieser Abschnitt wesentlich für das Verständnis der gesamten Theorie ist. Die meisten Beweise habe ich genau ausgeführt und nur dann darauf verzichtet, wenn sie allzu langwierig und wenig verständnisfördernd waren. Die Colombeau-Theorie wird unter Einbeziehung vieler Beispielrechnungen bis zum wichtigen Konzept der *Assoziation* entwickelt, auf das bei der Diskussion und Interpretation der Ergebnisse der physikalischen Rechnungen zurückgegriffen wird.

Der „physikalische" Teil meiner Diplomarbeit umfaßt ebenfalls zwei Kapitel. Im *dritten Kapitel* werden Boost und ultrarelativistischer Limes des Coulombfeldes im flachen Raum berechnet (d. h. das elektromagnetische Feld einer mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Punktladung im Minkowskiraum). Das

Feld ist in diesem Limes auf einer zur Bewegungsrichtung normalen Hyperebene konzentriert, die das Punktteilchen enthält. Einige Komponenten des Feldstärketensors zeigen ein δ-artiges Verhalten. Daher kann der Energie-Impuls-Tensor des ultrarelativistischen Feldes nicht direkt berechnet werden. In Abschnitt 3.3 wird daher zunächst der Boost, dann erst der ultrarelativistische Limes des Energie-Impuls-Tensors des Coulombfeldes berechnet. In den verwendeten Koordinaten verschwinden im ultrarelativistischen Limes *im Raum der Distributionen* $\mathcal{D}'$ alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors außer der T_{00}-Komponente. Diese besitzt in $\mathcal{D}'$ keinen Limes. Dieser Sachverhalt wird abschließend in Abschnitt 3.4 aus der Sicht der Colombeau-Theorie diskutiert.

Im *vierten Kapitel* schließlich werden Boost und ultrarelativistischer Limes der Reissner-Nordstrøm Lösung berechnet. Dabei folge ich im wesentlichen der vorhandenen Literatur (Aichelburg und Sexl [11], Lustó und Sánchez [14]). Der ultrarelativistische Limes der Metrik gehört der Klasse der pp-Wellen an und ist überall flach, außer wiederum auf einer Hyperebene normal zur Boostrichtung, die das Teilchen enthält. Dort zeigen einige Metrikkomponenten ein δ-artiges Profil.
In Abschnitt 4.4 wird das aus der Reskalierung der Ladung resultierende, physikalisch unbefriedigende Ergebnis (verschwindendes elektromagnetisches Feld, nichtverschwindender Energie-Impuls-Tensor) aus der Sicht der Colombeau-Theorie diskutiert und interpretiert. Dabei erhalten wir aus formaler, mathematischer Sicht einen tiefergehenden Einblick in die Situation.

Bei allen Rechnungen der Kapitel drei und vier habe ich großes Augenmerk auf „mathematische Sauberkeit" gelegt. So habe ich die ultrarelativistischen Limiten nicht nur punktweise, sondern *wirklich* im Raum der Distributionen betrachtet. Dies erfordert zusätzliche Abschätzungen der auftretenden Funktionenfolgen, die oft technisch aufwendig sind, in der eingesehenen Literatur jedoch durchwegs fehlen.
Viel Aufwand verursachte auch das Nachvollziehen des Artikels von Lustó und Sánchez [14], der einige Schlampereien enthält (z. B. wird das elektromagnetische Feld der Reissner-Nordstrøm Lösung nicht im selben Koordinatensystem geboostet wie die Metrik) bzw. mathematische Schwierigkeiten verschweigt (singuläre Koordiantentransformationen).

Als *Anhang* habe ich ein kurzes Kapitel über Koordinatentransformationen und Pullback von Distributionen beigefügt, da in dieser Hinsicht bei den Rechnungen Schwierigkeiten auftraten und ich den Wunsch hatte, mir das „genauer anzusehen".

1 Distributionen

Die Theorie der Distributionen - oder auch verallgemeinerten Funktionen [1] - findet in vielen Gebieten der Mathematik und der theoretischen Physik eine breite Verwendung.
Während Distributionen von Physikern schon länger auf heuristische Weise angewandt wurden (Diracsche Delta-Funktion), war es S. SOBOLEV, der erstmals eine mathematisch-exakte Definition gab (ohne aber den Begriff ,,Distribution" zu verwenden). 1950 stellte L. SCHWARTZ in seiner Monographie ,,Théorie des Distributions" die Theorie erstmals systematisch dar. So war Sobolev der ,,Erfinder" der Distributionen, während Schwartz die Theorie der Distributionen formulierte. Nach Erscheinen des Schwartzschen Buches fanden die Distributionen rasch ihre heutige, weite Verbreitung.

Ziel des folgenden Abschnittes ist es, einen kurzgefaßten Abriß dieser Theorie zu präsentieren, während sich die darauf folgenden Abschnitte mit den Erfolgen, aber vor allem den Grenzen der Schwartzschen Distributionentheorie befassen.

1.1 Kurze Zusammenfassung der Schwartzschen Distributionentheorie

Die grundlegende Idee der Distributionentheorie ist es, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern, indem seine ,,Integralwirkung" $f : \varphi \mapsto \int f \varphi$ ins Auge gefaßt wird. Lineare und (folgen)stetige Zuordnungen dieser Form stecken gewissermaßen den Rahmen der Theorie ab. Beginnen wir nun, in einer etwas mathematischeren Sprache, die Zusammenfassung.

1.1.1 Der Raum der Testfunktionen

Mit R bzw. C bezeichnen wir den Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen.

Definition 1.1 *Sei $\Omega \subseteq R^n$ offen. Die Menge*

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega, C) : \ tr(\varphi) \subseteq \Omega, \ kompakt\}$$

heißt **Raum der Testfunktionen** *auf Ω, wobei der* **Träger** *der Funktion φ definiert ist als $tr(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ (der Querstrich bedeutet hier den (topologischen) Abschluß).*

Da der Träger einer Funktion also definitionsgemäß abgeschlossen ist, ist Kompaktheit gleichbedeutend mit der Beschränktheit des Trägers.

[1] Wir verwenden den Ausdrck ,,verallgemeinerte Funktion" jedoch nur für verallgemeinerte Funktionen im Sinne Colombeaus (Kapitel 2).

$\mathcal{D}(\Omega)$ ist offensichlich ein Vektorraum. Wir schreiben manchmal auch $C_0^\infty(\Omega)$ statt $\mathcal{D}(\Omega)$, beziehungsweise $C_0^k(\Omega)$ für die Menge der k-fach stetig-differenzierbaren Funktionen $\Omega \to C$ mit kompaktem Träger innerhalb von Ω.
Wie sieht nun dieser Raum $\mathcal{D}$ aus? Polynome, trigonometrische Funktionen und auch die Exponentialfunktion sind zwar glatt, haben aber keinen kompakten Träger. Es können jedoch Funktionen $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ explizit konstruiert werden. Die Funktion

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-2/(1-\|x\|^2)} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases} \qquad \text{wo: } \|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)^{1/2}$$

(,,Buckelfunktion um 0") beispielsweise ist C^∞ und es gilt: $\mathrm{tr}(\rho) = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\} =: B_1(0)$, der abgeschlossenen Einheitsball im R^n.

Weiters seien hier zwei Sätze zitiert, die das mögliche ,,Aussehen" von Testfunktionen veranschaulichen.

Satz 1.1 *$\mathcal{D}(\Omega)$ ist dicht in $C_0^0(\Omega)$ (bezüglich $\| \|_\infty$).*

Das bedeutet, daß jede stetige Funktion mit kompaktem Träger durch Testfunktionen beliebig genau approximiert werden kann.

Satz 1.2 *Sei $\omega \in C^\infty(\Omega)$ und $K \subseteq \Omega$, kompakt, dann $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sodaß:*

$$\varphi\,|_K = \omega\,|_K$$

Also schauen Testfunktionen auf kompakten Mengen so aus wie C^∞-Funktionen und gehen ,,außen" glatt gegen 0.

Definition 1.2 *Die* **Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$** *ist definiert als gleichmäßige Konvergenz in allen (partiellen) Ableitungen auf einer fixen Trägermenge, d. h. für φ, $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ definieren wir:*

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n :\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \exists K \subseteq \Omega,\ \textit{kompakt: } \forall n \Rightarrow tr(\varphi_n) \subseteq K \\ (2) & \forall \alpha \in N_0^n : \quad \|\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_n\|_\infty \to 0 \textit{ auf } K \end{cases}$$

Für partielle Ableitungen im R^n verwenden wir folgende Schreibweise: $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $\partial := (\partial_1, \ldots, \partial_n)$. Sei nun $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$, so schreiben wir in kompakter Form:

$$\partial^\alpha := (\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}) = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$$

Mit diesem Konvergenzbegriff erhalten wir:

Satz 1.3 *$\mathcal{D}(\Omega)$ ist (folgen)vollständig,*
(d. h. jede Cauchyfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$ hat ihren Limes wieder in $\mathcal{D}(\Omega)$).

1.1.2 Der Raum der Distributionen

Definition 1.3 *Eine* **Distribution F** *ist ein lineares, (folgen)stetiges Funktional auf* $\mathcal{D}(\Omega)$ *d. h.*

$$F: \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \to & C \\ \varphi & \mapsto & F(\varphi) \end{array} \quad mit: \begin{cases} F(\varphi_1+\varphi_2) & = & F(\varphi_1)+F(\varphi_2) \quad \forall \varphi_i \\ F(\lambda\varphi) & = & \lambda F(\varphi) \quad \forall \lambda \in R \\ \varphi_n \to^{\mathcal{D}} \varphi & \Rightarrow & F(\varphi_n) \to F(\varphi) \in C \end{cases}$$

Als Schreibweise verwenden wir oft $\langle F, \varphi \rangle$ *statt* $F(\varphi)$.

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \{F : \mathcal{D}(\Omega) \to C \text{ linear und (folgen)stetig}\}$$

bezeichnet den **Vektorraum der Distributionen** *auf* Ω.

Beispiele für Distributionen sind:

1. $f \in C(\Omega) \quad \langle F_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx$ ist linear und stetig denn:
   $|\langle F_f, (\varphi - \varphi_n) \rangle| \le (\int_\Omega |f(x)|\, dx)\, \|(\varphi - \varphi_n)\|_\infty \to 0$
   $\forall \varphi_n \to \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

2. **Die Diracsche δ-Distribution auf $\mathbf{R^n}$**

   $$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$

   und insbesonders: $\langle \delta_0, \varphi \rangle \equiv \langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0)$ ist offensichtlich linear und (folgen)stetig.

Man kann für lineare Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$ zeigen, daß folgenstetig äquivalent zu umgebungsstetig ist, falls man die Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ so definiert, daß obige Konvergenz erzeugt wird. Wir verwenden also in Hinkunft nur mehr den Begriff „stetig“.
Nun sehen wir, daß $\mathcal{D}'(\Omega)$ der topologische Dualraum zu $\mathcal{D}(\Omega)$ ist.

Definition 1.4 *Der* **Träger einer Distribution F** *ist definiert als:*

$$tr(F) := \left(\bigcup\{U \subseteq \Omega \text{ offen: } F|_U = 0\}\right)^c$$

wobei: $F|_U = 0 \;:\Leftrightarrow\; \langle F, \varphi \rangle = 0 \;\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *mit* $tr(\varphi) \subseteq U$ *und* ^{c} *Komplementbildung in* Ω *bedeutet.*
Der **Vektorraum der Distributionen mit kompaktem Träger** *auf* $\Omega \subseteq R^n$ *offen, wird bezeichnet mit:*

$$\mathcal{E}'(\Omega) := \{F : \mathcal{D}(\Omega) \to C \text{ linear, stetig und } tr(F) \text{ kompakt}\}$$

Wir erwähnen ohne Beweis, daß $\mathcal{E}'(\Omega)$ der topologische Dualraum von $\mathcal{E}(\Omega) \equiv C^\infty(\Omega)$ ist. Für $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ (insbes. $\Omega_2 = R^n$) kann $\mathcal{E}'(\Omega_1)$ mittels der Adjungierten der Einschränkungsabbildung $C^\infty(\Omega_2) \hookrightarrow C^\infty(\Omega_1)$ in $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ eingebettet werden.

1.1.3 Reguläre Distributionen

In welcher Weise genau stellen Distributionen eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes dar; d. h. wie können etwa C^∞-,C^0-, oder integrierbare Funktionen in $\mathcal{D}'(\Omega)$ eingebettet werden?

Definition 1.5 *Sei $\Omega \subseteq R^n$ offen, so bezeichnen wir mit:*

$$\mathcal{L}^1(\Omega) := \{f : \Omega \to C : f \text{ Lebesgue-integrierbar}\}$$

die Menge der **Lebesgue-intgrierbaren Funktionen** *auf Ω und mit:*

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to C : \forall K \text{ (kompakt)} \subseteq \Omega : f\,|_K \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}$$

die Menge der **lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen** *auf Ω.*

Um eine Einbettung $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ zu konstruieren, definieren wir die Abbildung:

$$f \mapsto F_f : F_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

Diese Abbildung ist aber auf $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nicht injektiv, denn sei f nur auf einer Lebesgue-Nullmenge von 0 verschieden, so gilt $\int_\Omega f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, also $F_f = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, aber $f \neq 0$. Wir müssen also zumindest diesen nichttrivialen Nullteiler $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \{f \neq 0\} \text{ ist Lebesgue-Nullmenge}\}$ herausfaktorisieren und definieren auf $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgende Äquivalenzrelation: $f_1 \sim f_2 :\Leftrightarrow f_1 - f_2 \in \mathcal{N}$ ($\Leftrightarrow \int_\Omega f_1 = \int_\Omega f_2$). Es zeigt sich (ohne Beweis), daß dies auch reicht. Sei also $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)/\mathcal{N}$, dann haben wir als lineare (injektive) Einbettungsabbildung:

$$\begin{array}{lllll} \iota : & L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) & \hookrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) & \\ & f & \mapsto & F_f : & \langle F_f, \varphi\rangle := \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \end{array}$$

Definition 1.6 *Eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt* **reguläre Distribution**, *falls ein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ existiert mit $F_f = F$.*

Ein Beispiel für eine reguläre Distribution in $\mathcal{D}'(R)$ ist die **Heaviside-** oder **Sprungfunktion**

$$\Theta(x) \equiv H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{also: } \langle F_H, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H\varphi = \int_0^\infty \varphi$$

Und etwas allgemeiner: $\langle H(x-a), \varphi\rangle := \int_a^\infty \varphi$

Satz 1.4 *Die δ-Distribution ist nicht regulär.*

Beweis. Angenommen $\exists f \in L^1_{\text{loc}}(R^n)$ mit $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle = \langle F_f, \varphi \rangle \, \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, dann wähle als Testfunktion $\rho_n(x) := \rho(nx)$ mit ρ aus Abschnitt 1.1.1 („Buckelfunkion um 0"). Nun gilt:

$$\rho_n(0) = \frac{1}{e^2} = \int_{R^n} f \rho_n \leq \frac{1}{e^2} \int_{B_{(1/n)}(0)} | f | \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

wobei: $B_{(1/n)}(0) = \{x \in R^n : \|x\| \leq \frac{1}{n}\}$ Widerspruch. $\square$

1.1.4 Konvergenz in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definition 1.7 *Die* **Konvergenz im Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$** *ist punktweise erklärt, d. h.*

$$F_n, F \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad F = \lim_{n\to\infty} F_n :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \langle F_n, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \in C \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Addition und Multiplikation mit Skalaren sind stetig, d. h. es gilt:

$$\begin{aligned} F_n \to F, \quad G_n \to G \quad &\Rightarrow \quad F_n + G_n \to F + G \\ \lambda_n, \lambda \in R, \ \lambda_n \to \lambda, \quad F_n \to F \quad &\Rightarrow \quad \lambda_n F_n \to \lambda F \end{aligned}$$

Es gilt der folgende bemerkenswerte Satz:

Satz 1.5 δ-Folgen

$$\textit{Sei } f \in L^1_{loc}(R^n) \textit{ und } \int_{R^n} f(t)dt = 1, \quad \textit{dann gilt: } \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^n f(\lambda x) = \delta$$

Beweis. $| \langle \delta, \varphi \rangle - \langle F_{\lambda^n f}(\lambda x), \varphi \rangle | = | \varphi(0) \int f(s)ds - \int \lambda^n f(\lambda x) \varphi(x) dx |$
$= | \int f(s) \left(\varphi(0) - \varphi(\frac{s}{\lambda}\right) ds | \to 0$ $\square$

Hier ist anzumerken, daß die „Formlosigkeit" von δ (es kommt nicht auf die konkrete Gestalt der approximierenden Funktion f an) von Vorteil etwa bei der Behandlung linearer Differentialgleichungen ist, jedoch bei der Behandlung nichtlinearer Probleme (Multiplikation von Distributionen) gerade dadurch große Probleme auftreten, wie wir später sehen werden.
Es gilt der wichtige Satz:

Satz 1.6 $\mathcal{D}'$ *ist (folgen)vollständig.*

1.1.5 Differentiation in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Für einen sinnvollen Ableitungsbegriff in $\mathcal{D}'(\Omega)$ erwarten wir, daß er die gewöhnliche Ableitung von C^1-Funktionen verallgemeinert, d. h. wir fordern für $f \in C^1(\Omega)$: $\partial_i(F_f) = F_{\partial_i f}$. Damit ist die Ableitung auf $\mathcal{D}'(\Omega)$ (wenn sie stetig sein soll) bereits eindeutig bestimmt ($C^1(\Omega) \supseteq \mathcal{D}(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{D}'(\Omega)$, siehe Satz 1.11 im nächsten Abschnitt). Für $f \in C^1(R^n)$ haben wir also $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_1(F_f), \varphi \rangle &= \langle F_{\partial_1 f}, \varphi \rangle = \int_{R^n} \partial_1 f(x)\varphi(x) dx \\
&= \int_{R^{n-1}} \left(\int_R \partial_1 f(x)\varphi(x)\, dx^1 \right) dx^2 \ldots dx^n \quad \text{(part. Integration)} \\
&= \int_{R^{n-1}} \left(f(x)\varphi(x) \Big|_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_R f(x)\partial_1\varphi(x)\, dx^1 \right) dx^2 \ldots dx^n \\
&= -\int_{R^n} f(x)\partial_1\varphi(x)\, dx = -\langle F_f, \partial_1\varphi \rangle
\end{aligned}$$

Diese Überlegung motiviert nun folgende Definition:

Definition 1.8 *Sei $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Die* **partielle Ableitung von F** *nach der Variablen x_i $(1 \le i \le n)$ ist die Distribution $\frac{\partial F}{x_i} \equiv \partial_i F$, definiert durch:*

$$\langle \partial_i F, \varphi \rangle := -\langle F, \partial_i \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Aus der Definition folgt sofort, daß **Distributionen beliebige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzen.** Diese sind definiert durch:

$$\langle \partial^\alpha F, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle F, \partial^\alpha \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

wo: $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in N_0^n$ und: $\mid \alpha \mid := \sum_{i=1}^n \alpha_i$

Klarerweise vertauschen alle partiellen Ableitungen.

Satz 1.7 *Seien $F, F_n, G \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\lambda \in R$. Es gilt:*

$$\begin{array}{rlcl}
(i) & \partial_i(F+G) & = & \partial_i F + \partial_i G \\
(ii) & \partial_i(\lambda F) & = & \lambda \partial_i F \\
(iii) & F_n \to F & \Rightarrow & \partial_i(F_n) \to \partial_i F \\
(iv) & \sum_1^\infty F_n = F & \Rightarrow & \sum_1^\infty \partial_i(F_n) = \partial_i F
\end{array}$$

Beweis. (i) und (ii) sind aus den Definitonen klar, (iv) folgt aus (iii).
(iii) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $F = \lim F_n \Rightarrow \langle \partial_i(F_n), \varphi \rangle = -\langle F_n, \partial_i \varphi \rangle \to -\langle F, \partial_i \varphi \rangle = \langle \partial_i F, \varphi \rangle$ □

Aussage (iii) des Satzes ist äußerst bemerkenswert, da sie für C^∞-Funktionen nicht gilt, hier aber unmittelbar aus den Definitionen folgt. Der Ableitungsbegriff für Distributionen ist deswegen so mächtig und doch einfach zu handhaben, da er durch Adjunktion (die Ableitung in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die negative Adjungierte der Ableitung in $\mathcal{D}(\Omega)$) direkt von der strengen Konvergenzdefinition in $\mathcal{D}(\Omega)$ profitiert.
Wir bringen einige Beispiele zum Ableitungsbegriff in $\mathcal{D}'(\Omega)$:

1. **Ableitung in $\mathbf{C}^\infty(R)$ und in $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$**
   Sei $g_n(x) = (1/\sqrt{n})\, e^{inx} \in C^\infty(R) \subseteq L^1_{\text{loc}}(R)$, dann gilt: $\|g_n\|_\infty \to 0$, und somit auch $\lim F_{g_n} = 0 \in \mathcal{D}'(R)$, (denn: $|\int g_n\varphi| \leq (\int |g_n|)\, \|\varphi\|_\infty \leq C\|g_n\|_\infty\|\varphi\|_\infty$)
   $g_n'(x) = i\sqrt{n}e^{inx}$ und wegen (iii) im obigen Satz gilt: $F'_{g_n} \to 0 \in \mathcal{D}'(R)$ aber klarerweise $g_n' \to \infty$ punktweise in $C^\infty(R)$.

2. **Ableitung der Sprungfunktion $\mathbf{H} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$**
   Es gilt:
   $$H' = \delta$$
   denn: $\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(t)dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(R)$
   und analog dazu: $H'(x-a) = \delta_a(x)$

3. **Ableitungen der δ-Distribution**
   $\langle \partial_i\delta, \varphi\rangle = -\langle \delta, \partial_i\varphi\rangle = -\partial_i\varphi(0)$ und allgemeiner gilt:
   $$\langle \partial^\alpha\delta, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(0) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$
   Speziell für R gilt:
   $$\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle = -\varphi'(0)$$

4. **Ableitung stückweise stetig-differenzierbarer Funktionen**
   Sei $\Omega = R$ und $(a_i)_{i\in I}$ eine Folge in R ohne Häufungspunkt im Endlichen und sei $f|_{(a_i,a_{i+1})}$ C^1 auf $[a_i, a_{i+1}]$ fortsetzbar mit respektiven Sprunghöhen $f(a_i+) - f(a_i-) =: \alpha_i$, dann gilt:
   $$(F_f)' = F_{f'} + \sum_i \alpha_i\delta_{a_i}$$

1.1.6 Die Faltung

Definition 1.9 Faltung glatter Funktionen
Seien $\varphi, \psi \in C^\infty(R^n)$ und mindestens eine der Funktionen habe kompakten Träger, dann ist die Faltung $\varphi * \psi$ von φ und ψ definiert durch:

$$[\varphi * \psi](x) := \int_{R^n} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt$$

Aus der Definition folgt sofort, daß die Faltung kommutativ (substituiere: $t = x - s \Rightarrow [\varphi * \psi](x) = \int_{R^n} \varphi(x-s)\psi(s)ds$) und assoziativ ist.
Allgemeiner ist die Faltung für zwei lokal integrierbare Funktionen definiert, wovon mindestens eine kompakten Träger hat.

Satz 1.8 Eigenschaften der Faltung glatter Funktionen
Seien $\psi, \varphi \in C^\infty(R^n)$, wovon mindestens eine kompakten Träger hat und sei $\alpha \in N_0^n$ dann gilt:

- (i) $\varphi * \psi \in C^\infty(R^n)$
- $(i)'$ *Falls beide Funktionen kompakten Träger haben; also $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(R^n)$ dann gilt sogar: $\varphi * \psi \in \mathcal{D}(R^n)$*
- (ii) $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi * \psi$ *ist bilinear und in jedem Faktor separat stetig*: $C^\infty(R^n) \to C^\infty(R^n)$ *bzw.* $\mathcal{D}(R^n) \to C^\infty(R^n)$
- (iii) $\partial^\alpha[\varphi * \psi] = \partial^\alpha \varphi * \psi = \varphi * \partial^\alpha \psi$

Definition 1.10 *Der* **Faltungsoperator $\mathbf{T}_\psi$** *für $\psi \in C^\infty(R^n)$ sei definiert durch:*

$$T_\psi(\varphi) := \varphi * \psi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$

Wegen des obigen Satzes ist T_ψ linear und stetig: $\mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}(R^n)$

Definition 1.11 Faltung von Distributionen mit Funktionen
Sei $F \in \mathcal{D}'(R^n)$ und $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$, bzw. $F \in \mathcal{E}'(R^n)$ und $\psi \in C^\infty(R^n)$, dann ist die Faltung $F * \psi$ von F und ψ definiert durch:

$$[F * \psi](x) := \langle F(t), \psi(x-t) \rangle$$

Es läßt sich zeigen, daß $F * \psi$ glatt ist und daher wiederum als (reguläre) Distribution aufgefaßt werden kann.
Damit haben wir folgende heuristische Rechnung (die sich mit entsprechendem Aufwand exaktifizieren läßt): Sei $F \in \mathcal{D}'(R^n)$ (bzw. $\mathcal{E}'(R^n)$), $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ (bzw. $C^\infty(R^n)$) und $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, dann:

$$\begin{aligned}
\langle F * \psi, \varphi \rangle &= \langle \langle F(t), \psi(x-t) \rangle, \varphi(x) \rangle \\
&= \langle F(t), \langle \varphi(x)\psi(x-t) \rangle \rangle \\
&= \langle F, \varphi * \check{\psi} \rangle \qquad \text{wobei: } \check{\psi}(x) := \psi(-x) \\
&= \langle F, T_{\check{\psi}}\varphi \rangle \\
&= \langle T'_{\check{\psi}} F, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Also geht die Faltung von Distributionen mit Funktion aus der Adjunktion der entsprechenden Operation auf $C^\infty \times \mathcal{D} \to C^\infty$ hervor und stimmt für reguläre Distributionen mit der alten Definition überein, (d. h. $(F_f) * \psi = F_{f*\psi}$), denn:

$$\begin{array}{rcl} \langle (F_f) * \psi, \varphi \rangle & = & \langle T'_{\check{\psi}} F_f, \varphi \rangle \\ = \langle F_f, \check{\psi} * \varphi \rangle & = & \int f(x) \, [\check{\psi} * \varphi](x) \, dx \\ = \int f(x) [\int \check{\psi}(x-s) \varphi(s) \, ds] \, dx & = & \int \int f(x) \psi(s-x) \varphi(s) \, dx ds \\ = \int [f * \psi](s) \varphi(s) ds & = & \langle F_{f*\psi}, \varphi \rangle \end{array}$$

Satz 1.9 Eigenschaften der Faltung von Distributionen mit Funktionen
Seien $F \in \mathcal{D}'(R^n)$ und φ, $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ bzw. $F \in \mathcal{E}'(R^n)$ und φ, $\psi \in C^\infty(R^n)$ und sei $\alpha \in N_0^n$, dann gilt:

(i) $[F * \psi](x) \in C^\infty(R^n)$
(ii) $(F, \psi) \mapsto F * \psi$ *ist bilinear und in jedem Faktor separat stetig*
(iii) $(F * \psi) * \varphi = F * (\psi * \varphi)$
(iv) $\partial^\alpha [F * \psi] = \partial^\alpha F * \psi = F * \partial^\alpha \psi$

Es gilt der folgende wichtige Satz:

Satz 1.10 *Die δ-Distribution ist Faltungseinheit, d. h.*

$$\delta * \psi = \psi \quad \forall \psi \in C^\infty(R^n)$$

Beweis. $[\delta * \psi]\,(x) \;=\; \langle \delta(t), \psi(x-t) \rangle \;=\; \psi(x) \qquad \square$

Allgemeiner gilt: $[\delta_a * \psi]\,(x) = \langle \delta_a(t), \psi(x-t) \rangle = \psi(x-a)$
Also ist die Faltung mit δ_a gleich der a-Verschiebung.

Mittels der Faltung läßt sich leicht der folgende Satz beweisen:

Satz 1.11 $\mathcal{D}(R^n)$ *liegt dicht in* $\mathcal{D}'(R^n)$.

Daher ist jede stetige Abbildung auf $\mathcal{D}'(R^n)$ bereits durch ihre Werte in $\mathcal{D}(R^n)$ eindeutig bestimmt.

1.1.7 Temperierte Distributionen

Bis jetzt haben wir den Raum $\mathcal{D}(R^n)$ der Testfunktionen mit großem Erfolg verwendet. Die Kompaktheit des Trägers der Testfunktionen ermöglicht es viele Resultate sehr elegant zu beweisen - der technische Aufwand ist sehr gering. Es stellt sich aber heraus, daß die Bedingung „kompakter Träger" für manche Zwecke eine zu starke Forderung ist. Vor allem bei der **Fouriertransformation** muß auf diese Forderung verzichtet werden.

Definition 1.12 *Seien $f, g \in C^\infty(R^n, C)$, dann ist die* **Fouriertransformierte** $\hat{f} \equiv \mathcal{F}f$ *von f definiert als:*

$$\hat{f}(t) \equiv \mathcal{F}f(t) := \int_{R^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,t\rangle} dx$$

wobei: $\langle x, t\rangle = x_1 t_1 + \ldots + x_n t_n$ für $x, t \in R^n$
Die Umkehrtransformation $\mathcal{F}^{-1}g \equiv \check{g}$ ist definiert durch:

$$\check{g}(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}g(x) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n} g(t) e^{2\pi i\langle x,t\rangle} dt$$

Für Testfunktionen ergibt sich nun folgendes Problem: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ dann gilt: $\hat{\varphi}$ ist definiert, die Zuordnung $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ ist linear und weiters: $\hat{\varphi}$ ist beschränkt, stetig, differenzierbar, C^∞, sogar ganz analytisch (d. h. in eine in jedem Punkt konvergente Potenzreihe entwickelbar). Da die Fouriertransformation injektiv ist, gilt: $\varphi \neq 0 \Rightarrow \hat{\varphi} \neq 0$ aber analytisch, und aus dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen folgt nun, daß $\hat{\varphi}$ keinen kompakten Träger hat (Nullstellen dürfen sich nicht häufen). Also führt die Fouriertransformation aus $\mathcal{D}(R^n)$ heraus.
Ein Funktionenraum, aus dem die Fouriertransformation nicht herausführt und der in gewissem Sinne die minimale Erweiterung von $\mathcal{D}(R^n)$ darstellt, wenn die Kompaktheit des Trägers fallengelassen werden muß, ist:

Definition 1.13 *Der* **Raum der Schwartzschen Funktionen** $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$ *ist definiert durch:*

$$\mathcal{S} := \{f \in C^\infty(R^n, C) : \ \forall p, \alpha \in N_0^n : \lim_{||x|| \to \infty} |\, x^p \partial^\alpha f(x) \,| = 0\,\}$$

wobei: $x^p := (x_1^{p_1}, \ldots, x_n^{p_n})$ für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in N_0^n$ und $x \in R^n$

Die Bedingung an die Schwartzschen Funktionen kann in folgende äquivalente Bedingungen umformuliert werden:

(i) $\forall \alpha, p \in N_0^n : x^p \partial^\alpha f(x)$ beschränkt
(ii) $\forall \alpha \in N_0^n, \forall k \in N : (1 + \|x\|^2)^{k/2} \partial^\alpha f(x)$ beschränkt

Wir nennen $f \in \mathcal{S}(R^n)$ auch **schnell fallend**.

Satz 1.12 Eigenschaften von $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$

1. *$\mathcal{S}(R^n)$ ist ein Vektorraum.*
2. *$\mathcal{D}(R^n) \subseteq \mathcal{S}(R^n)$ und $\hat{\mathcal{D}}(R^n) \subseteq \mathcal{S}(R^n)$*
3. *Die Fouriertransformation ist linear und stetig: $\mathcal{S}(R^n) \to \mathcal{S}(R^n)$*
4. *$e^{-\|x^2\|/2} \in \mathcal{S}(R^n)$ $(e^{-\|x^2\|/2} \notin \mathcal{D}(R^n), \notin \hat{\mathcal{D}}(R^n))$*

Satz 1.13 Eigenschaften der Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$
Sei $f \in \mathcal{S}(R^n)$, dann gilt:

1. *$\mathcal{F}(\partial_j f)(t) = it_j \mathcal{F} f(t)$*
2. *$\mathcal{F}(x_j f(x)) = -i\frac{\partial(\mathcal{F}f)(t)}{\partial t_j}$*
3. *$\mathcal{F}(e^{-\|x\|^2/2}) = (2\pi)^{n/2}\, e^{-\|t\|^2/2}$*
4. **Fourierinversionsformel**

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \hat{f}(t) e^{2\pi i \langle x,t\rangle}\, dt \qquad d.\,h.\ (\hat{\varphi})^{\check{}} = \varphi \ bzw.\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} f = f$$

Definition 1.14 *Die* **Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbf{R^n})$** *ist definiert durch:*

$$f_n, f \in \mathcal{S} : f_n \to f \in \mathcal{S}(R^n) :\Leftrightarrow \forall p, \alpha \in N_0^n : \|x^p \partial^\alpha (f_n - f)\|_\infty \to 0$$

Mit dieser Definition wird $\mathcal{S}(R^n)$ zu einem **vollständigen** (metrisierbaren) Raum. Weiters läßt sich zeigen, daß $\mathcal{D}(R^n)$ in $\mathcal{S}(R^n)$ dicht liegt. (In diesem Sinne ist $\mathcal{S}$ die minimale Erweiterung von $\mathcal{D}$.)

Definition 1.15 *Eine* **temperierte Distribution** *auf R^n ist ein lineares und stetiges Funktional auf $\mathcal{S}(R^n)$.*

$$\mathcal{S}'(R^n) := \{F : \mathcal{S}(R^n) \to C :\ linear\ und\ stetig\}$$

ist der **Vektorraum der temperierten Distributionen** *auf R^n.*

Die **Konvergenz in $\mathcal{S}'(\mathbf{R^n})$** ist wiederum punktweise erklärt; d. h.

$$F_n \to F \in \mathcal{S}(R^n)' :\Leftrightarrow \langle F_n, f\rangle \to \langle F, f\rangle \in C \quad \forall f \in \mathcal{S}(R^n)$$

und macht $\mathcal{S}'(R^n)$ zu einem vollständigen Raum.
Wie sieht nun $\mathcal{S}'(R^n)$ im Vergleich zu $\mathcal{D}'(R^n)$ aus? Wir haben $\mathcal{D}(R^n)$ in den größeren Raum $\mathcal{S}(R^n)$ eingebettet; daher ist $\mathcal{S}'(R^n) \subseteq \mathcal{D}'(R^n)$ wobei

die Einschränkungsabbildung $\mathcal{D}'(R^n) \to \mathcal{S}'(R^n)$ durch die Adjungierte der Einbettung $j : \mathcal{D}(R^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(R^n)$ gegeben ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "j'F"'] & \mathcal{S} \arrow[d, "F \in \mathcal{S}'"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{rcll} j'F & := & F \circ j & F \in \mathcal{S}'(R^n) \\ \langle j'F, \varphi \rangle & = & \langle F, j(\varphi) \rangle & \varphi \in \mathcal{D}(R^n) \end{array}$$

$j : \mathcal{D} \to j(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{S}$ ist allerdings kein Folgenisomorphismus, da in $\mathcal{D}$ die $\mathcal{D}$-Konvergenz, in $j(\mathcal{D})$ aber die Einschränkung der $\mathcal{S}$-Konvergenz gilt.
Aufgrund der „weniger strengen" $\mathcal{S}$-Konvergenz (im Vergleich zur $\mathcal{D}$-Konvergenz), haben es Funktionale aus $\mathcal{S}'$ „schwerer" (folgen)stetig zu sein. Daher ist auch anschaulich klar, warum $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$ gilt. Welche $F \in \mathcal{D}'(R^n)$ liegen also auch in $\mathcal{S}'(R^n)$?

Satz 1.14 Vergleich von $\mathcal{S}'(\mathbf{R^n})$ mit $\mathcal{D}'(\mathbf{R^n})$

1. *δ und auch alle $\delta_a \in \mathcal{S}'(R^n)$*

2. *Sei $f \in L^1_{loc}(R^n)$ und $\exists C > 0, k \in N$ sodaß: $\mid (1 + \|x\|^2)^{-k} f(x) \mid \leq C$, dann gilt: $F_f \in \mathcal{S}'(R^n)$ (wobei: $\langle F_f, \varphi \rangle := \int f(x)\varphi(x)dx$)*
Solche $f \in L^1_{loc}(R^n)$ heißen **schwach wachsend** *und die daraus gebildeten Distributionen $F_f \in \mathcal{S}'(R^n)$* **reguläre temperierte Distributionen**.

3. *$e^{-\|x\|^2/2} \in \mathcal{D}'(R^n)$ aber $\notin \mathcal{S}'(R^n)$*

Zum Abschluß zitieren wir noch einige Resultate der Theorie der Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(R^n)$.

Definition 1.16 *Sei $F \in \mathcal{S}'(R^n)$. Die* **Fouriertransformierte** $\mathcal{F}F \equiv \hat{F}$ *von F ist definiert durch Adjunktion der Operation auf $\mathcal{S}(R^n)$:*

$$\langle \mathcal{F}F, f \rangle \equiv \langle \hat{F}, f \rangle := \langle F, \hat{f} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(R^n)$$

Für reguläre temperierte Distributionen stimmt die neue Definition mit der alten überein, denn:

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_f, \varphi \rangle = & \ \langle F_f, \hat{\varphi} \rangle = \int f(t)[\int \varphi(x) e^{-2\pi i \langle x,t \rangle} dx] dt \\ = & \ \int \varphi(x)[\int f(t) e^{-2\pi i \langle x,t \rangle} dt] dx = \langle F_{\hat{f}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation ist linear und stetig auf $\mathcal{S}'(R^n)$ und es gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}F) \equiv (\hat{F})\check{} = F \quad \forall F \in \mathcal{S}'(R^n)$$

wobei $\mathcal{F}^{-1} \equiv \check{}$ die Umkehrtransformation bezeichnet, die auf $\mathcal{S}'(R^n)$ ebenfalls durch Adjunktion der Umkehrtransformation auf $\mathcal{S}(R^n)$ definiert ist.

1.2 Distributionen und Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen

Eine wichtige Anwendung der Distributionentheorie ist das Lösen linearer partieller Differentialgleichungen (PDG). Während auf dem Gebiet der linearen PDG mit konstanten Koeffizienten das Resultat von Malgrange und Ehrenpreis (1954) einen der größten Erfolge der Distributionentheorie darstellt, zeigen sich bereits bei der Behandlung linearer PDG mit nicht konstanten Koeffizienten die Grenzen dieser Theorie.
Der folgende Abschnitt soll darüber einen kleinen Überblick geben und den „Wunsch" nach einem Produkt von Distributionen motivieren.

Zunächst führen wir eine praktische Schreibweise für lineare PDG ein.

Definition 1.17 *Sei* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$, $\mid \alpha \mid := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ *und seien* $c_\alpha \in C$, *dann heißt das Polynom (vom Grad* $\leq k$*)*

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \, \partial^\alpha$$

linearer partieller Differentialoperator (PDO) mit konstanten Koeffizienten *auf* R^n.

Sei nun $f \in C^\infty(R^n)$, dann ist $P(\partial)\,\varphi = f$ eine lineare PDG mit konstanten Koeffizienten vom Grad k. Beispiele für lineare PDG mit konstanten Koeffizienten sind:

1. Die **Laplacegleichung:** $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi =: \Delta\,\varphi = 0$
2. Die **Wärmeleitungsgleichung:** $(\partial_t - \Delta)\varphi = f$

Wichtiges Werkzeug zur Lösung solcher Gleichungen ist die Faltung von Distributionen mit C^∞-Funktionen. Es gilt der folgende, einfach zu beweisende Satz:

Satz 1.15 *Kennt man eine Distribution* $F \in \mathcal{D}'(R^n)$ *mit der Eigenschaft:*

$$P(\partial)\,F \,=\, \delta \qquad (i)$$

dann löst die C^∞*-Funktion* $\varphi := F * f$ *(falls sie definiert ist; dafür genügt als Voraussetzung zB.* $F \in \mathcal{E}'(R^n)$, *oder* $f \in \mathcal{D}(R^n)$*) die Gleichung:*

$$P(\partial)\,\varphi = f \qquad (ii)$$

Definition 1.18 *Ein* $F \in \mathcal{D}'(R^n)$, *das (i) im Satz erfüllt, heißt* **Fundamentallösung** *der Gleichung (ii).*

Beweis. $P(\partial)\,\varphi = P(\partial)\,(F * f) = (P(\partial)F) * f = \delta * f = f$ $\square$

Im Jahr 1954 bewiesen Malgrange und Ehrenpreis unabhängig voneinander das folgende starke Resultat.

Satz 1.16 *Sei $P(\partial)$ ein linearer PDO mit konstanten Koeffizienten auf R^n, dann existiert eine Fundamentallösung $F \in \mathcal{D}'(R^n)$.*

Beispiel. Das Newtonsche Potential $N := -\frac{1}{4\pi\|x\|} \in L^1_{\text{loc}}(R^3) \subseteq \mathcal{D}'(R^3)$ ist Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Bestärkt durch diesen Erfolg wandte man sich den linearen PDG mit C^∞-Koeffizienten zu. Sei nun

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha|\leq k} c_p(x)\partial^\alpha \quad \text{mit } c_p \in C^\infty(R^n, C)$$

ein **linearer PDO mit C$^\infty$-Koeffizienten**, so ist für $f \in C^\infty(R^n)$ die Gleichung $P(\partial)\varphi = f$ eine lineare PDG mit glatten Koeffizienten.
Bereits 1955 wurde als Dissertationsthema vergeben (Treves): Zeige, daß (lokal) jede solche Gleichung eine distributionelle Lösung hat.
Diese Aussage ist aber falsch! Lewy gab 1957 das erste Gegenbeispiel:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} - 2i\,(x_1 + ix_2)\,\frac{\partial}{\partial x_3})\varphi = f$$

Es existieren $f \in C^\infty(R^3)$, sodaß die Gleichung für kein $\varphi \in \mathcal{D}'(R^3)$ erfüllt ist.

Betrachtet man dieses Beispiel und noch allgemeiner nichtlineare PDG, so wird klar, daß der Raum $\mathcal{D}'$ zu ,,klein" ist. Um diese Probleme behandeln zu können, müßte man vor allem Produkte von Distributionen zur Verfügung haben; also ein Produkt $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$. Dieser Problemstellung soll im nächsten Abschnitt nachgegangen werden.

1.3 Multiplikation von Distributionen

In diesem Abschnitt sollen schrittweise die Probleme aufgezeigt werden, die sich ergeben, wenn man versucht, ein Produkt $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ zu definieren. Als Abschluß soll das sogenannte „Unmöglichkeitsresultat" von Schwartz bewiesen und diskutiert werden. Wir beschränken uns hierbei auf $\Omega = R$, da bereits in diesem Spezialfall alle charakteristischen Probleme sichtbar werden.

Zunächst betrachten wir den Spezialfall des Produkts von Distributionen mit C^∞-Funktionen.

Definition 1.19 *Sei $F \in \mathcal{D}'(R)$ und $\omega \in C^\infty(R)$; dann definieren wir das Produkt $F\omega \in \mathcal{D}'(R)$ durch:*

$$\langle F\omega, \varphi\rangle := \langle F, \omega\varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R)$$

Dieses Produkt ist wohldefiniert und klarerweise kommutativ. Weiters gilt die Produktregel, denn:

$$\begin{aligned} \langle (\omega F)', \varphi\rangle &= -\langle \omega F, \varphi'\rangle = -\langle F, \omega\varphi'\rangle \\ &= -\langle F, (\omega\varphi)'\rangle + \langle F, \omega'\varphi\rangle \\ &= \langle F', \omega\varphi\rangle + \langle \omega' F, \varphi\rangle \\ &= \langle \omega F' + \omega' F, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Beispiel. $x\,\delta = 0$ denn: $\langle x\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = 0\,\varphi(0) = 0$

Um konkret Beispiele behandeln zu können, führen wir folgende Distributionen ein:

1. Der **Cauchysche Hauptwert von $\mathbf{\frac{1}{x}}$** :

$$\langle \text{v.p.}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle := \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(R)$$

Da $\frac{1}{x} \notin L^1_{\text{loc}}(R)$ müssen wir erst zeigen, daß v.p.$(\frac{1}{x})$ eine Distribution ist. Zunächst existiert dieser Limes, denn sei:

$$\psi(x) := \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} & x \neq 0 \\ \varphi'(0) & x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \psi \text{ stetig}$$

und es gilt: $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \quad \forall x \in R$.
Sei nun a so gewählt, daß $\text{tr}(\varphi) \subseteq [-a, a]$, dann gilt:

$$\int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0) \underbrace{\int_{\epsilon<|x|<a} \frac{dx}{x}}_{0} + \int\limits_{\epsilon<|x|<a} \psi(x)\,dx$$

$$\to \int\limits_{-a}^{a} \psi(x)\,dx \qquad (\epsilon \to 0)$$

Also existiert der Limes. Bleibt zu zeigen, daß v.p.$(\frac{1}{x})$ punktweiser Limes von Distributionen ist, also ist zu zeigen:
$\forall\epsilon > 0$ ist $\varphi \mapsto \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \in \mathcal{D}'$
Es gilt:

$$| \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \,| \le \int\limits_{|x|>\epsilon} | \frac{\varphi(x)}{x} |\, dx \le \|\varphi\|_\infty \int\limits_{\epsilon<|x|<a} | \frac{1}{x} |\, dx$$

$$= \|\varphi\|_\infty (\int\limits_{-a}^{-\epsilon} -\frac{1}{x}\, dx + \int\limits_{a}^{\epsilon} \frac{1}{x}\, dx) \; = 2\,\|\varphi\|_\infty \int\limits_{a}^{\epsilon} \frac{1}{x}\, dx = 2\,\|\varphi\|_\infty \ln \frac{a}{\epsilon} \qquad \square$$

2. $x_+ := x\,H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \ge 0 \end{cases} \quad \in C(R) \subseteq \mathcal{D}'(R)$
und:

$$x'_+ = (x\,H)' = x\,H' + 1\,H = x\delta + H = H$$

Diese einfachen Beispiele genügen bereits, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1.17 *Ein Produkt auf $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$, das obiges, auf $C^\infty(R) \times \mathcal{D}'(R)$ definiertes Produkt fortsetzt, ist* **nicht assoziativ.**

Beweis. Zunächst gilt:

$$\langle x\,\mathrm{v.p.}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle \mathrm{v.p.}(\frac{1}{x}), x\varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\epsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \langle F_1, \varphi\rangle$$

also:

$$x\,\mathrm{v.p.}(\frac{1}{x}) = 1 \quad (= F_1) \, \in \mathcal{D}'(R)$$

Daraus ergibt sich nun:

$$0 = (\delta\,x)\,\mathrm{v.p.}(\frac{1}{x}) \ne \delta\,(x\,\mathrm{v.p.}(\frac{1}{x})\,) = \delta\,1 = \delta \qquad \square$$

Aber die Probleme, die sich beim Versuch, ein Produkt auf $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$ zu definieren, ergeben, sind noch gravierender. Wir definieren:

$$\eta(x) := 2H - 1 = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \;\;1 & x > 0 \end{cases}$$

Es gilt: $\eta^2(x) = 1$ auf $R \setminus \{0\}$ und: $\eta,\, \eta^2 \in L^1_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathcal{D}'$.

Satz 1.18 *Ein Produkt auf $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$, das die punktweise Multiplikation von L^1-Funktionen fortsetzt und die Produktregel erfüllt, ist entweder* **nicht kommutativ** *oder es gilt: $\eta\delta = \delta\eta = 0$*

Beweis.

$0 = 1' = (\eta^2)' = \eta\eta' + \eta'\eta = 2\eta\delta + 2\delta\eta \Rightarrow \eta\delta = -\delta\eta$ oder: $\eta\delta = \delta\eta = 0$ □

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich: **auf $\mathcal{D}'$ läßt sich kein „vernünftiges" Produkt definieren.**
Die nächstbessere Alternative ist es, $\mathcal{D}'$ in eine assoziative Algebra $(\mathcal{A}, +, \circ)$ einzubetten. Als natürliche Anforderungen an eine derartige Einbettung stellen wir folgende Bedingungen:

(i) $\mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ injektiv, und: $f(x) \equiv 1 \in C^\infty(R) \subseteq \mathcal{D}'$ ist das Einselement der Algebra.

(ii) Es existiert eine Ableitung D auf $\mathcal{A}$ d. h. $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ linear und D erfüllt die Produktregel.

(iii) $D\,|_{\mathcal{D}'}$ ist die gewöhnliche Ableitung in $\mathcal{D}'$.

(iv) $\circ\,|_{C(R)\times C(R)}$ ist das übliche (punktweise) Produkt stetiger Funktionen.

Satz 1.19 „Unmöglichkeitsresultat" *(Schwartz 1954)*

Es existiert keine assoziative Algebra, die (i)-(iv) erfüllt.

Beweis. Angenommen, $\exists\mathcal{A}$ assoziativ, das (i)-(iv) erfüllt, so gilt nach (iv):

$$\begin{aligned} x_+ \circ x &= x_+^2 && (1)\\ x \circ (x \ln|x| - x) &= x^2 \ln|x| - x^2 && (2) \end{aligned}$$

Weiters erhalten wir:

$$D^2(x_+) \circ x \underbrace{=}_{\text{(ii)}} D^2(x_+ \circ x) - 2D(x_+) \circ \underbrace{D(x)}_{=1\text{ (iii)}} - x_+ \circ \underbrace{D^2(x)}_{=0\text{ (iii)}}$$

$$\underbrace{=}_{(1),(i)} D^2(x_+^2) - 2D(x_+) \underbrace{=}_{\text{(iii)}} 2D(x_+) - 2D(x_+) = 0 \qquad (*)$$

Außerdem:

$$x \circ D^2(x \ln|x| - x)$$

$$= D^2(x \circ (x \ln|x| - x)) - 2\underbrace{D(x)}_{1} D(x \ln|x| - x) - \underbrace{D^2(x)}_{0} \circ (x \ln|x| - x)$$

$$\underbrace{=}_{(2)} D^2(x^2 \ln|x| - x^2) - 2D(x \ln|x| - x)$$

$$= D(2x \ln|x| + \underbrace{x - 2x}_{-x}) - D(2x \ln|x| - 2x) = D(x) = 1 \qquad (**)$$

und wegen der Assoziativität von $\mathcal{A}$:

$$D^2(x_+) \underbrace{=}_{(**)} D^2(x_+) \circ (x \circ D^2(x \ln \mid x \mid -x))$$

$$= (D^2(x_+) \circ x) \circ D^2(x \ln \mid x \mid -x) \underbrace{=}_{(*)} 0$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn:

$$D^2(x_+) = D^2(x \circ H) = D((\underbrace{Dx}_{1}) \circ H + \underbrace{x \circ \delta}_{0}) = DH = \delta \neq 0 \qquad \Box$$

Dieses Resultat führte zu der Verbreitung der Ausage: ,,Distributionen können nicht multipliziert werden". Betrachtet man jedoch den Beweis genauer, so sieht man, daß keine spezifischen Eigenschaften der Distributionen in das Schwarz'sche ,,Unmöglichkeitsresultat" eingehen. Vielmehr führt die Wurzel des Widerspruchs zurück auf eine ,,Unverträglichkeit" von Multiplikation und Differentiation stetiger bzw. von C^1-Funktionen, wenn man gleichzeitig das Konzept einer δ-Funktion beibehalten will. Es genügt nämlich, im obigen Beweis anzunehmen, daß $C(R)$ eine Teilalgebra von $\mathcal{A}$ ist und die Ableitung die gewöhnliche auf $C^1(R)$ ist, um die Aussage $D^2(x_+) = 0$ herzuleiten.

So betrachtet, sagt der Schwartzsche Satz aus, daß eine Algebra, die $\mathcal{D}'$ enthält, nicht gleichzeitig die klassische Multiplikation stetiger Funktionen und die klassische Differentiation uneingeschränkt verallgemeinern kann. Es müssen also die Forderungen (i) bis (iv) abgeschwächt werden.

Bemerkung. Man kann assoziative und kommutative Algebren $\mathcal{G}$ konstruieren, die (i)-(iii) erfüllen und

(iv)' $\circ\,|_{C^\infty(R)\times C^\infty(R)}$ ist das übliche (punktweise) Produkt glatter Funktionen (J.F. Clombeau)

Im nächsten Kapitel werden wir explizit solche Algebren konstruieren. Wir können jetzt aber schon aus dem bisher Gesagten einige Folgerungen für $\mathcal{G}$ ableiten.

Satz 1.20 Folgerungen für $\mathcal{G}$.

1. *Bettet man $\mathcal{D}'$ in eine assoziative Algebra $\mathcal{G}$ ein, dann muß in $\mathcal{G}$ gelten: v.p.$(\frac{1}{x})\, x \neq 1$ oder $x\,\delta \neq 0$*

2. *Falls $\mathcal{G}$ kommutativ ist, muß gelten: $\eta^2 = \eta\,\eta \neq 1 \in \mathcal{G}$*

3. *Falls $\mathcal{G}$ assoziativ und kommutativ ist, dann gilt: $H^2 \neq H \in \mathcal{G}$*

Beweis. 1. und 2. folgen unmittelbar aus den obigen Rechnungen für 3. führen wir den Beweis indirekt. Sei $H^2 = H \in \mathcal{G}$ dann folgt:

$$\begin{aligned} D(H^2) &= DH \circ H + H \circ DH \;=\; 2H \circ DH && \text{(I)} \\ D(H^3) &= H \circ D(H^2) + D(H) \circ H^2 \\ &= 2H^2 \circ DH + H^2 \circ DH \\ &= 3H^2 \circ DH && \text{(II)} \end{aligned}$$

Nun ist: $H^2 = H \Rightarrow H^3 = H$, also gilt:

$$2H \circ DH \underbrace{=}_{\text{(I)}} D(H^2) = D(H^3) \underbrace{=}_{\text{(II)}} 3H \circ D(H) \Rightarrow H \circ DH = 0 \Rightarrow DH = 0$$

Widerspruch zu: $DH = \delta \neq 0$ $\square$

2 Colombeausche Theorie

2.1 Konstruktion von Algebren verallgemeinerter Funktionen (Colombeau-Algebren)

In diesem Kapitel werden wir nun explizit Algebren $\mathcal{G}$ konstruieren, die die Eigenschaften $(i) - (iv)'$ erfüllen. Die Konstruktion geht zurück auf Jean François Colombeau, der sie erstmals 1984 in seinem Buch ,,New Generalized Functions and Multiplication of Distributions" umfassend darstellte.
Die Theorie ist technisch aufwendig. Daher werden wir nicht die allgemeinsten Colombeau-Algebren behandeln, sondern uns auf eine vereinfachte Version der Theorie beschränken, die aber alle wesentlichen Züge der vollen Theorie umfaßt und für konkrete Rechnungen durch die größere Anschaulichkeit sogar Vorteile bietet.

Grundidee der Konstruktion ist es, eine geeignete Quotientenalgebra des Raumes $(C^\infty)^{(0,1)}$ zu finden und die Räume C^∞ und $\mathcal{D}$ (durch Faltung) in $\mathcal{G}$ einzubetten. Im Folgenden sei immer $\Omega \subseteq R^n$ offen. Wir definieren die folgenden Räume:

Definition 2.1

1.

$$\mathcal{E}(\Omega) := (C^\infty(\Omega))^I \textit{ wobei: } I = (0,1)$$

Die Elemente in $\mathcal{E}(\Omega)$ sind also (verallgemeinerte) Folgen von C^∞-Funktionen $(u_\epsilon)_{\epsilon\in I}$.

2.

$$\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{c} (u_\epsilon)_{\epsilon\in I} \in \mathcal{E}(\Omega) : \forall K \subseteq \Omega \textit{ kompakt, } \forall \alpha \in N_0^n \, \exists N > 0 \\ \textit{sodaß: } \sup\limits_{x\in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid = O(\epsilon^{-N}) \quad (\epsilon \to 0) \end{array} \right\}$$

d. h. $\forall K \subseteq \Omega$ *kompakt,* $\forall \alpha \in N_0^n \, \exists N(\alpha, K) > 0$, $\exists C(\alpha, K) > 0$ *und* $\exists \eta(\alpha, K) > 0$ *sodaß:* $\sup\limits_{x\in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid \leq C\,\epsilon^{-N}$ *wo:* $\epsilon \in (0, \eta)$

$\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$ enthält also alle Folgen $(u_\epsilon)_{\epsilon\in I} \in \mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$, die auf jedem fixen Kompaktum für $\epsilon \to 0$, gemeinsam mit allen ihren Ableitungen, gleichmäßig durch eine Potenz von $1/\epsilon$ beschränkt sind, d. h. die nicht zu schnell wachsen.

Die Räume $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$ werden zu Differential-Algebren vermöge:

$$\begin{aligned} (u_\epsilon)_{\epsilon\in I} \cdot (v_\epsilon)_{\epsilon\in I} &:= (u_\epsilon \cdot v_\epsilon)_{\epsilon\in I} \\ \partial^\alpha (u_\epsilon)_{\epsilon\in I} &:= (\partial^\alpha u_\epsilon)_{\epsilon\in I} \end{aligned}$$

Multiplikation und Differentiation sind also komponentenweise definiert.

3.

$$\mathcal{N}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{c} (u_\epsilon)_{\epsilon\in I} \in \mathcal{E}(\Omega):\ \forall K \subseteq \Omega \textit{ kompakt}, \forall\alpha \in N_0^n, \forall M > 0 \\ \textit{gilt: } \sup\limits_{x\in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid = O(\epsilon^M) \quad (\epsilon \to 0) \end{array} \right\}$$

d. h. $\forall K \subseteq \Omega$ *kompakt,* $\forall\alpha \in N_0^n, \forall M > 0$, $\exists C(\alpha, K, M) > 0$ *und* $\exists\eta(\alpha, K, M) > 0$ *sodaß* $: \sup\limits_{x\in K} \mid \partial^\alpha u_\epsilon(x) \mid \leq C\,\epsilon^M$ *wo:* $\epsilon \in (0, \eta)$

$\mathcal{N}(\Omega)$ enthält also alle $(u_\epsilon)_{\epsilon\in I} \in \mathcal{E}(\Omega)$, die auf jedem fixen Kompaktum für $\epsilon \to 0$, gemeinsam mit allen ihren Ableitungen, schneller fallen als jede Potenz von ϵ.

Beispiele:

1. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, $u_\epsilon(x) := \varphi(x - 1/\epsilon) \in \mathcal{N}(R)$ da für ϵ klein genug: $\partial^\alpha u_\epsilon(x) = \partial^\alpha \varphi(x - 1/\epsilon) = 0$
2. $e^{-1/\epsilon} \in \mathcal{N}(R)$

Satz 2.1 $\mathcal{N}(\Omega)$ *ist ein Ideal in* $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$ *(nicht aber in* $\mathcal{E}(\Omega)$ *).*

Beweis. Mit $(u_\epsilon)_\epsilon$ und $(v_\epsilon)_\epsilon$ ist auch $(u_\epsilon + v_\epsilon)_\epsilon$ in $\mathcal{N}(\Omega)$.
Sei $(\omega_\epsilon)_\epsilon = (u_\epsilon \cdot v_\epsilon)_\epsilon$ mit $(u_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$ und $(v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$; für $\alpha = 0 \Rightarrow$ $\mid \omega_\epsilon \mid \leq C_1\epsilon^M C_2 \epsilon^{-N}$ und für $\alpha \neq 0$ ist $\partial^\alpha\omega_\epsilon = \sum_{\text{endl.}} c_{\mu\nu}\partial^\mu u_\epsilon \partial^\nu v_\epsilon$ $\square$.

Definition 2.2 *Die* **Algebra der verallgemeinerten Funktionen** $\mathcal{G}(\boldsymbol{\Omega})$ *ist definiert durch:*

$$\mathcal{G}(\Omega) := \mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega) \,/\, \mathcal{N}(\Omega)$$

Wegen des vorigen Satzes ist $\mathcal{G}(\Omega)$ eine Differential-Algebra mit Ableitung ∂^α.

C^∞-Funktionen auf Ω können nun kanonisch als konstante Folgen in $\mathcal{G}(\Omega)$ eingebettet werden.

$$\begin{array}{rcl} \sigma: C^\infty(\Omega) & \hookrightarrow & \mathcal{G}(\Omega) \\ f & \mapsto & (f)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega) \end{array}$$

2.2 Einbettung von Distributionen in $\mathcal{G}(\Omega)$

Die Einbettung von Distributionen in $\mathcal{G}(\Omega)$ ist etwas aufwendiger. Sei zunächst $\rho \in \mathcal{S}(R^n)$ eine Schwartzsche Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (i) & \int_\Omega \rho(x)\,dx = 1 \\ (ii) & \int_\Omega x^\alpha \rho(x)\,dx = 0 \quad \forall \mid \alpha \mid \geq 1 \end{array}$$

So ein ρ existiert, denn $\int x^\alpha \rho(x)\,dx = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \hat{\rho}(0)$ (wobei $\hat{\rho}(t)$ die Fouriertransformierte von ρ ist); nun wählt man $\hat{\varphi}(t) \in \mathcal{S}$ derart, daß $\hat{\varphi}$ in einer Umgebung von 0 konstant den Wert 1 hat. (Die Fouriertransformierte einer Schwartzschen Funktion existiert und liegt in $\mathcal{S}$). Nun setzen wir:

$$\rho_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\,\rho(\frac{x}{\epsilon})$$

Ein solches ρ_ϵ (bzw. ρ) wird oft als **Mollifier** bezeichnet.
Unser Ziel ist es nun, die Einbettungsabbildung durch Faltung mit ρ_ϵ zu definieren; dies ist aber zunächst nur für $\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$ möglich, da die Faltung für Distributionen mit nicht kompaktem Träger nur mit $\varphi \in \mathcal{D}$, nicht jedoch mit $\varphi \in \mathcal{S}$ definiert ist. Andererseits existiert kein $\rho \in \mathcal{D}(R^n)$, das die Eigenschaft (ii) eines Mollifiers erfüllt (die Fouriertransformierte wäre ganz analytisch und da alle ihre Ableitungen im Nullpunkt verschwinden, wäre $\hat{\varphi} \equiv 1 \notin \mathcal{S} \supseteq \mathcal{D}$; das ist ein Widerspruch, da die Fouriertransformation nicht aus $\mathcal{S}$ herausführt). Um also $\mathcal{D}'(\Omega)$ in $\mathcal{G}(\Omega)$ einzubetten, müssen wir einen anderen Weg einschlagen und allgemeine Eigenschaften von $\mathcal{G}$ verwenden.
Zunächst aber wenden wir uns der (einfacheren) Einbettung $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{G}$ zu.

2.2.1 Einbettung von $\mathcal{E}'(\Omega)$ in $\mathcal{G}(\Omega)$

Satz 2.2 *und* **Definition.** *Sei $\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$, dann definiert die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \iota_0 : \mathcal{E}'(\Omega) & \hookrightarrow & \mathcal{G}(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (\omega * \rho_\epsilon\,|_\Omega)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega) \end{array}$$

eine (injektive) **Einbettung der Distributionen mit kompaktem Träger** *in die Algebra der verallgemeinerten Funktionen.*

Hierbei wird ω als Element von $\mathcal{E}'(R^n)$ aufgefaßt; $\omega * \rho_\epsilon$ ist dann Element von $C^\infty(R^n)$. Für den Beweis von Satz 2.2 benötigen wir folgendes Resultat aus der Theorie der Distributionen, das oft als **Struktursatz** bezeichnet wird.

Satz 2.3 *Jede Distribution $\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$ kann (nicht eindeutig) geschrieben werden als:*

$$\omega = \sum_{|\alpha| \leq r} \partial^\alpha f_\alpha$$

wobei die f_α stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind. Zusätzlich kann errreicht werden, daß für alle α $tr(f_\alpha)$in einer festen offenen Umgebung U von $tr(\omega)$ enthalten sind.

Beweis von Satz 2.2. Zunächst ist $(\omega * \rho_\epsilon)_{\epsilon \in I} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, denn sei o.B.d.A. $\omega = \partial^\alpha f$ mit $f \in C_0^0(\Omega)$ (sonst betrachte eine endliche Summe solcher Funktionen) dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\omega * \rho_\epsilon)\,(x) &= f * \partial^\alpha \rho_\epsilon(x) \\
&= \int_\Omega f(x-y)\partial^\alpha \rho_\epsilon(y)\,dy \\
&= \int f(x-y)\epsilon^{-n-|\alpha|}(\partial^\alpha \rho)\,(y/\epsilon)\,dy \\
&= \int \underbrace{f(x-\epsilon y)}_{\text{beschr. da stetig}} \epsilon^{-|\alpha|} \underbrace{\partial^\alpha \rho(y)}_{\text{integrabel}}\,dy \le C\epsilon^{-|\alpha|}
\end{aligned}$$

Weiters ist ι_0 injektiv (d. h. $\omega * \rho_\epsilon\,|_\Omega \in \mathcal{N}(\Omega) \Rightarrow \omega = 0$), denn sei: $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow \langle \omega * \rho_\epsilon\,|_\Omega, \varphi\rangle = \langle \omega * \rho_\epsilon, \varphi\rangle \to \langle \omega, \varphi\rangle \quad (\epsilon \to 0)$
Andererseits gilt laut Voraussetzung: $\langle \omega * \rho_\epsilon\,|_\Omega, \varphi\rangle \to 0$ □

Satz 2.4 $\iota_0\,|_{\mathcal{D}(\Omega)} = \sigma\,|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ *(wobei σ die kanonische Einbettung von C^∞-Funktionen ist: $\sigma(f) := (f)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega)$)*

Korollar. $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{G}(\Omega)$ ist eine **Teilalgebra**; d. h. $\iota_0(f\cdot g) = \iota_0(f)\cdot\iota_0(g)$

Denn für $f, g \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \iota_0(f\cdot g) = \sigma(f\cdot g) = \sigma(f)\cdot\sigma(g) = \iota_0(f)\cdot\iota_0(g)$.

Beweis von Satz 2.4. Der Einfachheit halber führen wir den Beweis für $\Omega = R$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(R)$; wir zeigen: $\varphi * \rho_\epsilon - \varphi \in \mathcal{N}(R)$ ($\Rightarrow \iota_0\,|_{\mathcal{D}(R)} = \sigma\,|_{\mathcal{D}(R)}$)

$$\begin{aligned}
\varphi * \rho_\epsilon - \varphi &= \int_R [\varphi(x-y) - \varphi(x)]\rho_\epsilon(y)\,dy \\
&= \int [\varphi(x-\epsilon y) - \varphi(x)]\,\rho(y)\,dy \\
&= \int [\sum_{k=1}^{m-1} \tfrac{(-\epsilon y)^k}{k!}\varphi^{(k)}(x)]\,\rho(y)\,dy && \text{(Taylorreihe)} \\
&\quad + \int [\tfrac{(-\epsilon y)^m}{m!}\varphi^{(m)}(x-\epsilon\zeta y)]\,\rho(y)\,dy && (0<\zeta<1) \\
&= 0 && (\rho \text{ ist Mollifier}) \\
&\quad + \epsilon^m \int \tfrac{(-y)^m}{m!} \underbrace{\varphi^{(m)}(x-\epsilon\zeta y)}_{\text{für } m \text{ fix } |\ | \le C\ (*)} \rho(y)\,dy \\
&= O(\epsilon^m) \qquad \forall m \in N
\end{aligned}$$

Die Abschätzung $(*)$ gilt gleichmäßig für $x \in R$, d. h. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R)$, $\forall m\, \exists C_m$: $\|\varphi^{(m)}\|_\infty \le C_m$. □

Wir haben also $\mathcal{E}'(\Omega)$ mittels Faltung mit ρ_ϵ in $\mathcal{G}(\Omega)$ eingebettet, sodaß $\mathcal{D}(\Omega)$ Teilalgebra wird. Nun wenden wir uns den Distributionen mit nicht kompaktem Träger zu.

2.2.2 Einbettung von $\mathcal{D}'(\Omega)$ in $\mathcal{G}(\Omega)$

Wie bereits angekündigt, benötigen wir für die Konstruktion der angestrebten Einbettungsabbildung ein allgemeines Resultat über die Algebra $\mathcal{G}(\Omega)$.

Zunächst ist für offene Mengen $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ die „Einschränkungsabbildung"

$$\begin{array}{rccl} R_{2,1}: & \mathcal{G}(\Omega_2) & \to & \mathcal{G}(\Omega_1) \\ & (u_\epsilon)_{\epsilon\in I} + \mathcal{N}(\Omega_2) & \mapsto & (u_\epsilon\,|_{\Omega_1})_{\epsilon\in I} + \mathcal{N}(\Omega_1) \end{array}$$

wohldefiniert uns stimmt auf $\mathcal{D}(\Omega_2)$ mit der gewöhnlichen Einschränkung überein. Dementsprechend schreiben wir auch $u\,|_{\Omega_1}$ statt $R_{2,1}(u)$.

Satz 2.5 **$\mathcal{G}(\boldsymbol{\Omega})$** *(genauer: Die Zuordnung: $\Omega' \mapsto \mathcal{G}(\Omega')$ $(\Omega' \subseteq \Omega$, offen) zusammen mit den Einschränkungsabbildungen $R_{2,1} : \mathcal{G}(\Omega_2) \to \mathcal{G}(\Omega_1)$ für $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega$)* **ist eine Garbe**.
Das heißt:

1. *Für $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3 \subseteq \Omega$ (alle offen) gilt:*

$$R_{2,1} \circ R_{3,2} = R_{3,1}$$

2. *Für jede offene Überdeckung $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Ω gilt:*

   (a) *Ist $f\,|_{\Omega_\lambda} = g\,|_{\Omega_\lambda}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ $(f, g \in \mathcal{G}(\Omega))$, so folgt:*

$$f = g$$

   (b) *Sei $f_\lambda \in \mathcal{G}(\Omega_\lambda)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ derart, daß für alle λ, μ mit $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$ gilt:*

$$f_\lambda\,|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu} = f_\mu\,|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$$

   Dann existiert genau ein $f \in \mathcal{G}(\Omega)$ mit:

$$f\,|_{\Omega_\lambda} = f_\lambda \ \text{ für alle } \lambda \in \Lambda$$

Die Tatsache, daß $\mathcal{G}(\Omega)$ die Garbeneigenschaften erfüllt kann als eine Art „Verträglichkeit" der Differentialalgebra $\mathcal{G}(\Omega)$ mit Einschränkungsabbildungen gesehen weden; in diesem Sinne eine natürliche Eigenschaft, die für den weiteren Ausbau der Theorie unerläßlich ist.
Das hohe Abstraktionsniveau bereitet im Beweis jedoch einige Schwierigkeiten.

Beweis

1. ist klar.

2. (a) Seien $f, g \in \mathcal{G}(\Omega)$. Zu zeigen ist: Falls $f\ |_{\Omega_\lambda} = g\ |_{\Omega_\lambda}\ \ \forall \lambda \in \Lambda$, dann ist $f - g \in \mathcal{N}(\Omega)$. Sei dazu $K \subseteq \Omega$, K kompakt. Dann läßt sich zeigen, daß kompakte Mengen $K_1, \ldots, K_n$ existieren mit $K = \bigcup_{k=1}^n K_k$ und $K_k \subseteq \Omega_{\lambda(k)}$ für geeignete $\lambda(k)$. Für $(f-g)\ |_{\Omega_{\lambda(k)}}$ gilt die Nulleigenschaft:

$$(f-g)_\epsilon\ |_{K_k} = O(\epsilon^M) \quad \forall M$$

und somit auch auf der endlichen Vereinigung.

(b) Seien $f_\lambda, f_\mu \in \mathcal{G}(\Omega_\lambda)$ bzw. $\mathcal{G}(\Omega_\mu)$; zu zeigen ist:

$$f_\lambda\ |_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} = f_\mu\ |_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu}\ \ \forall \lambda, \mu \Rightarrow \exists! f \in \mathcal{G}(\Omega) \text{ mit } f\ |_{\Omega_\lambda} = f_\lambda$$

Die Eindeutigkeit folgt aus 2. (a). Wir zeigen die Existenz. Sei dazu $(\chi_j)_{j\in N}$ eine der Überdeckung $(\Omega_\lambda)_\lambda$ untergeordnete C^∞-Zerlegung der Eins (d.h. $\chi_j : \Omega \to [0,1]$, $\chi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{tr}(\chi_j) \subseteq \Omega_{\lambda_j}$ für passendes λ_j; das System $\{\operatorname{tr}(\chi_j)\}_j$ ist lokalendlich und für jedes $x \in \Omega$ ist $\sum_{j\in N} \chi_j(x) = 1$. Notwendigerweise überdecken die (Ω_{λ_j}) dann Ω.) Wir definieren:

$$f := \Big(\sum_{j \in N} \chi_j\, f_{\lambda_j \epsilon} \Big)_{\epsilon \in I} + \mathcal{N}(\Omega)$$

wobei $(f_{\lambda_j \epsilon})_\epsilon$ ein Repräsentant von f_{λ_j} und die $f_{\lambda_j \epsilon}$ außerhalb von Ω_{λ_j} mit 0 fortgesetzt zu denken sind. $\chi_j f_{\lambda_j}$ ist dann C^∞ auf ganz Ω. Dann ist $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, denn sei $K \subseteq \Omega$ kompakt, so wird K von nur endlich vielen Ω_{λ_j} überdeckt, und die Abschätzung geht analog zu 2. (a) aus den einzelnen Abschätzungen hervor.

Es bleibt also nur noch zu zeigen: $f\ |_{\Omega_\lambda} = f_\lambda$. Sei $\lambda \in \Lambda$, $K \subseteq \Omega_\lambda$ kompakt und M so gewählt, daß auf einer offenen Umgebung von K gilt: $\sum_{j=1}^M \chi_j(x) \equiv 1$. Ist nun $x \in K$, so gilt:

$$\begin{aligned} f(x) - f_\lambda(x) &= \Big(\sum_{j=1}^M \chi_j f_{\lambda_j \epsilon}(x) - f_{\lambda \epsilon}(x) \Big)_\epsilon \\ &= \Big(\sum_{j=1}^M \chi_j(x) \left(f_{\lambda_j \epsilon}(x) - f_{\lambda \epsilon}(x) \right) \Big)_\epsilon \end{aligned}$$

Für $x \in \Omega_{\lambda_j} \cap K$ liefert die Voraussetzung eine gleichmäßige Abschätzung für $f_{\lambda_j \epsilon}(x) - f_{\lambda\, \epsilon}(x)$. Für $x \in K \setminus \Omega_{\lambda_j}$ hingegen ist $\chi_j(x) = 0$. Da die Summe endlich ist, erhalten wir eine Abschätzung für $f(x) - f_\lambda(x)$ auf K. Für die Abschätzungen der Ableitungen von $f - f_\lambda$ schachtelt man zwischen K und Ω_λ noch eine relativkompakte Umgebung von K, deren Abschluß in Ω_λ liegt und geht dann analog vor. $\square$

Den letzten Baustein zur Konstruktion der Einbettung $\mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ liefert der nächste Satz. Zunächst benötigen wir jedoch folgende Definition.

Definition 2.3 *Sei $u \in \mathcal{G}(\Omega)$, dann ist der* **Träger von u** *definiert als:*

$$tr(u) := \left(\bigcup\{\Omega' \subseteq \Omega : u\,|_{\Omega'} = 0\}\right)^c$$

Satz 2.6 *Sei $\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$ dann gilt:*

$$tr(\omega) = tr(\iota_0(\omega))$$

(wobei $\iota_0 : \mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ wie im vorigen Abschnitt)

Beweis. Der Einfachheit halber setzen wir $\Omega = R$ und zeigen zunächst $\mathrm{tr}(\iota_0(\omega)) \subseteq \mathrm{tr}(\omega)$. Also ist zu zeigen:

$$\iota_0(\omega)\,|_{\mathrm{tr}(\omega)^c} = 0 \quad \text{in } \mathcal{G}\left(\mathrm{tr}(\omega)^c\right)$$

Sei $K \subseteq \mathrm{tr}(\omega)^c$ kompakt. Nach dem Struktursatz kann ω o.B.d.A. geschrieben werden als $\omega = \partial^\alpha f$ mit $\alpha \in N$ und $\mathrm{tr}(f) \subset R \setminus K$. Ein Repräsentant von $\iota_0(\omega)$ ist dann gegeben durch: $(f * \partial^\alpha \rho_\epsilon)_{\epsilon \in I}$. Nun gilt für $x \in K$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\partial^\alpha \rho_\epsilon(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^{-\alpha} f(x-\epsilon y)\partial^\alpha \rho(y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_{-1/\sqrt{\epsilon}}^{1/\sqrt{\epsilon}} \epsilon^{-\alpha} f(x-\epsilon y)\partial^\alpha \rho(y)\,dy}_{\substack{= 0 \text{ für } \epsilon \text{ klein genug, weil} \\ \text{dann außerhalb } \mathrm{tr}(f)}} + \underbrace{\int_{|y|\geq 1/\sqrt{\epsilon}} \epsilon^{-\alpha} f(x-\epsilon y)\partial^\alpha \rho(y)\,dy}_{|\quad| \leq \|f\|_\infty \epsilon^{-\alpha} \int |\partial^\alpha \rho(y)|\,dy}$$

Da $\rho \in \mathcal{S}$ ist existiert zu jedem $p \in N$ eine positive Konstante c_p mit $|\partial^\alpha \rho(y)| \leq c_p/(1+|y|)^p$. Durch Integration ergibt sich:

$$\int_{|y|\geq 1/\sqrt{\epsilon}} |\partial^\alpha \rho(y)|\,dy \leq \frac{2c_p}{p}\frac{1}{(1+1/\sqrt{\epsilon})^p} \leq \frac{2c_p}{p}\epsilon^{p/2}$$

Somit geht auch der zweite Term stärker gegen null als jede positive Potenz von ϵ.
Andererseits gilt: $\mathrm{tr}(\omega) \subseteq \mathrm{tr}(\iota_0(\omega))$, denn sei $x \in \mathrm{tr}(\omega)$ dann gilt: $\forall \eta > 0\, \exists \varphi \in \mathcal{D}(R)$ mit $\mathrm{tr}(\varphi) \subseteq (x-\eta, x+\eta)$ und $\langle \omega, \varphi \rangle = \alpha > 0$. Nun gilt $\omega * \rho_\epsilon \to \omega$ und somit $\langle \omega * \rho_\epsilon, \varphi \rangle \geq \alpha/2$ (für ϵ klein genug). Also folgt: $\omega * \rho_\epsilon\,|_{(x-\eta,x+\eta)} \notin \mathcal{N}((x-\eta, x+\eta))$ und daher $x \in \mathrm{tr}(\iota_0(\omega))$. $\square$

Nun können wir darangehen, die Einbettungsabbildung $\iota : \mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ zu definieren. Sei $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von Ω derart, daß alle $\bar{\Omega}_\lambda$ kompakte Teilmengen von Ω sind. Weiters seien $\psi_\lambda \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi_\lambda \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\bar{\Omega}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. Wir definieren die Abbildungen:

$$\begin{array}{rcl} \iota_\lambda : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{G}(\Omega_\lambda) \\ \omega & \mapsto & \iota_\lambda(\omega) := \Big(((\psi_\lambda \omega) * \rho_\epsilon) \,|_{\Omega_\lambda} \Big)_{\epsilon \in I} + \mathcal{N}(\Omega_\lambda) \quad (\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)) \end{array}$$

Die Distribution ω, die i.a. keinen kompakten Träger hat, wird also „gewaltsam" durch Multiplikation mit ψ_λ zur Distribution $\psi_\lambda \omega \in \mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{E}'(R^n)$ gemacht und dabei jeweils auf einer offenen Umgebung von $\bar{\Omega}_\lambda$ nicht verändert. Unser Ziel ist es nun, die Definition der Einbettungsabbildungen mittels der Garbeneigenschaften auf $\mathcal{G}(\Omega)$ „zu liften".
Als Voraussetzung dafür zeigen wir zunächst den folgenden Satz.

Satz 2.7 *Seien $(\Omega_\lambda)_\lambda$ und $(\psi_\lambda)_\lambda$ wie oben und sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dann gilt:*

$$i_\lambda(\omega)\,|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} = i_\mu(\omega)\,|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} \qquad \textit{in } \mathcal{G}(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)\ (\lambda, \mu \in \Lambda)$$

Beweis. Es ist zu zeigen: $\Big(((\psi_\lambda - \psi_\mu)\,\omega) * \rho_\epsilon \,|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} \Big)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)$. Sei $v := (\psi_\lambda - \psi_\mu)\,\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Es gilt: $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \subseteq \mathrm{tr}(v)^c$ denn auf $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$ gilt: $\psi_\lambda = \psi_\mu = 1$. Nach Satz 2.6 ist $\mathrm{tr}(v)^c = \mathrm{tr}(\iota_0(v))^c$; daher ist $\iota_0(v)\,|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} \in \mathcal{N}(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)$ und das war die Behauptung. $\square$

Aus der Garbeneigenschaft Nr. 3 folgt nun:

$$\exists! \quad \iota(\omega) \in \mathcal{G}(\Omega) \text{ mit: } \iota(\omega)\,|_{\Omega_\lambda} = \iota_\lambda(\omega) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Aus dem Beweis der 3. Garbeneigenschaft wissen wir sogar, wie $\iota(\omega)$ aussieht: Sei nämlich $(\chi_j)_{j\in N}$ eine den $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ untergeordnete C^∞-Partition der Eins $(\mathrm{tr}(\chi_j) \subseteq \Omega_{\lambda_j})$, so können wir nun schlußendlich definieren:

Satz 2.8 *und* **Definition.** *Sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so definiert die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathcal{D}'(\Omega) & \hookrightarrow & \mathcal{G}(\Omega) \\ \omega & \mapsto & \iota(\omega) := \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_j \left((\psi_{\lambda_j} \omega) * \rho_\epsilon \right) \right)_{\epsilon \in I} + \mathcal{N}(\Omega) \end{array}$$

eine lineare (injektive) **Einbettung der Distributionen auf Ω in die Algebra der verallgemeinerten Funktionen auf Ω**.

Beweis. Nur mehr die Injektivität ist zu zeigen; d. h. für $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\iota(\omega) \in \mathcal{N}(\Omega)$ ist zu zeigen:

$$\langle \omega, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Sei also $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ beliebig und sei $K :=\text{tr}(\varphi)$, dann $\exists M$, sodaß $K = \bigcup_{j=1}^{M} K_j$ wo $K_j \subseteq \Omega_{\lambda_j}$ und $\sum_{j=1}^{M} \chi_j = 1$ auf K, und daher:

$$\langle \omega, \varphi \rangle = \langle \omega, \sum_{j=1}^{M} \chi_j \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{M} \langle \chi_j \psi_{\lambda_j} \omega, \varphi \rangle$$

Aus $\iota(\omega) \mid_{\Omega_{\lambda_j}} - \iota_{\lambda_j}(\omega) \in \mathcal{N}(\Omega_{\lambda_j})$ folgt: $[\, \iota(\omega)_\epsilon - (\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon] \to 0$ glm auf K_j. Nach Voraussetzung gilt aber $\iota(\omega)_\epsilon \to 0$ gleichmäßig auf K_j.
Also erhalten wir insgesamt: $(\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon \to 0$ gleichmäßig auf K_j und schließlich:

$$\langle \chi_j \underbrace{(\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon}_{\to \psi_{\lambda_j}\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)}, \varphi \rangle \to 0$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Nun zeigen wir, daß die eben definierte Einbettung auf den Distributionen mit kompaktem Träger mit der früher definierten Einbettung ι_0 übereinstimmt.

Satz 2.9 $\iota \mid_{\mathcal{E}'(\Omega)} = \iota_0$

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Wegen der Garbeneigenschaft Nr.3 genügt es zu zeigen:

$$\iota_0(\omega) \mid_{\Omega_\lambda} = \iota(\omega) \mid_{\Omega_\lambda} \equiv \iota_\lambda(\omega) \ \forall \lambda$$

Es gilt $\iota_0(\omega) \mid_{\Omega_\lambda} - \iota_\lambda(\omega) = (\,(\,(1-\psi_\lambda)\,\omega) * \rho_\epsilon \mid_{\Omega_\lambda})_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda) = \iota_0(v) \mid_{\Omega_\lambda}$ wobei $v := (1-\psi_\lambda)\,\omega \in \mathcal{E}'(\Omega)$ ist. Aber $\Omega_\lambda \subseteq \text{tr}(v)^c = \text{tr}(\iota_0(v)\,)^c$. $\square$

Analog zu früher gilt der Satz:

Satz 2.10 $\iota \mid_{C^\infty(\Omega)} = \sigma$, *wobei σ die kanonische Einbettung der C^∞-Funktionen als konstante Folgen bezeichnet.*

Beweis. Sei $f \in C^\infty(\Omega)$; es genügt wiederum zu zeigen:

$$\sigma(f) \mid_{\Omega_\lambda} = \iota_\lambda(f) \quad \forall \lambda$$

Sei $K \subseteq \Omega_\lambda$ kompakt. Nach Definition der ψ_λ gilt $\psi_\lambda f = f$ auf einer Umgebung von $\bar{\Omega}_\lambda$ und $\psi_\lambda f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wegen Satz 2.4 gilt:

$$\iota_0(\psi_\lambda f) - \sigma(\psi_\lambda f) = (\,(\psi_\lambda f) * \rho_\epsilon)_\epsilon - (\psi_\lambda f)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega)$$

Auf $K \subseteq \Omega_\lambda$ ergibt das die Behauptung. $\square$

Wir haben also $\mathcal{D}'(\Omega)$ in $\mathcal{G}(\Omega)$ mit Teilalgebra $C^\infty(\Omega)$ eingebettet.

Für praktische Rechnungen erweist sich folgender Satz als sehr hilfreich.

Satz 2.11 *Sei $f : \Omega \to R$ stetig und höchstens polynomial wachsend (d. h. $| f(x) | \leq C(1 + \|x\|)^r$ $\forall x$ und ein $r \in N$). Setzt man f durch 0 auf ganz R^n fort (F_f ist dann reguläre temperierte Distribution), so gilt:*

$$\iota(f) \;=\; (f * \rho_\epsilon \mid_\Omega)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega)$$

Also ist die Einbettung von solchen f wie für Distributionen mit kompaktem Träger gegeben und man muß nicht auf die Zerlegungen der Eins und die ι_λ zurückgreifen.

Beweis. Zunächst ist $(f * \rho_\epsilon \mid_\Omega)_\epsilon \in \mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$, denn es gilt:

$$| f * \rho_\epsilon(x) | = | \int f(x - \epsilon y)\rho(y)\, dy | \leq C \int (1 + \|x - \epsilon y\|)^r \;\; | \rho(y) | \;\; dy$$

Der letzte Ausdruck ist für $x \in K$ wegen $\rho \in \mathcal{S}$ und $\epsilon < 1$ durch eine von x unabhängige Konstante beschränkt. (Analog für höhere Ableitungen)
Weiters genügt es zu zeigen:

$$\iota_\lambda(f) \;=\; (f * \rho_\epsilon \mid_{\Omega_\lambda})_\epsilon \text{ in } \mathcal{G}(\Omega_\lambda) \; \forall \lambda$$

Sei $K \subseteq \Omega_\lambda$ kompakt, dann gilt für $x \in K$:

$$\iota_\lambda(f)\,(x) - f * \rho_\epsilon(x) = (\,(\psi_\lambda - 1)\,f) * \rho_\epsilon(x)$$

$$\underbrace{\int\limits_{|y|\leq 1/\sqrt{\epsilon}} ((\psi_\lambda - 1)f)\,(x - \epsilon y)\rho(y)\,dy}_{=0 \text{ für } \epsilon \text{ klein genug}}$$

$$+ \int\limits_{|y|\geq 1/\sqrt{\epsilon}} \underbrace{\Big(\psi_\lambda - 1\Big)(x - \epsilon y)}_{|\quad| \leq 1} \quad | \quad \underbrace{f(x - \epsilon y)}_{| \leq C(1+\|x-\epsilon y\|)^r} \quad \underbrace{\rho(y)}_{\in \mathcal{S}}\, dy$$

Analoge Abschätzungen gelten auch für die Ableitungen. $\square$

Beispiel Für die Heaviside-Distribution H kann $\iota(H)$ wie folgt berechnet werden: Sei χ_1, χ_2 eine der Überdeckung $\{(-2, 2), (-\infty, -1) \cup (1, \infty)\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins; sei $H_i = H\chi_i$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $H_1 \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $H_2 \in C^\infty(\Omega)$ und beschränkt. Folglich ist $\iota(H_1) = \iota_o(H_1) = (H_1 * \rho_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(R)$, $\iota(H_2) = (H_2 * \rho_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(R)$ nach Satz 2.11. Insgesamt ergib sich $H_1 * \rho_\epsilon + H_2 * \rho_\epsilon = H * \rho_\epsilon$ als Repräsentant von $\iota(H)$.

2.3 Eindeutigkeit der Konstruktion - kurzer Abriß der vollen Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir der Frage nach der Eindeutigkeit der Konstruktion der Algebra $\mathcal{G}(\Omega)$ und vor allem der Einbettungsabbildungen nachgehen. Dabei werden wir zur Formulierung der vollen Colombeau-Theorie geführt, die wir kurz darstellen. Zunächst gilt der folgende Satz:

Satz 2.12 *Die im vorigen Abschnitt definierte Einbettungsabbildung $\iota : \mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der $(\Omega_\lambda)_\lambda$ und der $(\psi_\lambda)_\lambda$. Überdies ist sie wegen der Garbeneigenschaften auch von der in der Konstruktion verwendeten Zerlegung der Eins (also von den $(\chi_j)_j$) unabhängig.*

Beweis. Sei $\tilde{\iota}$ eine mittels $(\tilde{\Omega}_\mu)_\mu$ und der $(\tilde{\psi}_\mu)_\mu$ konstruierte weitere Einbettung und sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Wegen der Garbeneigenschaften genügt es zu zeigen:

$$\iota(\omega) \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu} = \tilde{\iota}(\omega) \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu} \quad \forall \lambda, \mu$$

Denn die $U_{\lambda\mu} := \Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu$ bilden eine offene Überdeckung von Ω. Es gilt aber: $\iota(\omega) \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu} = \iota(\omega) \mid_{\Omega_\lambda} \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu} = \iota_\lambda(\omega) \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu}$ und die Behauptung folgt aus: $\iota_\lambda \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu} = \tilde{\iota}_\mu \mid_{\Omega_\lambda \cap \tilde{\Omega}_\mu}$. Dies haben wir aber bereits in Satz 2.7 gezeigt. □

Im nächsten Satz klären wir die Abhängigkeit bzw. das Verhältnis der Konstruktion der Einbettungsabbildung zur offenen Menge $\Omega \subseteq R^n$. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $\hat{\iota}$ die Gesamtheit aller Einbettungen $\iota = \iota_\Omega : \mathcal{D}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$.
Unter Zuhilfenahme einer Zerlegung der Eins läßt sich leicht zeigen, daß $\mathcal{D}'(\Omega)$ (genauer: $\Omega \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$) ebenfalls eine Garbe darstellt.

Satz 2.13 *$\hat{\iota}$ ist ein* **Garbenmorphismus**,
d. h. für beliebige, offene $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \subseteq R^n$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega_1) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega_2) \\ \iota_{\Omega_1} \downarrow & & \downarrow \iota_{\Omega_2} \\ \mathcal{G}(\Omega_1) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\Omega_2) \end{array}$$

wobei die waagrechten Pfeile die jeweiligen Einschränkungsabbildungen bezeichnen.
Für $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ gilt also: $\iota_{\Omega_1}(\omega) \mid_{\Omega_2} = \iota_{\Omega_2}(\omega \mid_{\Omega_2})$

Die Konstruktion von $\hat{\iota}$ besitzt also die als „Natürlichkeit" bezeichnete Eigenschaft, mit Einschränkungsabbildungen zu kommutieren.

Beweis. Sei $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \subseteq R$. Man wähle eine Überdeckung $(\Omega_\lambda)_\lambda$ und $(\psi_\lambda)_\lambda$ wie oben für Ω_2. Sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$. Wir setzen die $\psi_\lambda \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ mit 0 zu Funktionen aus $\mathcal{D}(\Omega_1)$ fort; damit ist $\iota_{\lambda\,\Omega_1}$ mittels ψ_λ definierbar. Wegen der Garbeneigenschaften genügt es zu zeigen:

$$\begin{array}{ccc}
(\iota_{\Omega_1}(\omega)\,|_{\Omega_2})\,|_{\Omega_\lambda} & = & (\iota_{\Omega_2}(\omega\,|_{\Omega_2}))\,|_{\Omega_\lambda} \qquad \forall\lambda \\
\| & & \| \\
\iota_{\Omega_1}(\omega)\,|_{\Omega_\lambda} & & \iota_{\lambda\,\Omega_2}(\omega\,|_{\Omega_2}) \\
\| & & \| \\
\iota_{\lambda\,\Omega_1}(\omega) & & ((\psi_\lambda\omega\,|_{\Omega_2}) * \rho_\epsilon\,|_{\Omega_\lambda})_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda) \\
\| & & \| \\
((\psi_\lambda\omega) * \rho_\epsilon\,|_{\Omega_\lambda})_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda) & & ((\psi_\lambda\omega) * \rho_\epsilon\,|_{\Omega_\lambda})_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega_\lambda)
\end{array}$$

□

Satz 2.14 *$\hat{\iota} : \mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{G}$ ist der einzige Garbenmorphismus mit der Eigenschaft:*

$$\iota_\Omega\,|_{\mathcal{E}'(\Omega)} = \iota_{0\,\Omega} \qquad \forall\Omega \subseteq R^n \text{ offen}$$

(wobei: $\iota_{0\,\Omega} : \mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}(\Omega)$ wie früher)

Beweis. Sei $\hat{\kappa} : \mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{G}$ ein weiterer solcher und sei $\Omega_1 \subseteq \Omega \subseteq R^n$ offen, Ω_1 relativ kompakt und $\bar{\Omega}_1 \subseteq \Omega$. Sei weiters $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\psi\,|_{\Omega_1} = 1$ und sei $w \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Weil $\hat{\kappa}$ ein Garbenmorphismus ist, gilt:

$$\kappa_\Omega(\omega)\,|_{\Omega_1} = \kappa_{\Omega_1}(\omega\,|_{\Omega_1}) = \kappa_{\Omega_1}(\psi\omega\,|_{\Omega_1}) = \kappa_\Omega\,\underbrace{(\psi\omega)}_{\in\mathcal{E}'(\Omega)}\,|_{\Omega_1} = \iota_{0\,\Omega}(\psi\omega)\,|_{\Omega_1}$$

Ebenso gilt: $\iota_\Omega(\omega)\,|_{\Omega_1} = \iota_{0\,\Omega}(\psi\omega)\,|_{\Omega_1}$.
Also: $\kappa_\Omega(\omega)\,|_{\Omega_1} = \iota_\Omega(\omega)\,|_{\Omega_1}$ $\forall\Omega_1 \subseteq \Omega$ relativ kompakt; diese bilden aber eine offene Überdeckung von Ω. Mit den Garbeneigenschaften folgt $\hat{\kappa} = \hat{\iota}$. □

Zusammengefaßt ergibt sich nun, daß die so konstruierte Einbettung in die Algebra der verallgemeinerten Funktionen die einzig mögliche, mit Einschränkungen verträgliche ist, wenn man Distributionen mit kompaktem Träger durch Faltung mit dem gegebenen Mollifier ρ_ϵ einbetten will. Also bleibt als einzige Abhängigkeit von $\hat{\iota}$ die vom gewählten Mollifier ρ_ϵ; d. h. von der Regularisierung.
In der sogenannten „vollen" Version der Colombeauschen Theorie wird diese Abhängigkeit dadurch vermieden, daß die Elemente in $\mathcal{G}$ statt mit $\epsilon \in (0,1)$ mit einer geeigneteten Familie von Mollifiern ρ indiziert werden, also alle „möglichen" Mollifier in die Konstruktion mit eingehen. Um diese Idee konkreter darzustellen, geben wir zum Abschluß dieses Abschnitts die Definition der vollen Colombeau-Algebra. Die oben abgeleitete Theorie bezeichnen wir ab jetzt als die „vereinfachte" Version.

Definition 2.4

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{\rho \in \mathcal{D}(R^n) : \textstyle\int \rho(x)\,dx = 1\} \\ \mathcal{A}_q &:= \{\rho \in \mathcal{A}_0 : \textstyle\int x^\alpha \rho(x)\,dx = 0 \ \forall\alpha \ \textit{mit: } 1 \leq |\alpha| \leq q\} \qquad (q \in N) \\ \rho_\epsilon(x) &:= (1/\epsilon^n)\,\rho(x/\epsilon) \end{aligned}$$

Es gilt nun: $\mathcal{A}_q \neq \emptyset\, \forall q$, $\mathcal{A}_{q+1} \subseteq \mathcal{A}_q$ für alle q und: $\bigcap_{q\in N} \mathcal{A}_q = \emptyset$. (Beweise siehe z. B: Oberguggenberger [45] p. 83)

Definition 2.5

1.

$$\mathcal{E}(\Omega) := (C^\infty(\Omega))^{\mathcal{A}_0} = \{(u(\rho))_{\rho\in\mathcal{A}_0}\}$$

2.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{c} (u(\rho))_\rho \in \mathcal{E}(\Omega) : \forall K \subseteq \Omega \textit{ kompakt}, \forall\alpha \in N_0^n\ \exists N \in N \\ \textit{sodaß: } \forall\rho \in \mathcal{A}_N\ \exists C(\rho) > 0,\ \exists\eta(\rho) > 0 : \\ \sup\limits_{x\in K} |\, \partial^\alpha u(\rho_\epsilon)(x) \,| \leq C(\rho)\epsilon^{-N} \quad (0 < \epsilon < \eta) \end{array} \right\}$$

3.

$$\mathcal{N}(\Omega) := \left\{ \begin{array}{c} (u(\rho))_\rho \in \mathcal{E}(\Omega) : \forall K \subseteq \Omega \textit{ kompakt}, \forall\alpha \in N_0^n\ \exists N \in N \\ \textit{sodaß}: \forall M \geq N\ \forall\rho \in \mathcal{A}_M\ \exists C(\rho) > 0,\ \exists\eta(\rho) > 0 : \\ \sup\limits_{x\in K} |\, \partial^\alpha u(\rho_\epsilon)(x) \,| \leq C(\rho)\epsilon^{M-N} \quad (0 < \epsilon < \eta) \end{array} \right\}$$

4. Die **Algebra der verallgemeinerten Funktionen** *ist wieder definiert durch:*

$$\mathcal{G}(\Omega) := \mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\Omega) \,/\, \mathcal{N}(\Omega)$$

Ein großer Vorteil dieser Formulierung ist es, daß die Einbettung $\mathcal{D}'(R^n) \hookrightarrow \mathcal{G}(R^n)$ kanonisch gegeben ist durch: $\omega \mapsto (\omega * \rho)_{\rho\in\mathcal{A}_0} + \mathcal{N}(R^n)$ (Hier ist im Unterschied zur speziellen Version der Theorie der Mollifier aus $\mathcal{D}(R^n)$!)
Um aber $\mathcal{D}'(\Omega)$ einzubetten, muß wiederum der Umweg über $\mathcal{E}'(\Omega)$ gegangen werden, da $\omega * \rho$ für $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i. a. nicht definiert ist; $\mathcal{D}'(\Omega)$ kann ja nicht kanonisch in $\mathcal{D}'(R^n)$ eingebettet werden (im Gegensatz zu $\mathcal{E}'(\Omega)$).

Im Folgenden verwenden wir stets die vereinfachte Version der Theorie, wenn auch alle Resultate mit analogen Beweisen in der vollen Theorie gelten.

2.4 Punktwerte verallgemeinerter Funktionen - verallgemeinerte Zahlen

Sei $u = (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega) \in \mathcal{G}(\Omega)$ und $x_0 \in \Omega$. Wir stellen uns nun die Frage nach dem ,,Punktwert" der verallgemeinerten Funktion u in x_0. Natürlich ist $(u_\epsilon(x_0))_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega)$ keine Zahl, sondern eine (verallgemeinerte) Folge. Wir definieren also den ,,natürlichen" Begriffsrahmen für Punktwerte verallgemeinerter Funktionen wie folgt.

Definition 2.6

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & := & \{ (r_\epsilon)_{\epsilon \in I} \in C^I : \exists N > 0 \textit{ sodaß: } | r_\epsilon | = O(\epsilon^{-N}) \quad (\epsilon \to 0) \} \\ \mathcal{N} & := & \{ (r_\epsilon)_{\epsilon \in I} \in C^I : \forall M > 0 \textit{ gilt: } | r_\epsilon | = O(\epsilon^{M}) \quad (\epsilon \to 0) \} \end{array}$$

Der **Ring der verallgemeinerten Zahlen** $\bar{C}$ *ist definiert als:*

$$\bar{C} := \mathcal{E} / \mathcal{N}$$

Offenbar ist $\mathcal{E}$ Teilring von $\mathcal{G}(\Omega)$ und es gilt $\mathcal{N} = \bar{C} \cap \mathcal{N}(\Omega)$.
Analog zu den C^∞-Funktionen in $\mathcal{G}(\Omega)$ kann $r \in C$ kanonisch in $\bar{C}$ eingebettet werden:

$$\begin{array}{rcl} \sigma : C & \hookrightarrow & \bar{C} \\ r & \mapsto & (r)_\epsilon + \mathcal{N} \end{array}$$

Zunächst könnte man vermuten, daß $\bar{C}$ mehr als ein Ring ist, aber es gilt:

Satz 2.15 *$\bar{C}$ ist kein Körper.*

Beweis. Sei $r_\epsilon := \begin{cases} 0 & \epsilon = 1/n \text{ mit } n \in N \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow (r_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{E}$ aber $\notin \mathcal{N}$ also: $(r_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N} \neq 0 \in \bar{C}$
Es existiert aber kein inverses Element zu r_ϵ, denn angenommen s_ϵ sei ein solches $\Rightarrow (r\,s)_\epsilon + n_\epsilon = 1$ $(n_\epsilon \in \mathcal{N})$ und für $\epsilon = 1/n \Rightarrow r_\epsilon = 0 \Rightarrow n_\epsilon = 1$ Widerspruch. $\square$

Nun sind wir in der Lage, Punktwerte für verallgemeinerte Funktionen zu definieren.

Definition 2.7 *Sei $u \in \mathcal{G}(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$. Der* **Punktwert von u in $\mathbf{x_0}$** *ist definiert durch:*

$$u(x_0) := (u_\epsilon(x_0))_\epsilon + \mathcal{N} \in \bar{C}$$

für einen beliebigen Repräsententen $(u_\epsilon)_\epsilon$ von u.

Die Wohldefiniertheit ist aufgrund der Konstruktion von $\bar{C}$ garantiert. (Sei $(u_\epsilon)_\epsilon - (v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega) \Rightarrow (u_\epsilon(x_0) - v_\epsilon(x_0))_\epsilon \in \mathcal{N}$.) Der folgende Satz zeigt, daß $\bar{C}$ genau die ,,Konstanten" im Sinne der Differentialrechnung in $\mathcal{G}(\Omega)$ sind.

Satz 2.16 *Sei $u \in \mathcal{G}(a,b)$. Es gilt:*

$$\partial_x u = 0 \in \mathcal{G}(a,b) \Leftrightarrow u \in \bar{C}$$

Beweis. Sei $x_0 \in (a,b)$ dann gilt:

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x_0) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} u_\epsilon(x_0 + \sigma(x - x_0)\,)\, d\sigma \\ &= \int_0^1 \underbrace{u'_\epsilon(x_0 + \sigma(x - x_0)\,)\, d\sigma\, (x - x_0)}_{\in \mathcal{N}(a,b)} \end{aligned}$$

Das Integral über ein endliches Intervall stört die Abschätzung für die Zugehörigkeit zu $\mathcal{N}(a,b)$ nicht; also ist $u = u(x_0) \in \mathcal{G}(a,b)$. □

Satz 2.17 Eigenschaften von Punktwerten

1. *$u \in C^\infty(\Omega)$, $x_0 \in \Omega \Rightarrow \iota(u)\,(x_0)$ ist der klassische Funktionswert (eingebettet in $\bar{C}$).*

2. *$u \in C^0(\Omega)$, $x_0 \in \Omega \Rightarrow \iota(u)\,(x_0)$ ist i. a. nicht der klassische Funktionswert.*

Beweis. 1. ist klar, 2. geht aus dem folgenden Beispiel 1. hervor. □

Beispiele.

1. „$x_+(0)$"
   In R gilt ja: $x_+(0) = 0$. Sei nun $x \in R$, ρ ein Mollifier, dann gilt (wegen Satz 2.11):
   $\iota(x_+)(x) = (x_+ * \rho_\epsilon(x)\,)_\epsilon + \mathcal{N} = \left(\int_0^\infty y\rho_\epsilon(x-y)\,dy\right)_\epsilon + \mathcal{N}$

   $$\iota(x_+)(0) = \left(\int_0^\infty y\rho_\epsilon(x-y)\,dy\right)_\epsilon + \mathcal{N} = \left(\epsilon\int_0^\infty y\rho(-y)\,dy\right)_\epsilon + \mathcal{N}$$

   Damit ist plausibel (wir übergehen die detaillierten Beweise):

   (*i*) $x_+(0)$ hängt vom gewählten Mollifier ab.
   (*ii*) $x_+(0) \neq 0 \in \bar{C}$ (falls d. Mollifier entsprechend gewählt wird)
   (*iii*) Für $\epsilon \to 0$ ergibt $(\iota(x_+)(0)\,)_\epsilon$ d. klassischen Funktionswert 0.

2. „$\delta(0)$"
   $\iota(\delta)(x) = \Big(\delta * \rho_\epsilon(x)\Big)_\epsilon + \mathcal{N} = \Big(\rho_\epsilon(x)\Big)_\epsilon + \mathcal{N}$

   $$\iota(\delta)(0) = \Big(\rho_\epsilon(0)\Big)_\epsilon + \mathcal{N} = (\frac{1}{\epsilon}\rho(0)\,)_\epsilon + \mathcal{N}$$

   Also divergiert $\iota(\delta)(0)$ mit der (-1)-ten Potenz von ϵ.

3. „$\delta'(0)$"
$\iota(\delta') * \rho_\epsilon(x) = \delta * \rho'_\epsilon(x) = \rho'_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2}\rho'(x/\epsilon)$

$$\iota(\delta)'(0) = \left(\frac{1}{\epsilon^2}\,\rho'(0)\right)_\epsilon + \mathcal{N}$$

$\iota(\delta')(0)$ divergiert also wie ϵ^{-2}.

4. „$x\,\delta(x)$"
In $\mathcal{D}'$ gilt ja $x\delta = 0$ und wir wissen bereits (Satz 1.20), daß in $\mathcal{G}$ $\iota(x)\,\iota(\delta) \neq 0$ gelten muß. Wir leiten diese Resultat jetzt noch einmal direkt aus der Gestalt von δ her.

Wir wissen: $(\iota x)_\epsilon = (\sigma x)_\epsilon = x$ für alle ϵ und $\iota(\delta)_\epsilon = \rho_\epsilon$. Wir wählen $0 \neq x_0 \in R$ mit $\rho(x_0) \neq 0$.
Für $x = \epsilon x_0$ gilt dann $x\rho_\epsilon(x) = x_0\rho(x_0) \neq 0$. Für $K = [-1,1]$ und $\epsilon \leq 1/x_0$ ist $x = \epsilon x_0 \in K$ und es ergibt sich:

$$\sup_{y\in K} \mid y\rho_\epsilon(y) \mid \geq \mid x\rho_\epsilon(x) \mid = \mid x_0\rho(x_0) \mid \not\to 0 \quad (\epsilon \to 0)$$

Somit ist $(\iota x)_\epsilon\,(\iota\delta)_\epsilon \notin \mathcal{N}$, also $\iota(x)\,\iota(\delta) \neq 0$ in $\mathcal{G}$.

Andererseits ist $(\iota(x)\,\iota(\delta)\,)\,(\sigma z) = 0$ für jedes $z \in R$, denn für $z = 0$ ist $[(\iota x)_\epsilon(\iota\delta)_\epsilon(x)](0) = 0\rho_\epsilon(0) = 0$. Für $z \neq 0$ ist $[(\iota x)_\epsilon(\iota\delta)_\epsilon(x)](z) = z\rho_\epsilon(z) = (z/\epsilon)\rho(z/\epsilon)$; diese Wahl geht (wegen $\rho \in \mathcal{S}$) für $\epsilon \to 0$ schneller gegen 0 als jede Potenz von ϵ. Somit ist auch für $z \neq 0$ $(\iota(x)\,\iota(\delta)\,)\,(\sigma z) = 0$ in $\bar{C}$.

2.5 Integration in $\mathcal{G}(\Omega)$

Als weiteres wichtiges Konzept behandeln wir nun Integration in der Algebra der verallgemeinerten Funktionen.

Definition 2.8 *Sei $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ und $K \subseteq \Omega$ kompakt, so definieren wir:*

$$\int\limits_K u(x)\,dx := \left(\int_K u_\epsilon(x)\,dx\right)_\epsilon + \mathcal{N} \qquad \in \bar{C}$$

Die Wohldefiniertheit ist wiederum garantiert durch die Konstruktion des Ringes $\bar{C}$ der verallgemeinerten Zahlen (denn sei: $(u_\epsilon)_\epsilon - (v_\epsilon)_\epsilon \in \mathcal{N}(\Omega) \Rightarrow$ $\left(\int (u_\epsilon - v_\epsilon)(x)\,dx\right)_\epsilon \in \mathcal{N}$).

Beispiel. Sei $K = [-a, a]$ dann gilt:

$$\int\limits_K \delta(x)\,dx = \left(\int_{-a}^{a} \rho_\epsilon(x)\,dx\right)_\epsilon + \mathcal{N} = \left(\int_{-a/\epsilon}^{a/\epsilon} \rho(y)\,dy\right)_\epsilon + \mathcal{N} = 1 \qquad \in \bar{C}$$

Um die Definition des Integrals für Elemente $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ mit kompaktem Träger auf die ganze offene Menge Ω auszudehnen, können wir nicht einfach $\int_\Omega u = \int_{\mathrm{tr}(u)} u$ setzen (dann wäre: $\int_\Omega \delta = 0$ weil $\mathrm{tr}(\delta) = \{0\}$), sondern wir definieren:

Definition 2.9 *Sei $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ mit $tr(u) =: K \subseteq \Omega$ kompakt und sei $K \subseteq L^\circ$ (Inneres von L), L kompakt, so definieren wir das* **Integral von u auf Ω** *durch:*

$$\int\limits_\Omega u(x)\,dx = \int\limits_L u(x)\,dx$$

Diese Definition ist klarerweise von der Wahl der kompakten Umgebung L von K unabhängig.

Beispiele.

1. $\int\limits_R \delta(x)\,dx = 1 \qquad \in \bar{C}$

2. $\int\limits_R \delta^2(x)\,dx = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_\epsilon^2(x)\,dx\right)_\epsilon + \mathcal{N} = \left(\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^2(x)\,dx\right)_\epsilon + \mathcal{N}$

Nun sind wir bereits in der Lage zu zeigen, daß die Wirkung einer Distribution auf eine Testfunktion dem Integral über $\iota(\omega)\varphi$ in $\mathcal{G}(\Omega)$ entspricht.

Satz 2.18 *Sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dann gilt:*

$$\int_\Omega \iota(\omega)\,(x)\,\varphi(x)\,dx \;=\; \sigma\left(\langle\omega,\varphi\rangle\right) \qquad \in \bar{C}$$

Beweis. Wir wählen $(\Omega_{\lambda_j})_j$, $(\psi_{\lambda_j})_j$ und $(\chi_j)_j$ wie früher. Sei K :=tr(φ), L eine kompakte Umgebung von K in Ω und sei $M \in N$ so gewählt, daß: $\sum_{j=1}^M \chi_j(x) = 1$ auf L, dann gilt:

$$\iota(\omega)\varphi \;=\; \sum_{j=1}^M \iota(\omega)\,(\chi_j\varphi) \;\text{ und }\; \langle\omega,\varphi\rangle \;=\; \sum_{j=1}^M \langle\omega,\chi_j\varphi\rangle$$

Daher genügt zu zeigen: $\int \iota(\omega)\,(\chi_j\varphi) \;=\; \langle\omega,\chi_j\varphi\rangle$ für alle j.
Sei also o.B.d.A $K \subseteq \Omega_{\lambda_j}$ und $L \subseteq \Omega_{\lambda_j}$, dann folgt wegen $\iota_{\lambda_j}(\omega) - \iota(\omega)\mid_{\Omega_{\lambda_j}} \in \mathcal{N}(\Omega_{\lambda_j})$:

$$\int \iota(\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \;=\; \int_L \left(\,(\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon\right)(x)\,\varphi(x)\,dx \quad + n_\epsilon$$
$$(n_\epsilon \in \mathcal{N} \in \bar{C})$$

Also erhalten wir:

$$\int \iota(\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \;-\; \langle\omega,\varphi\rangle$$
$$= \underbrace{\int \Big((\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon\Big)\,(x)\,\varphi(x)\,dx \;-\; \langle\psi_{\lambda_j}\omega,\varphi\rangle} + n_\epsilon$$
$$= \langle\psi_{\lambda_j}\omega, \check{\rho}_\epsilon * \varphi - \varphi\rangle$$
$$= \langle\psi_{\lambda_j}\omega(x), \textstyle\int \rho_\epsilon(y)\,(\varphi(x+y) - \varphi(x)\,)\,dx\rangle$$
$$= \langle\psi_{\lambda_j}\omega(x), \textstyle\int \rho(y)\,(\varphi(x+\epsilon y) - \varphi(x)\,)\,dy\rangle$$

Auf L können wir nach dem Struktursatz o.B.d.A. $\psi_{\lambda_j}\omega \;=\; \partial^\alpha f$ setzen und erhalten somit schließlich:

$$\int \iota(\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx - \langle\omega,\varphi\rangle \;=\; (-1)^\alpha\langle f(x), \int[\partial^\alpha\varphi(x+\epsilon y) - \partial^\alpha\varphi(x)\,]\,\rho(y)\,dy$$

Entwickeln wir den Ausdruck in eckigen Klammern wie im Beweis von Satz 2.4 in eine Taylorreihe, so ergibt sich unter Beachtung von tr(φ) kompakt die Behauptung. $\square$

Korollar. Sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $(u_\epsilon)_\epsilon$ ein Repräsentant von $\iota(\omega)$, dann gilt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int u_\epsilon(x)\, \varphi(x)\, dx \;=\; \langle \omega, \varphi \rangle$$

Beweis. Nach Satz 2.18 ist $\int u_\epsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle \omega, \varphi \rangle + n_\epsilon$ $(n_\epsilon \in \mathcal{N})$. $\square$

2.6 Assoziation

In der Algebra der verallgemeinerten Funktionen kann man keine „sinnvolle" Topologie einführen. Es ist z. B. nicht möglich, $\mathcal{G}(\Omega)$ zu einem topologischen Vektorraum zu machen (vgl. z. B. Oberguggenberger [45]). Dieser Nachteil kann aber durch die Verwendung eines sogenannten „Zweifach-Kalküls" (Gleichheit in $\mathcal{G}(\Omega)$ bzw. Gleichheit auf Distributionenniveau) behoben werden.

Definition 2.10 *Ein Element $u = (u_\epsilon)_\epsilon$ von $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$ heißt* **assoziiert zu 0** *(Schreibweise: $u \approx 0$), wenn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega u_\epsilon(x)\, \varphi(x)\, dx = 0 \qquad (*)$$

Offenbar bilden die zu 0 assoziierten Elemente von $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$ einen Teilraum $\mathcal{N}_\mathcal{A}(\Omega)$, der $\mathcal{N}(\Omega)$ umfaßt. Daher induziert die Definition

$$u \approx v \text{ („}u\text{ assoziiert zu }v\text{")} \;:\Leftrightarrow\; u - v \approx 0$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)$. Wegen $\mathcal{N}(\Omega) \subseteq \mathcal{N}_\mathcal{A}(\Omega)$ ist diese auch auf $\mathcal{G}(\Omega) = \mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ wohldefiniert und ebenfalls durch $(*)$ beschrieben. Wir sprechen auch in diesem Fall von „Assoziation".

Für Bilder von Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ besagt $\iota(u) \approx 0$ gerade $u_\epsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, falls u_ϵ ein Repräsentant von $\iota(u)$ ist.
Wegen $\mathcal{N}_\mathcal{A}(\Omega) \supset \mathcal{N}(\Omega)$ ist die Assoziation (Gleichheit auf Distributionenniveau) „gröber" als die Gleichheit in $\mathcal{G}(\Omega)$, denn seien $u, v \in \mathcal{G}(\Omega)$, dann gilt klarerweise $u = v \Rightarrow u \approx v$ jedoch i. a. $u \approx v \not\Rightarrow u = v$.

Definition 2.11 *Sei $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ und $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Falls $u \approx \iota(\omega)$ gilt, schreibt man auch $u \approx \omega$ und sagt: „u besitzt ω als* **assoziierte Distribution***", beziehungsweise: „ω ist der* **(distributionelle) Schatten** *von u in $\mathcal{D}'$ ".*

Satz 2.19 *Sei $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\omega \approx 0$ dann gilt: $\omega = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$*
d. h. falls für ein Element $u \in \mathcal{G}(\Omega)$ ein Schatten existiert, so ist er eindeutig. ($\mathcal{D}'(\Omega)$ ist also auch in $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}_\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{G}(\Omega)/\mathcal{N}_\mathcal{A}(\Omega)$ kanonisch eingebettet.)

Beweis. Wegen Satz 2.18 gilt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\underbrace{\int \iota(\omega)(x)\, \varphi(x)\, dx}_{\to 0 \text{ lt. Voraussetzung}} = \langle \omega, \varphi \rangle + \underbrace{n_\epsilon}_{\to 0}, \text{ und somit } \langle \omega, \varphi \rangle = 0 \qquad \square$$

Beispiel. Es gilt: $x\,\delta(x) \neq 0 \in \mathcal{G}(\Omega)$ (siehe Beispiel 4 in Abschnitt 2.4), aber:

$$x\,\delta(x) \approx 0$$

Denn sei $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, dann ist $\int \iota(x\delta(x)\,)_\epsilon \,\varphi(x)\,dx = \int (x/\epsilon)\,\rho(x/\epsilon)\,\varphi(x)\,dx = \epsilon \int y\rho(y)\,\varphi(\epsilon y)\,dy \to 0 \quad (\epsilon \to 0)$.

Bemerkung. Es existieren verallgemeinerte Funktionen, die keinen Schatten besitzen („Vampire"[2]). Zum Beispiel ist δ^2 ein Vampir, denn: sei $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, $\varphi(0) \neq 0$, so gilt:

$$\int \rho_\epsilon^2(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\epsilon}\int \rho^2(y)\,\varphi(\epsilon y)\,dy \to \infty \quad (\epsilon \to 0)$$

Die Assoziation in der Algebra der verallgemeinerten Funktionen $\mathcal{G}(\Omega)$ induziert eine Äquivalenzrelation im Ring der verallgemeinerten Zahlen $\bar{C}$, die wir ebenfalls als „Assoziation" bezeichnen: Für $z_1,\ z_2 \in \bar{C}$ ist demnach $z_1 \approx z_2$ genau dann, wenn ein Repräsentant von $z_1 - z_2$ zu $\mathcal{E}_\mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{N}_\mathcal{A}(\Omega)$ gehört. Zur leichteren Lesbarkeit formulieren wir diese Definitionen nochmals ohne explizit auf die Assoziation in $\mathcal{G}(\Omega)$ zurückzugreifen.

Definition 2.12

1. *Sei $z \in \bar{C}$, so heißt z* **assoziiert zu 0** *($z \approx 0$), wenn ein Repräsentant $(z_\epsilon)_\epsilon$ von z mit $\lim_{\epsilon\to 0} z_\epsilon = 0$ (in C) existiert. (d. h. $z \in \bar{C} \cap \mathcal{N}_\mathcal{A}$)*
2. *Seien $z_1, z_2 \in \bar{C}$: $z_1 \approx z_2 \;:\Leftrightarrow\; z_1 - z_2 \approx 0$*
3. *Sei $a \in C$ und $\sigma(a) \approx z \in \bar{C}$, so heißt a die zu z* **assoziierte Zahl**, *bzw.* **Schatten** *von z.*

Die Situation ist hier völlig analog zu der in $\mathcal{G}(\Omega)$.

Satz 2.20 Wichtige Eigenschaften der Assoziation

1. *Sei $f \in C^\infty(\Omega)$, $\omega \in \mathcal{D}'(\Omega) \;\Rightarrow\; \sigma(f)\,\iota(\omega) \approx \iota(f\,\omega)$*
2. *Seien $f, g \in C(\Omega) \;\Rightarrow\; \iota(f)\,\iota(g) \approx \iota(f\,g)$*
3. *Sei $f \in C(\Omega)$, $x_0 \in \Omega \;\Rightarrow\; \iota(f)\;(x_0) \approx f(x_0)$*

Beweis .

1. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es ist zu zeigen:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int f(x)\iota(\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int \iota(f\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx$$

[2] Vampire besitzen gewöhnlich kein Spiegelbild. Wir gehen hier allerdings davon aus, daß sie - wie Peter Pan - auch keinen Schatten werfen.

Seien $(\Omega_{\lambda_j})_j$, $(\psi_{\lambda_j})_j$ und $(\chi_j)_j$ wie üblich, weiters K :=tr(φ), L eine kompakte Umgebung von K und M so gewählt, daß: $\sum_{j=1}^M \chi_j = 1$ auf L ist. Es gilt:

$$\iota(\omega)_\epsilon\varphi = \sum_{j=1}^M \chi_j\, \iota(\omega)_\epsilon\varphi \text{ und } \iota(f\omega)_\epsilon = \sum_{j=1}^M \chi_j\, \iota(f\omega)_\epsilon\varphi$$

Also genügt es zu zeigen:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int f(x)\iota(\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,\chi_j(x)\,dx \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\int \iota(f\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,\chi_j\,dx \quad \forall j$$

O.B.d.A. sei also $\mathrm{tr}(\varphi) = K \subseteq L \subseteq \Omega_{\lambda_j}$ für ein fixes j. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int \iota(\omega)_\epsilon f(x)\,\varphi(x) \;=\; & \underbrace{\int_L (\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon(x)\, f(x)\,\varphi(x)\,dx} \quad + n_\epsilon \\ & = \;\langle(\psi_{\lambda_j}\omega) * \rho_\epsilon, f\varphi\rangle \\ & \to \;\langle\psi_{\lambda_j}\omega, f\varphi\rangle \qquad (\epsilon\to 0)\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}\int \iota(f\omega)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \;=\; & \underbrace{\int_L (\psi_{\lambda_j}f\omega) * \rho_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx} \quad +m_\epsilon \\ & = \;\langle(\psi_{\lambda_j}f\omega) * \rho_\epsilon, \varphi\rangle \\ & \to \;\langle(\psi_{\lambda_j}f\omega), \varphi\rangle \qquad (\epsilon\to 0) \\ & = \;\langle\psi_{\lambda_j}\omega, f\varphi\rangle\end{aligned}$$

2. Es ist zu zeigen: ($\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$):

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \iota(f)_\epsilon(x)\,\iota(g)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int \iota(fg)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

Sei wie oben $\mathrm{tr}(\varphi) =: K \subseteq L \subseteq \Omega_j$, so gilt:

$$\begin{aligned}(1) \;&=\; \lim_{\epsilon\to 0}\int_L \iota_j(f)_\epsilon(x)\,\iota_j(g)_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &=\; \lim_{\epsilon\to 0}\int_L \underbrace{(\Psi_j f) * \rho_\epsilon(x)}_{\to\Psi_j f \text{ glm.}}\,\underbrace{(\Psi_j g) * \rho_\epsilon}_{\to\Psi_j g \text{ glm.}}(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &=\; \int_L \Psi_j f(x)\,\Psi_j g(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (\epsilon\to 0) \\ &=\; \int_L f(x)\,g(x)\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

Beim vorletzten Schritt haben wir $\|(\psi_{\lambda_j} f) * \rho_\epsilon\|_\infty \leq \|\psi_{\lambda_j} f\|_\infty \|\rho_\epsilon\|_1 = |\psi_{\lambda_j} f\|_\infty$ (und analog für g) und den Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue verwendet.

Andererseits gilt (analog zu 1.) :

$$(2) \to \int_L \Psi_j(x)\, f(x)\, g(x)\, \varphi(x)\, dx \;=\; \int_L f(x)\, g(x)\, \varphi(x)\, dx$$

3. Zu zeigen ist: $\iota(f)_\epsilon(x_0) \to f(x_0) \quad (\epsilon \to 0 \text{ in } C)$
   Es gilt:

$$\begin{aligned}
\iota(f)_\epsilon(x_0) &= \sum_{\text{endl.}} \mathcal{X}_j(x_0)\, \underbrace{((\Psi_j f) * \rho_\epsilon)(x_0)}_{\to \Psi_j f(x_0)} + n_\epsilon \\
&\to \sum_{\text{endl.}} \mathcal{X}_j(x_0)\, \underbrace{\Psi_j(x_0)}_{=1} f(x_0) \\
&= \sum_{\text{endl.}} \mathcal{X}_j(x_0)\, f(x_0) \;=\; f(x_0) \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 2.21 Verträglichkeit der Assoziation mit Operationen in $\mathcal{G}(\Omega)$
Seien $u, v \in \mathcal{G}(\Omega)$ mit $u \approx v$, dann gilt:

1. $\partial^\alpha u \approx \partial^\alpha v \qquad \forall \alpha \in N_0^n$
2. $f\, u \approx f\, v \quad \forall f \in C^\infty(\Omega)$
3. $u\, w \not\approx v\, w$ *im allgemeinen für* $w \in \mathcal{G}(\Omega)$

Beweis

1. Es genügt zu zeigen: Wenn u zu 0 assoziiert ist, dann auch $\partial^\alpha u$. Das folgt aber sofort aus:

$$\int (\partial^\alpha)_\epsilon(x)\varphi(x)dx = \int (\partial^\alpha(u_\epsilon))(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int u_\epsilon(x)(\partial^\alpha\varphi)(x)dx$$

2. Wiederum genügt es zu zeigen: Wenn u zu 0 assoziiert ist, dann auch $\iota(f)\, u$. Nach Satz 2.10 ist $\iota(f) = \sigma(f)$, also gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \iota(f)_\epsilon u_\epsilon \varphi \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int f\, u_\epsilon \varphi \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int u_\epsilon\, \underbrace{f\varphi}_{\in \mathcal{D}} \;=\; 0$$

3. folgt aus Beispiel 1. unten. $\square$

Beispiele.

1. $x\,\delta \approx 0$ aber $x\,\delta^2 \not\approx 0$, denn sei $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ mit $\varphi(0) \neq 0$; dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \iota(x)\,\iota(\delta)^2(x)\varphi(x)\,dx &= \int \tfrac{x}{\epsilon^2}\rho^2\left(\tfrac{x}{\epsilon}\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \int y\,\rho^2(y)\,\varphi(\epsilon y)\,dy \\ &\not\to 0\end{aligned}$$

2. $H^2 \neq H \in \mathcal{G}(R)$ wegen Satz 1.20. Jedoch gilt $H^n \approx H$ (genauer: $(\iota H)^n \approx \iota(H)$) für alle $n \in N$: Gemäß dem Beispiel nach Satz 2.11 ist $(H * \rho_\epsilon)_\epsilon$ ein Repräsentant von $\iota(H)$. Wir erhalten:

$$\int_R (\iota H)^n_\epsilon(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_R ((\iota H)_\epsilon(x)\,)^n\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_R (H * \rho_\epsilon(x)\,)^n\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_R \int_{-\infty}^{x/\epsilon} \rho(y_1)\,dy_1 \ldots \int_{-\infty}^{x/\epsilon} \rho(y_n)\,dy_n\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_R \ldots \int_R}_{n \text{ mal}} \rho(y_1)\,\ldots\,\rho(y_n) \int_{\max\limits_{1\le i\le n}(\epsilon y_i)}^{\infty} \varphi(x)\,dx\,dy_1 \ldots dy_n$$

$$\to \underbrace{\int_R \ldots \int_R}_{n \text{ mal}} \rho(y_1)\,\ldots\,\rho(y_n) \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx\,dy_1 \ldots dy_n$$

$$= \langle H, \varphi\rangle$$

Dabei haben wir die Sätze von Fubini und Lebesgue über die dominierte Konvergenz verwendet.

Wegen Satz 2.21.1. folgt aus $H^2 \approx H$:

$$H\,\delta \approx \frac{1}{2}\,\delta$$

Das Konzept der Assoziation ermöglicht es also in gewissem Sinne, physikalische Situationen auf jeweils vielerlei Arten zu modellieren. In der klassischen Distributionentheorie gibt es z. B. nur eine Möglichkeit, einen Sprung einer Größe zu repräsentieren, nämlich durch die Heaviside-Funktion. Ebenso gibt es nur eine Möglichkeit, eine Punktmasse oder Punktladung zu modellieren, nämlich mittels der δ-Distribution. Dies genügt zwar zur Behandlung linearer Probleme, nichlineare Operationen können aber nicht ausgeführt werden.

Behebt man diesen Mangel durch Einbettung in die Colombeau-Algebra, so wird man gleichzeitig gezwungen, auch die nichtlinearen Eigenschaften der verwendeten Objekte festzulegen. Bettet man z. B. H oder δ in $\mathcal{G}(\Omega)$ ein, so werden dabei auch die nichtlinearen Eigenschaften festgelegt ($H\,\delta \approx (1/2)\delta$). Im Rahmen der Colombeau-Theorie existiert jedoch eine Fülle verallgemeinerter Funktionen, die alle zu H assoziiert sind (z. B. alle Potenzen von H), also dieselben linearen Eigenschaften besitzen, aber in $\mathcal{G}$ paarweise ungleich sind, und somit verschiedene nichtlineare Eigenschaften besitzen.
Ein Ausweg aus dieser Vieldeutigkeit könnte nun darin bestehen, durch zusätzliche physikalische Informationen eine „bestimmmte" Sprung- oder δ-Funktion auszuwählen (d. h. ein bestimmtes $u \in \mathcal{G}$ mit $u \approx H$ bzw. $u \approx \delta$). Anders gesprochen müssen bei idealisierten Objekten wie Punktteilchen etc. auch die nichtlinearen Eigenschaften mitberücksichtigt werden, wenn man nichtlineare Operationen ausführt.
Dies scheint aber keine Schwäche der mathematischen Theorie, insbesondere der Colombeauschen Theorie zu sein, sondern spiegelt ein prinzipielles Problem nichtlinearer „Phänomene" wieder.

Um anzudeuten, welchen Reichtum an verschiedenen nichtlinearen Eigenschaften die Colombeau-Theorie für linear äquivalente Objekte zur Verfügung stellt, zitieren wir abschließend folgenden Satz.

Satz 2.22 *Sei $c \in C$ beliebig, so existiert ein $u \in \mathcal{G}(R)$ mit*

$$u \approx \delta \ \textit{und}\ u^2 \approx c\,\delta.$$

3 Boost und ultrarelativistischer Limes des Coulombfeldes im flachen Raum

3.1 Der Boost

Wir betrachten eine im Inertialsystem I (Koordinaten $x^i = (t, x, y, z)$) ruhende Punktladung im Minkowskiraum (η_{ij} = diag $(1, -1, -1, -1)$). Ein Beobachter im System I mißt folgendes elektromagnetisches Feld:

$$\vec{E} = e\frac{\vec{x}}{r^3} \qquad \vec{B} = 0$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = -x^\alpha x_\alpha$ der kartesische Radius in I ist. (Griechische Indices laufen von 1 bis 3, lateinische von 0 bis 3.) In Termen des kontravarianten Feldstärketensors schreibt sich das Feld:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & \ddots & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & \ddots & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{e}{r^3}\begin{pmatrix} 0 & -x & -y & -z \\ x & 0 & \dots & 0 \\ y & \vdots & & \vdots \\ z & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Nun führen wir eine geschwindigkeitsabhängige Lorentztransformation in x-Richtung durch (Boost, System $\bar{I}$, Koordinaten $x^{\bar{i}} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$):

$$\begin{aligned} t &\mapsto \bar{t} = \gamma(t + vx) \\ x &\mapsto \bar{x} = \gamma(x + vt) \\ y &\mapsto \bar{y} = y \\ z &\mapsto \bar{z} = z \end{aligned}$$

wobei $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ und die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt ist. Die Matrix der Lorentztransformation schreibt sich: $L^i_{\ k} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Der kontravariante Feldstärkentensor transformiert sich gemäß:

$$F^{\bar{i}\bar{k}}(x^{\bar{i}}) = L^i_{\ m} L^k_{\ n} F^{mn}(x^i)$$

Die genaue Rechnung liefert für die Komponenten des Feldstärkentensors, also die elektrische bzw. magnetische Feldstärke, folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= E_1 & \bar{B}_1 &= B_1 = 0 \\ \bar{E}_2 &= \gamma(E_2 + vB_3) = \gamma E_2 & \bar{B}_2 &= \gamma(B_2 - vE_3) = -\gamma v E_3 \\ \bar{E}_3 &= \gamma(E_3 - vB_2) = \gamma E_3 & \bar{B}_3 &= \gamma(B_3 + vE_2) = \gamma v E_2 \end{aligned}$$

Vektoriell geschrieben nehmen diese Formeln folgende Gestalt an:

$$\bar{\vec{E}} = \gamma\vec{E} - \tfrac{\gamma-1}{v^2}(\vec{E}\vec{v})\vec{v} - \gamma\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\bar{\vec{B}} = \gamma\vec{B} - \tfrac{\gamma-1}{v^2}(\vec{B}\vec{v})\vec{v} + \gamma\vec{v}\times\vec{E}$$

Wie aus den Transformationsformeln ersichtlich, transformiert das rein elektrische Feld beim Übergang auf ein relativ zur Ladung bewegtes System in ein elektromagnetisches Feld mit sowohl elektrischem, als auch magnetischem Anteil.
Ein umfassendes Bild der Situation erhält man jedoch erst, wenn man in obige Formeln die Ortstransformation $x^i \mapsto x^{\bar{i}} = L^{\bar{i}}{}_k x^k$ einsetzt:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1(x^{\bar{i}}) &= E_1(x^i) = e\,\tfrac{x(x^{\bar{i}})}{r^3} = e\,\tfrac{\gamma(\bar{x}-v\bar{t})}{(\gamma^2(\bar{x}-v\bar{t})^2+\rho^2)^{3/2}} \\
&= e\,\tfrac{\gamma(\bar{x}-v\bar{t})}{\gamma^3((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \\
&= e\,\tfrac{(1-v^2)(\bar{x}-v\bar{t})}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \\
\bar{E}_2(x^{\bar{i}}) &= e\,\tfrac{(1-v^2)\bar{y}}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \\
\bar{E}_3(x^{\bar{i}}) &= e\,\tfrac{(1-v^2)\bar{z}}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

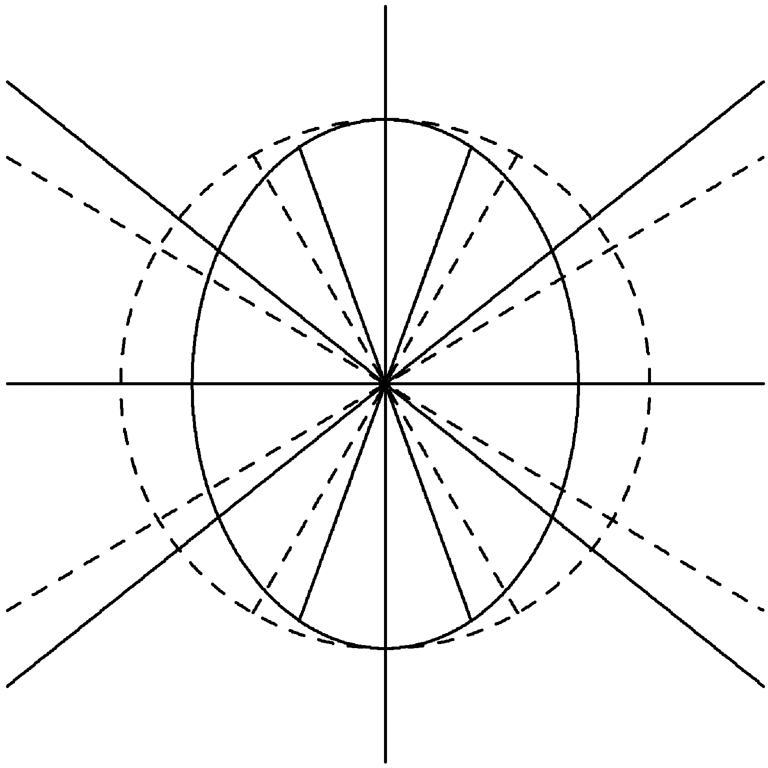
wobei $\rho^2 := y^2 + z^2 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2$ gesetzt ist.
Für das Magnetfeld gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{B}_1(x^{\bar{i}}) &= 0 \\
\bar{B}_2(x^{\bar{i}}) &= e\,\tfrac{-v(1-v^2)\bar{z}}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \\
\bar{B}_3(x^{\bar{i}}) &= e\,\tfrac{v(1-v^2)\bar{y}}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Faßt man die Komponenten der Felder zum elektromagnetischen Feldtensor zusammen so ergibt sich für das geboostete Feld:

$$F^{\bar{i}\bar{k}}(x^{\bar{i}}) = \frac{e\,(1-v^2)}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{x}+v\bar{t} & -\bar{y} & -\bar{z} \\ \bar{x}-v\bar{t} & 0 & -v\bar{y} & -v\bar{z} \\ \bar{y} & v\bar{y} & 0 & 0 \\ \bar{z} & v\bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphisch ergibt sich also folgendes Feldlinienbild für eine bewegte Ladung (elektrisches Feld):



(Die dritte Raumdimension (z-Richtung) ist in der Zeichnung unterdrückt.)

Das Coulombfeld ist also senkrecht zur Bahn dilatiert, in Bewegungsrichtung hingegen kontrahiert. Die Äquipotentialflächen, die im Fall der ruhenden Ladung Kugeln (hier: Kreise) sind, werden zu Rotationsellipsoiden deformiert. Der Effekt nimmt mit steigender Boostgeschwindigkeit zu.
Das Magnetfeld zeigt ein analoges Verhalten in den Komponenten senkrecht zur Bewegungsrichtung, das Feld in Bahnrichtung verschwindet.

3.2 Der ultrarelativistische Limes

Wir stellen uns nun die Frage nach dem Feld einer mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Punktladung; d. h. wir betrachten den Limes der Boostgeschwindigkeit $v \to 1$.
Für alle Punkte, die nicht auf der Hyperebene $\bar{x} = \bar{t}$ liegen, kann der punktweise Limes $v \to 1$ leicht ermittelt werden. Der Zähler und der zweite Term im Nenner der Feldstärkenkomponenten gehen jeweils gegen 0, der erste Term im Nenner bleibt aber für $\bar{x} \neq \bar{t}$ endlich. Es gilt also :

$$\lim_{v\to1} \bar{E}_1 = \lim_{v\to1} \bar{E}_2 = \lim_{v\to1} \bar{E}_3 = \lim_{v\to1} \bar{B}_2 = \lim_{v\to1} \bar{B}_3 = 0$$

$\forall\, x^{\bar{i}} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ wo $\bar{x} \neq \bar{t}$ (punktweise)

Der ultrarelativistische Limes für die Punkte $\bar{x} = \bar{t}$ hingegen erfordert eine genauere Betrachtung.
Die obige Diskussion des Feldes der bewegten Ladung legt folgende heuristische Vermutung nahe:

$$\bar{E}_1 \to 0, \qquad \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{B}_2, \bar{B}_3 \to \delta(\bar{x} - \bar{t}) \qquad (v \to 1)$$

Wir diskutieren die Limiten der einzelnen Komponenten des Feldes getrennt und berechnen punktweise Limiten, wie auch Limiten in $\mathcal{D}'(R^4)$, d. h. wir fassen die einzelnen Felstärkekomponenten als Funktionenfolgen (parametrisiert mit v) in $L^1_{\text{loc}}(R^4)$ auf und berechnen disrtibutionelle Limiten.

3.2.1 Die Feldstärkenkomponente in Bewegungsrichtung

Behauptung 3.1 $\bar{E}_1$ *verschwindet im punktweisen Limes*

Für die Punkte $\bar{x} \neq \bar{t}$ ist alles klar, und weiters gilt:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(\bar{t} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \frac{e\bar{x}\,(1-v^2)\,(1-v)}{((1-v)^2\bar{x}^2 + (1-v)(1+v)\,\rho^2)^{3/2}} \\ &= \frac{e\bar{x}(1-v)^2(1+v)}{(1-v)^{3/2}((1-v)\bar{x}^2 + (1+v)\rho^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(1-v)^{1/2}(1+v)e\bar{x}}{((1-v)\bar{x}^2 + (1+v)\bar{\rho}^2)^{3/2}} \to 0 \quad (v \to 1) \end{aligned}$$

Behauptung 3.2 $\lim \bar{E}_1$ *verschwindet auch in* $\mathcal{D}'(R^4)$
(d. h. $\langle F_{\bar{E}_1}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \rangle \to 0 \in C,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(R^4)$ *)*

Zunächst betrachten wir $\bar{E}_1$ nur als Funktion von $\bar{x}$. Es gilt:

$$\int_a^b \bar{E}_1(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,d\bar{x} = \int_a^b \frac{(\bar{x}-v\bar{t})\,(1-v^2)}{(\,(\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}\,d\bar{x}$$

$$= \frac{-\,(1-v^2)}{\sqrt{(\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2}}\ \Big|_a^b$$

Daher: $\|\bar{E}_1(\bar{x})\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\ \bar{E}_1\ |\ d\bar{x} = \int\limits_{\bar{x}>v\bar{t}} - \int\limits_{\bar{x}<v\bar{t}} = \frac{2}{\rho}\sqrt{1-v^2}$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(R^4)$ und o.B.d.A. $\mathrm{tr}(\varphi) \subseteq [-N,N]^4$, dann gilt:

$$|\ \langle F_{\bar{E}_1}(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}),\varphi(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\rangle\ |$$

$$= |\int\int\int\int \frac{(\bar{x}-v\bar{t})\,(1-v^2)}{(\,(\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}\,\varphi(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,d\bar{t}\,d\bar{x}\,d\bar{y}\,d\bar{z}\ |$$

$$\leq \int\int\int [\int |\ \frac{(\bar{x}-v\bar{t})\,(1-v^2)}{(\,(\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}\ |\ \|\varphi\|_\infty\,d\bar{x}\,]\ d\bar{t}\,d\bar{y}\,d\bar{z}$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} \frac{2}{\rho}\sqrt{1-v^2}\,d\bar{t}\,d\bar{y}\,d\bar{z}$$

$$= \|\varphi\|_\infty \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{4N}{\rho}\sqrt{1-v^2}\,\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$= 8\pi R N\|\varphi\|_\infty\sqrt{1-v^2} \quad \to 0$$

3.2.2 Die Feldkomponenten normal zur Bewegungsrichtung

Wir behandeln nur die Komponente $\bar{E}_2$; die Limiten der anderen Funktionenfolgen können völlig anlog berechnet werden. Zunächst betrachten wir den punktweisen Limes.

Behauptung 3.3 *$\bar{E}_2$ divergiert punktweise auf der Hperebene $\bar{x}=\bar{t}$.*

$$\bar{E}_2(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{e(1-v^2)\bar{y}}{(1-v)^{(3/2)}\,(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^{(3/2)}}$$

$$= \frac{e(1+v)\bar{y}}{\sqrt{1-v}\,(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^{(3/2)}} \ \to\ \infty$$

Dieser punktweise Limes sagt zunächst nichts über den Limes in $\mathcal{D}'$ aus; er liefert aber einen Anhaltspunkt. Zur Berechnung des distributionellen Limes benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 3.1 *Sei die Funktionenfolge* $f_v \in L^1_{loc}(R^4)$ $(0 < v < 1)$. *Für* t, y, z *fix setze:* $g_v^{tyz}(x) := f_v(t,x,y,z),\ (\forall v)$

1. *Es gelte:*

$$(i)\quad G_v^{tyz}(x) := \int_{x_0}^{x} g_v^{tyz}(\xi)\, d\xi \to \theta(t) + const \quad \textit{punktw. fast überall für } v \to 1$$

$$(ii)\quad |\, G_v^{tyz} \,| \leq h(x) \in L^1_{loc}(R)\ \forall v$$

Dann folgt:

$$F_{g_v^{tyz}} \to \delta_t \ \textit{in}\ \mathcal{D}'(R) \qquad (v \to 1)$$

2. *Falls auch:* $|\, G_v^{tyz}(x) \,| \leq h(t,x,y,z) \in L^1_{loc}(R^4)\,\forall v$, *dann gilt:*

$$F_{f_v}(t,x,y,z) \to \delta(x-t) \otimes 1 \otimes 1 \ \textit{in}\ \mathcal{D}(R^4) \qquad (v \to 1)$$

Bemerkung. Mit $\delta(x-t)$ ist hier folgende Distribution in $\mathcal{D}'(R^2)$ gemeint:

$$\langle \delta(x-t), \varphi(t,x) \rangle = \int_R \varphi(t,t)\, dt$$

Achtung: $\delta(x-t)$ darf nicht mit $\delta_t(x) \in \mathcal{D}'(R)$ verwechselt werden! ($\langle \delta_t, \varphi \rangle = \varphi(t)$) Für eine genaue Definition von $\delta(x-t)$ als Zusammensetzung $\delta \circ f$ (wo f die Koordinatentransformation $(x,t) \mapsto x - t$) siehe Anhang: Koordinatentransformationen und Pullback von Distributionen.

Beweis.

1. Wegen (i) konvergiert $F_{G_v^{tyz}}$ punktweise fast überall (d. h. außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge) gegen die Sprungfunktion + const. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, so folgt aus (ii):

$$|\ G_v^{tyz}(x)\varphi(x)\ | \leq\ h(x)\, \|\varphi\|_\infty \quad \in L^1_{\text{loc}}(R)\,\forall v$$

Daher ist der Lebesgueschen Satz über dominierte Konvergenz anwendbar, der die Vertauschbarkeit von Limes und Integral garantiert:

$$\lim \int G_v^{tyz}(x)\varphi(x)\, dx = \int (\lim G_v^{tyz}(x)\,)\, \varphi(x)\, dx$$

Daher konvergiert $F_{G_v^{tyz}}$ auch in $\mathcal{D}'(R)$ gegen die Sprungfunktion + const. und wegen Satz 1.7(iii) gilt: $F'_{G_v^{tyz}} = F_{g_v^{tyz}} \to \delta_t$ in $\mathcal{D}'(R)$.

2. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(R^4)$, $\Psi^{tyz}(x) := \varphi(t,x,y,z)$ für t,y,z fix, so gilt:

$$\langle F_{f_v}, \varphi\rangle \;=\; \int\int\int \;\; \underbrace{[\int g_v^{tyz}(x)\,\Psi^{tyz}(x)\,dx]}_{\substack{=\langle F_{g_v^{tyz}}, \Psi^{tyz}\rangle \to \Psi^{tyz}(t) = \varphi(t,t,y,z) \\ \text{(wegen 1.)}}}\; dt\,dy\,dz$$

Weiters gilt:

$$\mid \int g_v^{tyz}(x)\Psi^{tyz}(x)dx \mid = \mid G_v^{tyz}(x)\Psi^{tyz}(x) \mid_{-\infty}^{\infty} - \int G_v^{tyz}(x)\tfrac{d}{dx}\Psi_v^{tyz}(x)dx \mid$$

$$\leq \int \mid G_v^{tyz}(x)\tfrac{d}{dx}\Psi^{tyz}(x) \mid \leq \int \underbrace{h(t,x,y,z) \mid \frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x,y,z) \mid}_{\in L^1_{\text{loc}}(R^4)\,\forall v \text{ nach Vorraus.}}$$

Und so können wir wieder den Lebesgueschen Satz über dominierte Konvergenz anwenden und es folgt:

$$\int\int\int [\int g_v^{tyz}(x)\Psi^{tyz}(x)\,dx]\,dt\,dy\,dz$$

$$\to \int\int\int \varphi(t,t,y,z)dt\,dy\,dz \;=\; \langle \delta(x-t)\otimes 1 \otimes 1, \varphi\rangle \qquad \square$$

Behauptung 3.4 $\lim\limits_{v\to 1} \bar{E}_2(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \;=\; 2e\delta(x-t)\otimes \frac{\bar{y}}{\rho^2} \quad \in \mathcal{D}'(R^4)$

Wir zeigen, daß die Vorrausetzungen für Satz 3.1 erfüllt sind. Es genügt statt der Bedingung (ii) die stärkere Voraussetzung aus 2. ($\mid G_v^{tyz}(x) \mid \leq h(t,x,y,z) \in L^1_{\text{loc}}(R^4)$) $\forall v$ zu zeigen.
Zunächst zeigen wir (i):

$$\int^{\bar{x}} \bar{E}_2(\bar{t},\acute{x},\bar{y},\bar{z})\,d\acute{x} \;=\; \int^{\bar{x}} \frac{e(1-v^2)\bar{y}}{(\,(\acute{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}\,d\acute{x}$$

$$= \frac{e\bar{y}}{\rho^2}\frac{(\bar{x}-v\bar{t})}{\sqrt{(\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2}} \;\to\; \frac{e\bar{y}}{\rho^2}\frac{\bar{x}-\bar{t}}{|\bar{x}-\bar{t}|}$$

$$= \frac{e\bar{y}}{\rho^2}(\theta(\bar{x}-\bar{t}) - \theta(\bar{t}-\bar{x})\,)$$

Außerdem gilt:

$$\mid \int \bar{E}_2\,d\acute{x} \mid = \frac{e \mid y \mid}{\rho^2}\frac{1}{(1+\frac{(1-v^2)\rho^2}{(\bar{x}-v\bar{t})^2})^{1/2}} \;\leq\; \frac{e}{\rho^2} \mid \bar{y} \mid \in L^1_{\text{loc}}(R^4)$$

(denn: $\int\int \frac{\bar{y}}{\rho^2}\,d\bar{y}\,d\bar{z} \;=\; \int\int \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$)

Also erhalten wir:

$$\lim_{v\to 1} \bar{E}_2(\bar{t},\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \;=\; 2e\delta(\bar{x}-\bar{t})\otimes \frac{\bar{y}}{\rho^2} \;\text{ in } \mathcal{D}'(R^4)$$

(oder kurz geschrieben: $\frac{2e\bar{y}}{\rho^2}\delta(\bar{x}-\bar{t})$)

3.2.3 Der Feldtsärkentensor

Fassen wir nun wieder alle Feldstärkekomponenten zum Feldstärkentensor zusammen, so erhalten wir als Ergebnis den ultrarelativistischen Limes des Coulombfeldes:

$$\lim_{v\to 1} F^{\bar{i}\bar{k}}(x^{\bar{i}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{y} & -\bar{z} \\ 0 & 0 & -\bar{y} & -\bar{z} \\ \bar{y} & \bar{y} & 0 & 0 \\ \bar{z} & \bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{2e}{\rho^2}\,\delta(\bar{x}-\bar{t})$$

Im nächsten Abschnitt werden wir den Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes und seinen ultrarelativistischen Limes behandeln. Für diese Aufgabenstellung ist es günstiger, Nullkoordinaten zu verwenden. Zum Abschluß dieses Abschnitts berechnen wir daher den Limes des Feldes in diesen Koordinaten. Wir führen also folgende Transformation (Koordinatensystem $\tilde{I}$, Koordinaten $u^{\tilde{i}} = (u, v, \bar{y}, \bar{z})$ durch:

$$\begin{array}{rcl} f: \bar{x} & \mapsto & u := \bar{x} - \bar{t} \\ \bar{t} & \mapsto & v := \bar{x} + \bar{t} \end{array}$$

In diesen Koordinaten nimmt der ultrarelativistische Limes des Feldstärkentensors des Coulombfeldes folgende Form an (wobei es gleichgültig ist, ob die Koordinatentransformation vor oder nach dem Grenzübergang durchgeführt wird):

$$\lim_{v\to 1} F^{\tilde{i}\tilde{k}}(u, v, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{y} & -\bar{z} \\ 0 & \bar{y} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{4e}{\rho^2}\,\delta(u)$$

Bemerkung. Die Distribution $\omega = \delta(\bar{x} - \bar{t}) \in \mathcal{D}'(R^2)$ transformiert dabei durch Verknüpfung mit der Inversen der Koordinatentransformation f^{-1} (Diffeomorphismus, siehe Anhang) und geht daher zunächst in die Distribution $\widehat{f^{-1}}{}^*\omega \in \mathcal{D}'(R^2)$. Es gilt aber:

$$\begin{array}{rcl} \langle \widehat{f^{-1}}{}^*\omega, \varphi(u,v)\rangle & = & \langle \delta(x-t)\circ f^{-1}, \varphi(u,v)\rangle \\ = \langle \delta(x-t), \varphi(f(t,x)\,)\,|\det f'\,|\rangle & = & 2\int \varphi(f(t,t)\,)\,dt \\ = 2\int \varphi(0,2t)\,dt & = & \int \varphi(0,v)\,dv \end{array}$$

und somit: $\widehat{f^{-1}}{}^*\omega = \delta(u) \otimes 1$
Genauer müßten wir also oben $\lim F = \ldots \delta(u) \otimes 1$ schreiben, da $\lim F \in \mathcal{D}'(R^4)$.

3.3 Der Energie-Impuls-Tensor

Nun wenden wir uns dem Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes und seinem ultrarelativistischen Limes zu. Allgemein ist der kovariante (symmetrische und spurfreie) Energie-Impuls-Tensor T_{ik} eines elektromagnetischen Feldes F^{ik} folgendermaßen definiert:

$$4\pi T_{ik} := F_{il}F^{l}{}_{k} - \frac{1}{4}\eta_{ik}F_{lm}F^{ml}$$

Die Komponenten des Feldstärkentensors gehen also quadratisch in den Energie-Impuls-Tensor ein.
Da die Multiplikation von Distributionen nicht definiert ist, können wir den ultrarelativistischen Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes nicht einfach durch Einsetzen des Limes des Feldstärkentensors in obige Formel berechnen. Versucht man dies trotzdem, so erkennt man, daß im Sinne der Distributionentheorie nicht definierte Terme entstehen. Da der Feldstärkentensor im Limes Komponenten beinhaltet, die proprtional zur δ-Distibution sind, treten im so berechneten Energie-Impuls-Tensor formal Quadrate von δ auf (in den gewählten Nullkoordinaten nur die $T_{uu} = T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente), die aber im Rahmen der 'klassischen' Distributionentheorie nicht definierbar sind.

Wir schlagen daher einen anderen Weg ein und berechnen den Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes und führen den Boost durch. So erhalten wir für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors, wie schon früher für die Komponenten des Feldtensors, durch die Boostgeschwindigkeit v parametrisierte Funktionenfolgen. Dann betrachten wir den Limes dieser Funktionenfolgen für $v \to 1$.

3.3.1 Der Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes

Zur Berechnung des Energie-Impuls-Tensors des Coulombfeldes aus dem kontravarianten Feldstärketensor schreiben wir:

$$\begin{aligned} 4\pi T_{ik} &= \eta_{ir}\eta_{ls}\eta_{kt}F^{rs}F^{lt} - \tfrac{1}{4}\eta_{ik}\eta_{lr}\eta_{mt}F^{rt}F^{ml} \\ &= \eta_{ii}\eta_{ll}\eta_{kk}F^{il}F^{lk} - \tfrac{1}{4}\eta_{ik}\eta_{ll}\eta_{mm}F^{lm}F^{ml} \end{aligned}$$

Der zweite Term läßt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\eta_{ik}\eta_{ll}\eta_{mm}F^{lm}F^{ml} &= \tfrac{1}{4}\eta_{ik}(\eta_{00}\eta_{mm}F^{0m}F^{m0} + \eta_{ll}\eta_{00}F^{l0}F^{0l}) \\ -\tfrac{1}{2}\eta_{ik}\eta_{\alpha\alpha}F^{0\alpha}F^{0\alpha} &= -\tfrac{1}{2}\eta_{ik}\tfrac{e^2}{r^6}x^{\alpha}x^{\alpha}\eta_{\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2}\eta_{ik}\tfrac{e^2}{r^4} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Komponeneten des Energie-Impuls-Tensors zu:

$$
\begin{aligned}
4\pi T_{00} &= \eta_{00}\eta_{\alpha\alpha}\eta_{00}F^{0\alpha}F^{\alpha 0} - \tfrac{1}{2}\eta_{ik}\tfrac{e^2}{r^4} \\
&= -\tfrac{e^2}{r^6}\,\eta_{\alpha\alpha}x^\alpha x^\alpha - \tfrac{1}{2}\eta_{ik}\tfrac{e^2}{r^4} \\
&= \tfrac{e^2}{r^4} - \tfrac{1}{2}\tfrac{e^2}{r^4} \;=\; \tfrac{e^2}{2r^4}
\end{aligned}
$$

$$
4\pi T_{0\alpha} \;=\; 0 \qquad (\alpha = 1,2,3)
$$

$$
\begin{aligned}
4\pi T_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\alpha}\eta_{ll}\eta_{\beta\beta}F^{\alpha l}F^{l\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\tfrac{e^2}{r^4} \\
&= \eta_{\alpha\alpha}\eta_{00}\eta_{\beta\beta}F^{\alpha 0}F^{0\beta} + \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\tfrac{e^2}{r^4} \\
&= -\tfrac{e^2}{r^6}x^\alpha x^\beta + \delta_{\alpha\beta}\tfrac{e^2}{r^6}x^\alpha x^\alpha
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir also insgesamt für den Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes:

$$
4\pi T_{ik} = \frac{e^2}{2r^6}\begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2+y^2+z^2 & -2xy & -2xz \\ 0 & -2xy & x^2-y^2+z^2 & -2yz \\ 0 & -2xz & -2yz & x^2+y^2-z^2 \end{pmatrix}
$$

3.3.2 Der Boost des Energie-Impuls-Tensors

Bei Durchführung des Boostes transformiert sich der (kovariante) Energie-Impuls-Tensor kontragredient zum (kontravarianten) Feldtensor; es gilt:

$$T_{\bar{i}\bar{k}}(x^{\bar{i}}) = L_i{}^l L_k^m T_{lm}(x^i)$$

wobei: $L^i_k L_i{}^j = \delta_k{}^j = L_k{}^i L^j_i$

Daraus erhält man für den Energie-Impuls-Tensor des geboosteten Coulombfeldes:

$$4\pi T_{\bar{i}\bar{k}}(x^{\bar{i}}) = \frac{e^2(1-v^2)^2}{((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^3}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}((\bar{x}-v\bar{t})^2+ +(1+v^2)\rho^2) & -v\rho^2 & (\bar{x}-v\bar{t})v\bar{y} & (\bar{x}-v\bar{t})v\bar{z} \\ -v\rho^2 & -\frac{1}{2}((\bar{x}-v\bar{t})^2- -(1+v^2)\rho^2) & -(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y} & -(\bar{x}-v\bar{t})\bar{z} \\ (\bar{x}-v\bar{t})v\bar{y} & -(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y} & \frac{1}{2}((\bar{x}-v\bar{t})^2+ +(1-v^2)(\bar{z}^2-\bar{y}^2)) & -(1-v^2)\bar{y}\bar{z} \\ (\bar{x}-v\bar{t})v\bar{z} & -(\bar{x}-v\bar{t})\bar{z} & -(1-v^2)\bar{y}\bar{z} & \frac{1}{2}((\bar{x}-v\bar{t})^2+ +(1-v^2)(\bar{y}^2-\bar{z}^2)) \end{pmatrix}$$

Wie bereits angedeutet, ist es günstig nun zu Nullkordinaten überzugehen, da der durch formales Einsetzen des ultrarelativistischen Feldes gewonnene Energie-Impuls-Tensor in diesen Koordinaten nur in der $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente ein undefiniertes Produkt $\delta^2(u)$ beinhaltet. Wir führen also wiederum die folgende Koordinatentransformation durch:

$$\begin{array}{rcl} f: \bar{x} & \mapsto & u := \bar{x} - \bar{t} \\ \bar{t} & \mapsto & v := \bar{x} + \bar{t} \end{array}$$

Der Energie-Impuls-Tensor transformiert wieder kontragredient, diesmal mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und berechnet sich zu:

$$4\pi T_{\tilde{i}\tilde{k}} = \frac{e^2(1-v^2)^2}{2((\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^3}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+v)^2\rho^2 & \frac{1}{2}(\bar{x}-v\bar{t})^2 & (1+v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y} & (1+v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{z} \\ \frac{1}{2}(\bar{x}-v\bar{t})^2 & \frac{1}{2}(1-v)^2\rho^2 & -(1-v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y} & -(1-v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{z} \\ (1+v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y} & -(1-v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y} & \begin{matrix}(\bar{x}-v\bar{t})^2+\\+(1-v^2)(\bar{z}^2-\bar{y}^2)\end{matrix} & -2(1-v^2)\bar{y}\bar{z} \\ (1+v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{z} & -(1-v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{z} & -2(1-v^2)\bar{y}\bar{z} & \begin{matrix}(\bar{x}-v\bar{t})^2+\\+(1-v^2)(\bar{y}^2-\bar{z}^2)\end{matrix} \end{pmatrix}$$

3.3.3 Der ultrarelativistische Limes des Energie-Impuls-Tensors

Analog zum Feldtensor kann für alle Punkte, die nicht auf der Hyperebene $\bar{x} = \bar{t}$ liegen, der punktweise Limes $v \to 1$ leicht ermittelt werden. Der Zähler und der zweite Term im Nenner der Komponenten des Energie-Impuls-Tensors gehen jeweils gegen 0, der erste Term im Nenner bleibt aber wiederum für $\bar{x} \neq \bar{t}$ endlich. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \lim_{v\to 1} T_{\tilde{i}\tilde{k}} = 0 \quad & \forall\, x^{\bar{i}} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ wo: } \bar{x} \neq \bar{t} \text{ (punktweise)} \\ \text{d. h.} \quad & \forall x^{\tilde{i}} = (u, v, \bar{y}, \bar{z}) \text{ wo: } u \neq 0 \end{aligned}$$

Für die Punkte $\bar{x} = \bar{t}$ ist wiederum eine genauere Betrachtung notwendig.
Generell bemerken wir, daß die Funktionenfolgen $(T_{\tilde{i}\tilde{k}})_v$ nicht in $L^1_{\text{loc}}(R^4)$ liegen. Dies liegt daran, daß durch das Quadrieren die $1/\rho$-Potenzen, die im Feldtensor noch beherrschbar waren, nun zu stark anwachsen ($1/\rho^n \notin L^1_{\text{loc}}(R^2)$ für $n > 1$ und z. B. $y/\rho^n \notin L^1_{\text{loc}}(R^2)$ für $n > 2$). Wenn wir also distributionelle Limiten betrachten wollen, müssen wir uns mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ begnügen, wobei die Grundmenge auf $\Omega := R^4 \setminus \{\rho = 0\}$ eizuschränken ist.
Zunächst betrachten wir die punktweisen Limiten. Da der Faktor 4π aus der Definition des Energie-Impuls-Tensors für unsere Rechnungen völlig unerheblich ist, ignorieren wir ihn im Folgenden.

Behauptung 3.5 *Für die punktweisen Limiten auf der Hyperebene $\bar{x} = \bar{t}$ gilt:*

1. $\lim\limits_{v\to 1, \bar{x}=\bar{t}} T_{\tilde{0}\tilde{1}} = \lim T_{\tilde{1}\tilde{1}} = \lim T_{\tilde{1}\tilde{2}} = \lim T_{\tilde{1}\tilde{3}} = 0$

2. $\lim\limits_{v\to 1, \bar{x}=\bar{t}} T_{\tilde{0}\tilde{2}} = \lim T_{\tilde{0}\tilde{3}} = \lim T_{\tilde{2}\tilde{2}} = \lim T_{\tilde{2}\tilde{3}} = \lim T_{\tilde{3}\tilde{3}} = \textit{endlich}$

3. $\lim_{v\to 1, \bar{x}=\bar{t}} T_{\tilde{0}\tilde{0}} = \textit{divergent}$

$$
\begin{aligned}
T_{\tilde{0}\tilde{1}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{e^2(1-v)^4(1+v)^2\bar{x}^2}{4(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to 0\\
T_{\tilde{1}\tilde{1}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{e^2(1-v)^4(1+v)^2\rho^2}{4(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to 0\\
T_{\tilde{1}\tilde{2}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{-e^2(1-v)^4(1+v)^2\bar{x}\bar{y}}{2(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to 0\\
T_{\tilde{1}\tilde{3}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \text{analog } T_{\tilde{1}\tilde{2}} &&\to 0\\
\\
T_{\tilde{0}\tilde{2}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{e^2(1-v)^3(1+v)^3\bar{x}\bar{y}}{2(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to \frac{e^2\bar{x}\bar{y}}{2\rho^6}\\
T_{\tilde{0}\tilde{3}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \text{analog zu } T_{\tilde{0}\tilde{2}} &&\to \frac{e^2\bar{x}\bar{z}}{2\rho^6}\\
T_{\tilde{2}\tilde{2}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{e^2(1-v)^4(1+v)^2\bar{x}^2}{2(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to 0\\
&+ \frac{e^2(1-v)^3(1+v)^3(\bar{z}^2-\bar{y}^2)}{2(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to \frac{e^2(\bar{z}^2-\bar{y}^2)}{2\rho^6}\\
T_{\tilde{2}\tilde{3}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{e^2(1-v)^3(1+v)^3\bar{y}\bar{z}}{(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to \frac{e^2\bar{y}\bar{z}}{\rho^6}\\
T_{\tilde{3}\tilde{3}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \text{analog zu } T_{\tilde{2}\tilde{2}} &&\to \frac{e^2(\bar{y}^2-\bar{z}^2)}{2\rho^6}\\
\\
T_{\tilde{0}\tilde{0}}(\bar{t}=\bar{x},\bar{y},\bar{z}) &= \frac{e^2(1-v)^2(1+v)^4\rho^2}{4(1-v)^3(\bar{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^3} &&\to \infty
\end{aligned}
$$

Nun wenden wir uns dem Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$ zu:

Behauptung 3.6 *Alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors, mit Ausnahme der $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente, verschwinden im ultrarelativistischen Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Wir betrachten zunächst nur die Komponenten $T_{\tilde{0}\tilde{1}}$, $T_{\tilde{1}\tilde{1}}$, $T_{\tilde{1}\tilde{2}}$, $T_{\tilde{1}\tilde{3}}$, $T_{\tilde{2}\tilde{2}}$, $T_{\tilde{2}\tilde{3}}$ und $T_{\tilde{3}\tilde{3}}$ und führen 1-Norm-Abschätzungen, analog zur Abschätzung von $\bar{E}_1$ im vorigen Abschnitt durch; das heißt für die Funktionenfolge f_v berechnen wir $\|f_v(x)\|_1$, die 1-Norm in nur einer Variablen (hier: x) und verwenden dann folgende Abschätzung ($\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$):

$$
\begin{aligned}
|\langle F_{f_v}, \varphi\rangle| &= |\underbrace{\int\int\int\int}_{\mathrm{tr}(\varphi)} f_v(\bar t,\bar x,\bar y,\bar z)\varphi(\bar t,\bar x,\bar y,\bar z)\, d\bar t\, d\bar x\, d\bar y\, d\bar z\ | \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \underbrace{\int\int\int}_{\mathrm{tr}(\varphi)} \underbrace{[\int_{-\infty}^{\infty} |\ f_v\ |\ d\bar x]}_{\|f_v(x)\|_1} d\bar t\, d\bar y\, d\bar z
\end{aligned}
$$

Ist $\|f_v(x)\|$ dann in den restlichen Variablen über den Träger der Testfunktion φ integrierbar und konvergiert das Integral (punktweise in C) gegen Null, dann verschwindet $\lim F_{f_v}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
O.B.d.A. können wir für $\varphi(\bar t,\bar x,\bar y,\bar z) = \varphi(\bar t,\bar x,\rho,\phi) \in \mathcal{D}(\Omega = R^4 \setminus \{\rho = 0\})$ (wobei ρ,ϕ Polarkoordinaten sind) folgenden Träger annehmen: $\bar t,\bar x \in [-N,N]$, $\phi\in[0,2\pi]$ und $\rho\in[r_0,r_1]$ wobei $0<r_0$.
Der Übersichtlichkeit wegen verwenden wir folgende Abkürzung: $[\quad] := (\bar x - v\bar t)^2 + (1-v^2)\rho^2$

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde 0\tilde 1} = \lim \frac{e^2(1-v^2)^2(\bar x - v\bar t)^2}{4[\quad]^3}$

$$
\begin{aligned}
\|T_{\tilde 0\tilde 1}(\bar x)\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\ T_{01}\, d\bar x\ | = \frac{e^2(1-v^2)^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\bar x - v\bar t)^2}{[\quad]^3}\, d\bar x \\
&= \frac{e^2(1-v^2)^2}{4}\Bigg\{-\frac{(\bar x - v\bar t)}{4[\quad]^2} + \frac{(\bar x - v\bar t)}{8(1-v^2)\rho^2[\quad]} \\
&\qquad + \frac{1}{8(1-v^2)^{3/2}\rho^3}\arctan\left(\frac{\bar x - v\bar t}{\sqrt{1-v^2}\,\rho}\right)\Bigg\}_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0 + 0 + \frac{e^2\pi\sqrt{1-v^2}}{32\,\rho^3}
\end{aligned}
$$

Und weiters:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\int\int\int}_{\mathrm{tr}(\varphi)} \|T_{\tilde 0\tilde 1}(\bar x)\|_1\, d\bar x\, d\bar y\, d\bar z &= \frac{e^2\pi}{32}\sqrt{1-v^2}\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{2\pi}\int_{-N}^{N}\frac{1}{\rho^3}\,\rho\, d\rho\, d\phi\, d\bar t \\
&= \frac{e^2\pi}{32}\sqrt{1-v^2}\ \frac{-\bar t\phi}{\rho}\ \Big|_{r_0}^{r_1}\Big|_0^{2\pi}\Big|_{-N}^{N} \\
&= \frac{e^2\pi^2 N}{8}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\sqrt{1-v^2} \to 0
\end{aligned}
$$

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{1}\tilde{1}} = \lim \frac{e^2(1-v^2)^2(1-v)^2\rho^2}{4[\quad]^3}$

$$\|T_{\tilde{0}\tilde{1}}(\bar{x})\|_1 = \frac{e^2(1-v)^4(1+v)^2\rho^2}{4} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx/[\quad]^3}_{3\pi/(8(1-v^2)^{5/2}\rho^5)}$$

$$= \frac{3\pi e^2(1-v)^{3/2}}{32\rho^3\sqrt{1+v}}$$

Also: $\|T_{\tilde{1}\tilde{1}}(\bar{x})\|_1 \to 0$ und die restliche Integration liefert wiederum nur zusätzliche Konstanten.

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{1}\tilde{2}} = \lim \frac{-e^2(1-v^2)^2(1-v)(\bar{x}-v\bar{t})\bar{y}}{2[\quad]^3}$

$$\|T_{\tilde{1}\tilde{2}}(\bar{x})\|_1 = \frac{e^2(1-v)\,|\bar{y}|}{4\,\rho^4}$$

$$\to \ 0 \text{ und Int. liefert nur Konstanten}$$

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{1}\tilde{3}}$ analog zu $T_{\tilde{1}\tilde{2}}$

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{2}\tilde{2}} = \lim\Big(\underbrace{2T_{\tilde{0}\tilde{1}}}_{\to 0\in\mathcal{D}'} + \underbrace{\frac{-e^2(1-v^2)^2(1-v^2)(\bar{z}^2-\bar{y}^2)}{2[\quad]^3}}_{\|\ldots\|_1 = \frac{3\pi e^2(\bar{z}^2-\bar{y}^2)}{16\,\rho^5}\sqrt{1-v^2}}\Big)$

Also geht die 1-Norm des 2.Terms in $\bar{x}$ gegen 0 und die Integration ist wieder harmlos. Daher erhalten wir insgesamt: $\lim T_{\tilde{2}\tilde{2}} = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{2}\tilde{3}} = \lim \frac{-e^2(1-v^2)^3\bar{y}\bar{z}}{[\quad]^3}$

$$\|T_{\tilde{2}\tilde{3}}(\bar{x})\|_1 = \frac{3\pi e^2\,|\bar{y}\bar{z}|}{8\,\rho^5}\sqrt{1-v^2}$$

$$\to \ 0 \text{ und Int. liefert nur Konstanten}$$

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{1}\tilde{2}}$ analog zu $T_{\tilde{2}\tilde{2}}$

- Von den verbleibenden Komponenten $(T_{\tilde{0}\tilde{2}})$ und $(T_{\tilde{0}\tilde{3}})$ behandeln wir nur $(T_{\tilde{0}\tilde{2}})$ (die andere völlig analog).
Hier führt die $\|\quad\|_1$-Abschätzung nicht zum Ziel; sie ist zu grob: $\|(T_{\tilde{0}\tilde{2}}(\bar{x}))\|_1 = \frac{e^2(1+v)|\bar{y}|}{4\rho^4} \not\to 0$
Wir müssen daher anders vorgehen und verwenden eine Variante des Satzes 3.1. Wir zeigen, daß die Stammfunktion in $\bar{x}$ von $T_{\tilde{0}\tilde{2}}$ punktweise fast überall gegen 0 geht und geben eine $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$-Abschätzung wie im

Satz. Dann konvergiert $T_{\tilde{0}\tilde{2}}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gegen 0.
Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\int^{\bar{x}} T_{\tilde{0}\tilde{2}}(\bar{t},\acute{x},\bar{y},\bar{z})\,d\acute{x} &= \tfrac{e^2(1-v^2)^2(1+v)\bar{y}}{2} \int \tfrac{(\acute{x}-v\bar{t})\,d\acute{x}}{[\quad]^3} \\
&= \tfrac{-e^2(1-v^2)^2(1+v)\bar{y}}{8[\quad]^2} \\
&\to 0 \text{ außer auf } \bar{x}=\bar{t}
\end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\left| \int^{\bar{x}} (T_{\tilde{0}\tilde{2}})(\bar{t},\acute{x},\bar{y},\bar{z})\,d\acute{x} \right| &= \tfrac{e^2(1-v^2)^2(1+v)|\bar{y}|}{8} \frac{1}{(1-v^2)^2\rho^4\,(1+\frac{(\bar{x}-v\bar{t})^2}{(1-v^2)\rho^2})^2} \\
&\leq \tfrac{e^2|\bar{y}|}{4\rho^4} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\,\forall v
\end{aligned}$$

Behauptung 3.7 *$T_{\tilde{0}\tilde{0}}$ hat in $\mathcal{D}'(\Omega)$ keinen Limes.*

Wir brauchen nur zu zeigen, daß ein $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existiert mit: $\langle T_{\tilde{0}\tilde{0}}, \varphi\rangle \to \infty$. Wir wählen $\varphi = 1/\rho^2$ auf $\bar{x},\bar{t} \in [-N,N]$, $\phi \in [0,2\pi]$ und $\rho \in [r_0,r_1]$ (wobei $0 < r_0$), und „außen" glatt gegen Null, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle F_{T_{\tilde{0}\tilde{0}}}, \varphi\rangle &= \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int}_{R^4} T_{\tilde{0}\tilde{0}}(\bar{t},\bar{x},\rho,\phi)\,\varphi(\bar{t},\bar{x},\rho,\phi)\,d\bar{t}\,d\bar{x}\,\rho d\rho\,d\phi \\
&\geq \tfrac{e^2(1+v)^2(1-v^2)^2}{4} \int_{-N}^{N}\int_{-N}^{N} \underbrace{[\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{r_1} \frac{\rho^2}{[\quad]^3}\frac{1}{\rho^2}\rho d\rho\,d\phi]}_{-2\pi/(4(1-v^2)[\quad]^2)|_{r_0}^{r_1}} d\bar{x}\,d\bar{t} \\
&= \tfrac{-e^2\pi(1+v)^2(1-v^2)}{8} \int_{-N}^{N} \underbrace{[\int_{-N}^{N} \frac{1}{[\quad]^2}\Big|_{r_0}^{r_1} d\bar{x}\,]}_{\frac{\bar{x}-v\bar{t}}{2(1-v^2)\rho^2[\quad]}\Big|_{r_0,-N}^{r_1,N} + \frac{\arctan\left(\frac{\bar{x}-v\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}\rho}\right)}{2(1-v^2)^{3/2}\rho^3}\Big|_{r_0,-N}^{r_1,N}} d\bar{t}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-e^2\pi(1+v)^2}{16\,\rho^2} \underbrace{\int\limits_{-N}^{N} \frac{(\bar{x}-v\bar{t})}{[\quad]} \Big|_{r_0,-N}^{r_1,N} \, d\bar{t}}_{-(1/2v)\ln([\quad])}$$

$$- \frac{e^2\pi(1+v)^2}{16\sqrt{1-v^2}\,\rho^3} \underbrace{\int\limits_{-N}^{N} \arctan\left(\frac{\bar{x}-v\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}\rho}\right)_{r_0,-N}^{r_1,N} d\bar{t}}_{\substack{-(1/v)(\bar{x}-v\bar{t})\arctan\frac{\bar{x}-v\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}\rho} \\ +(\sqrt{1-v^2}\rho)/(2v)\ln(1+\frac{(\bar{x}-v\bar{t})^2}{(1-v^2)\rho^2})}}$$

$$= \frac{e^2\pi(1+v^2)}{32\,v\,\rho^2}\ln([\quad])\Big|_{r_0,-N,-N}^{r_1,N,N}$$

$$+\frac{e^2\pi(1+v)^2(\bar{x}-v\bar{t})}{16\,v\,\rho^3\sqrt{1-v^2}} \arctan\frac{\bar{x}-v\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}\,\rho}\Big|_{r_0,-N,-N}^{r_1,N,N}$$

$$-\frac{e^2\pi(1+v)^2}{32\,v\,\rho^2}\ln\left(1+\frac{(\bar{x}-v\bar{t})^2}{(1-v^2)\rho^2}\right)\Big|_{r_0,-N,-N}^{r_1,N,N}$$

Für $v \to 1$ divergiert der 1.Term und somit: $\nexists \lim\limits_{v\to 1} T_{\tilde{0}\tilde{0}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Fassen wir nun alles zusammen, so erhalten wir für den ultrarelativistischen Limes des Energie-Impuls-Tensors des Coulombfeldes in Nullkoordinaten:

$$\lim_{v\to 1} T_{\tilde{i}\tilde{k}} = \begin{pmatrix} \nexists & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

3.4 Diskussion des Ergebnisses

Obiges Ergebnis ist zunächst nicht verwunderlich, denn berechnet man formal den Energie-Impuls-Tensor aus dem ultrarelativistischen Feldstärketensor, so ergibt sich:

$$T_{\tilde{i}\tilde{k}}\,(\lim F^{\tilde{i}\tilde{k}}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \frac{4e^2}{\rho}\;,,\,\delta^2\,\text{''}(u)$$

Auf den ersten Blick fällt also an dem Ergebnis auf, daß offensichtlich *in diesem Falle* die Limesbildung mit der ,,Multiplikation" (d. h. Berechnung des Energie-Impuls-Tensors - ist aber als Multiplikation in $\mathcal{D}'$ nicht definiert) vertauscht. Das Auftreten der undefinierten Größe δ^2 spiegelt die Nichtexistenz des Limes der $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente in $\mathcal{D}'(\Omega)$ wieder.
Die ,,Kommutativität" von Limesbildung und ,,Multiplikation" ist aber ,,zufällig". Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß Funktionenfolgen $f_v \in L^1_{\text{loc}}$ existieren mit $f_v \to 0 \in \mathcal{D}'$, aber $f_v^2 \to \delta \in \mathcal{D}'$. Vergleiche dazu auch Satz 2.22.

Es ist also der ultrarelativistische Limes des Energie-Impuls-Tensors des Coulombfeldes im Rahmen der klassischen Distributionentheorie teilweise nicht berechenbar bzw. nicht einmal formulierbar.
Im letzen Abschnitt dieses Kapitels diskutieren wir die Situation aus dem Blickwinkel der Colombeauschen Theorie.

3.4.1 Aus der Sicht der Colombeau-Theorie

Als erster Schritt ist es notwendig, die Funktionenfolgen $(F^{ik}{}_v)_v$ in die Colombau-Algebra $\mathcal{G}(\Omega)$ einzubetten, um dann den Energie-Impuls-Tensor in $\mathcal{G}$ zu berechnen. (Wir verwenden hier diese mathematischere Schreibweise für (verallgemeinerte) Folgen von Funktionen und schreiben $(f_v)_v$, falls wir nur allgemein eine dieser Folgen $0 < v < 1$ meinen.) Da in der Algebra $\mathcal{G}$ keine Topologie zur Verfügung steht, um Grenzübergänge durchzuführen (siehe Abschnitt 2.6), ist die einzige sinnvolle Möglichkeit der Einbettung die, eine ganze Folge (z. B. $(F_v^{02})_v$) als *eine* Colombeau-Funktion $(u_\epsilon)_\epsilon$ einzubetten. Nur so können wir die ganze Information des unterrelativistischen Falles in $\mathcal{G}$ übersetzen. Einbettungen von einzelnen Funktionen mittels Mollifier werden hier der Situation nicht gerecht.
Aber diese angestrebte ,,Einbettung" (im strengen mathematischen Sinne keine Einbettung, da nicht injektiv), d. h. die Quotientenabbildung

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(\Omega)^I & \to & \mathcal{G}(\Omega) \\ (f_v)_v & \mapsto & (f_{v(\epsilon)})_\epsilon + \mathcal{N}(\Omega) \end{array}$$

ist nur für glatte Funktionenfolgen definiert. Im Nenner aller in der Rechnung vorkommenden Folgen tritt aber der Term $(\bar{x}-v\bar{t})^2+(1-v^2)\rho^2$ auf. Das hat zur Folge, daß jedes einzelne f_v auf $\{\bar{x}=v\bar{t}\}\times\{\rho=0\}$ nicht definiert ist. Um also die gewünschte „Einbettung" zu erhalten, müssen wir den Definitionsbereich weiter einschränken; nämlich auf $\tilde{\Omega}:=R^4\setminus\{\bar{x}=v\bar{t}\ (0<v<1)\wedge\rho=0\}$.
Nun setzten wir $v(\epsilon)=1-\epsilon$ und erhalten, da die Wachstumsbeschränkungen für $\epsilon\to 0$ erfüllt sind ($\mathcal{G}(\tilde{\Omega})=\mathcal{E}_{\mathcal{M}}(\tilde{\Omega})\,/\,\mathcal{N}(\tilde{\Omega})\,!$), die gewünschte „Einbettung":

$$(f_v)_v\mapsto(f_{v(\epsilon)})_\epsilon+\mathcal{N}(\tilde{\Omega})\in\mathcal{G}(\tilde{\Omega})$$

Wir können die gesamte Situation in folgendem Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{cccc}
L^1_{\text{loc}}(\tilde{\Omega}) & \hookrightarrow & \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) & \\
f_v & \mapsto & F_{f_v} & \lim F_{f_v} \\
 & & \downarrow \iota_{\tilde{\Omega}} & \downarrow \\
C^\infty(\tilde{\Omega})^I & \to & \mathcal{G}(\tilde{\Omega}) & \\
(f_v)_v & \mapsto & (f_{v(\epsilon)})_\epsilon+\mathcal{N}(\tilde{\Omega}); & \iota_{\tilde{\Omega}}(\lim F_{f_v})
\end{array}$$

Bisher haben wir einzelne Funktionen $(f_v)\in L^1_{\text{loc}}$ (trivial) in $\mathcal{D}'$ eingebettet und distributionelle Limiten berechnet. Der Colombeausche Zugange erfordert es jedoch, ganze Funktionenfolgen $(f_v)_v\in(C^\infty)^I$ als eine Colombeau-Funktion $(f_{v(\epsilon)})_\epsilon+\mathcal{N}$ mittels der Quotientenabbildung „einzubetten".
Andererseits kann der distributionelle Limes $\lim F_{f_v}$ mittels $\iota_{\tilde{\Omega}}$ (d. h. im wesentlichen Faltung mit einem Mollifier ρ_ϵ, die χ_j werden hier vernachlässigt) in die Colombeau-Algebra eingebettet werden. Diese Einbettung ist jedoch von der Wahl des Mollifiers abhängig und beinhaltet damit eine große unphysikalische Freiheit, eben in der Auswahl des konkreten $\rho\in\mathcal{S}(R^4)$. (Um diese Freiheit durch physikalische Argumentation einzuschränken, könnte man z. B. für $\bar{E}_2$ fordern: $(\bar{E}_{2\,v(\epsilon)})_\epsilon+\mathcal{N}(\tilde{\Omega})=\iota_{\tilde{\Omega}}(\lim F_{\bar{E}_2})=(\lim F_{\bar{E}_2}*\rho_\epsilon)_\epsilon$. Es ist mir jedoch nicht bekannt, ob ein $\rho\in\mathcal{S}(R^4)$ mit den Eigenschaften eines Mollifiers existiert, das diese Forderung erfüllt.)

Nachdem wir also alle $(F^{ik}_v)_v$ erfolgreich als $(F^{ik}_{v(\epsilon)})_\epsilon+\mathcal{N}(\tilde{\Omega})$ in $\mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ eingebettet haben, können wir in der Colombeau-Algebra den Energie-Impuls-Tensor berechnen. (Die Multiplikation in $\mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ ist komponentenweise definiert.) Allerdings können wir in $\mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ weder $\lim(F^{ik}_{v(\epsilon)})_\epsilon$ noch $\lim(T_{ik\,v(\epsilon)})_\epsilon$ berechnen. Als „Ersatz" dafür steht uns in der Colombeau-Algebra das Konzept der Assoziation zur Verfügung.
Übersetzen wir unsere Rechnungen in die Sprache der Colombeau-Algebra,

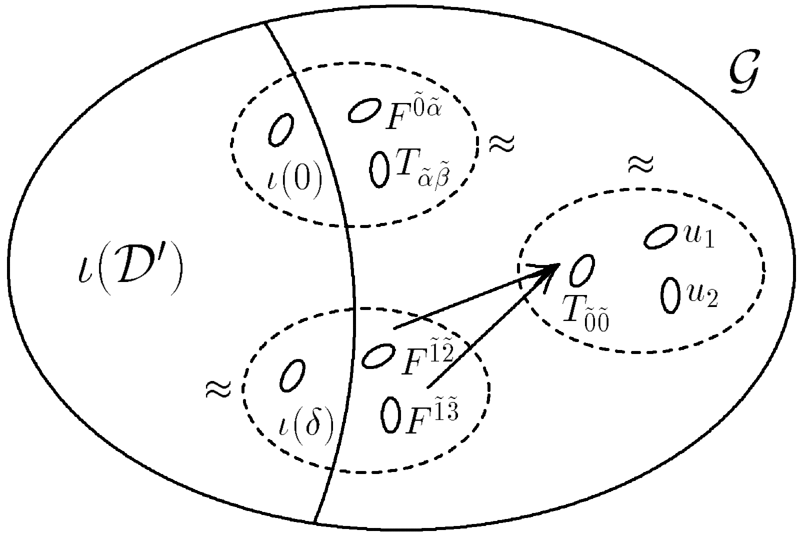
so haben wir nach Abschnitt 3.2.3 in $\mathcal{G}(\tilde\Omega)$:

$$F^{\tilde i\tilde k} = (F^{\tilde i\tilde k}_{v(\epsilon)})_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde\Omega) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar y & -\bar z \\ 0 & \bar y & 0 & 0 \\ 0 & \bar z & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{4e}{\rho^2}\,\delta(u) \quad \forall \tilde i,\, \tilde k$$

Und ebenso gilt nach Abschnitt 3.3.2 in $\mathcal{G}(\tilde\Omega)$:

$$\begin{aligned} T_{\tilde i\tilde k} &= (T_{\tilde i\tilde k\, v(\epsilon)})_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde\Omega) &\approx&\ 0 \quad \forall\,(\tilde i,\tilde k) \neq (0,0) \\ T_{\tilde 0\tilde 0} &= (T_{\tilde 0\tilde 0\, v(\epsilon)})_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde\Omega) &=&\ -(1/4)\left((F^{\tilde 1\tilde 2}_{v(\epsilon)})^2 + (F^{\tilde 1\tilde 3}_{v(\epsilon)})^2\right)_\epsilon \end{aligned}$$

$T_{\tilde 0\tilde 0}$ besitzt keine assoziierte Distribution. Bei der Berechnung der $T_{\tilde 0\tilde 0}$-Komponente fallen wir also aus der Menge der Colombeau-Funktionen mit assoziierter Distribution heraus. Schematisch können wir die Situation in folgendem Diagramm darstellen:



Die Colombeau-Funktionen, die selbst schon Äquivalenzklassen $(u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde\Omega)$ sind, werden durch die Assoziation zu größeren Klassen zusammengefaßt („gröberes Hinschauen"). Diese größeren Klassen können (müssen jedoch i. a. nicht) ein Element $\iota_{\tilde\Omega}(\omega)$ für ein $\omega \in \mathcal{D}'(\tilde\Omega)$ enthalten. Daher kann (aber muß i. a. nicht) eine Colombeau-Funktion eine assoziierte Distribution (einen distributionellen Schatten) besitzen.

Wir haben also folgendes gezeigt:

1. Alle Komponenten des Feldtensors besitzen entweder 0 oder δ als distributionellen Schatten.

2. Alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors (diese sind ja Produkte, die aus den Komponenten des Feldtensors gebildet werden), mit Ausnahme der $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente, besitzen 0 als distributionellen Schatten. Das muß a priori nicht so sein, da die Assoziation nicht mit der Multiplikation in $\mathcal{G}$ verträglich ist (siehe 2.21)!

3. Die $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente hingegen ist zu keiner Distribution assoziiert ($T_{\tilde{0}\tilde{0}}$ ist ein Vampir). Das bedeutet, daß

$$(T_{\tilde{0}\tilde{0}\, v(\epsilon)})_\epsilon = -(1/4)\left((F^{\tilde{1}\tilde{2}}_{v(\epsilon)})^2 + (F^{\tilde{1}\tilde{3}}_{v(\epsilon)})^2\right)_\epsilon$$

zwar in $\mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ existiert, aber ein Objekt ist, das *nur* in der Colombeau-Algebra Sinn macht.

Zusammengefaßt kann man also sagen, daß der große Vorteil der Colombeau-Theorie darin liegt, daß sie einen Rahmen zur Verfügung stellt, in dem die vorkommenden Objekte (die Komponenten des ultrarelativistischen Energie-Impuls-Tensors, insbesondere die $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente) definiert sind; man kann also ,,über die Dinge reden". Des weiteren kann man in der Colombeau-Algebra mit den T_{ik} eine große Klasse nichtlinearer Operationen ausführen und sogar partielle Differentialgleichungen betrachten. Dabei ist es durchaus möglich, daß das Ergebnis einer Rechnung eine Coulombeau-Funktion mit distributionellem Schatten ist; man also nach dem Ausführen nichtlinearer Manipulationen in $\mathcal{G}$ wieder auf Distributionenniveau zurückkehren kann.

Die Colombeau-Theorie beantwortet aber nicht die Frage: ,, Was ist δ^2 ?" δ^2 besitzt keine assoziierte Distribution (siehe Abschnitt 2.6) und ist deshalb ein Objekt, das *ausschließlich innerhalb* der Colombeau-Algebra ,,lebt"; δ^2 kann in sinnvoller Weise kein distributionelles Objekt zugeordnet werden. Außerdem ist in der Colombeau-Algebra die ,,konkrete" Gestalt von δ^2 von der Einbettung $\iota : \mathcal{D}' \to \mathcal{G}$, also von der Wahl des Mollifiers ρ abhängig.
Da wir hier keinen physikalisch motivierten Mollifier zur Verfügung haben, können wir auch nicht die Frage beantworten, ob $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$ zu δ^2 assoziiert ist.

4 Boost und ultrarelativistischer Limes der Reissner-Nordstrøm Lösung

4.1 Boost und Limes der Geometrie

Die Reissner-Nordstrøm Metrik beschreibt das Gravitationsfeld eines Punktteilchens der Masse m und der elektrischen Ladung e und lautet in Schwarzschild-Koordinaten:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})\, dt^2 - (1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1}\, dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

wobei: $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$
Für die Durchführung des Boostes ist es jedoch günstiger, isotrope Koordinaten ($ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2)$) zu verwenden. Wir führen daher folgende Transformation der radialen Koordinate durch: $r = \bar{r}\,(1 + \frac{m}{\bar{r}} + \frac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})$
Und erhalten:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r(\bar{r})} + \frac{e^2}{r^2(\bar{r})})\, dt^2 - (1 + \frac{m}{\bar{r}} + \frac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^2\, (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2)$$

Nun führen wir zur radialen Koordinate $\bar{r}$ gehörende, asymptotische kartesische Koordinaten $x^m = (t, x, y, z)$ ein ($\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$) und wenden eine geschwindigkeitsabhängige Lorentztransformation in x-Richtung (Boost) bezüglich dieser neuen Koordinaten an:

$$\begin{aligned} t &\mapsto \acute{t} = \gamma(t + vx) \\ x &\mapsto \acute{x} = \gamma(x + vt) \\ y &\mapsto \acute{y} = y \\ z &\mapsto \acute{z} = z \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten $x^{\acute{m}} = (\acute{t}, \acute{x}, \acute{y}, \acute{z})$ nimmt die Metrik folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \tfrac{2m}{r(\bar{r})} + \tfrac{e^2}{r^2(\bar{r})})\, \gamma^2\, (d\acute{t} - v d\acute{x})^2 \\ &\quad -(1 + \tfrac{m}{\bar{r}} + \tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^2\, (\gamma^2(d\acute{x} - v d\acute{t})^2 + d\acute{y}^2 + d\acute{z}^2) \\ &= g_{00}(\bar{r})\, \gamma^2 (d\acute{t} - v d\acute{x})^2 - g_{11}(\bar{r})\, (\gamma^2(d\acute{x} - v d\acute{t})^2 + d\acute{y}^2 + d\acute{z}^2) \end{aligned}$$

mit: $g_{00}(\bar{r}) = (1 - \frac{2m}{r(\bar{r})} + \frac{e^2}{r^2(\bar{r})}) \quad g_{11}(\bar{r}) = (1 + \frac{m}{\bar{r}} + \frac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^2$
und: $\bar{r}^2(x^{\acute{m}}) = \gamma^2(\acute{x} - v\acute{t})^2 + y^2 + z^2$

Nun können wir darangehen, den ultrarelativistischen Limes ($v \to 1$) durchzuführen; dabei setzen wir:

$$m = p\sqrt{1 - v^2} = \tfrac{p}{\gamma}$$

$$e^2 = p_e^2\sqrt{1 - v^2} = \tfrac{p_e^2}{\gamma}$$

wobei die Momente p und p_e beim Limes $v \to 1$ konstant gehalten werden. Die Reskalierung der Masse verhindert, daß die Energie des Teilchens im Limes $v \to 1$ wegen der endliche Ruhmasse m divergiert. Wir halten also die totale Energie p des Teilchens konstant während die Ruhmasse gegen 0 geht (siehe Aichelburg und Sexl [11]).
Die Reskalierung der Ladung wird analog dazu vorgenommen, ist aber physikalisch nicht so gut motiviert, wie die der Masse (Loustó , Sánchez [14]). Die Rechnung zeigt, daß gerade diese Reskalierung (Ladung um den Faktor $(1-v^2)^{1/4}$ langsamer gegen 0 als die Masse) das Konvergieren der Funktionenfolgen in $\mathcal{D}'$ garantiert!

Unter Verwendung der Identität: $\gamma^2(d\acute{t} - v d\acute{x})^2 - d\acute{t}^2 + d\acute{x}^2 = \gamma^2(d\acute{x} - v d\acute{t})^2$ schreibt sich die Metrik:

$$ds^2 = \gamma^2(g_{00}(\bar{r}) - g_{11}(\bar{r}))\,(d\acute{t} - v d\acute{x})^2 \; + g_{11}(\bar{r})\,(d\acute{t}^2 - d\acute{x}^2 - d\acute{y}^2 - d\acute{z}^2)$$

Um den Limes durchzuführen berechnen wir zunächst den Koeffizienten von γ^2. Es gilt:

$$\begin{aligned}
g_{00}(\bar{r}) &= 1 - \tfrac{2m}{r(\bar{r})} + \tfrac{e^2}{r^2(\bar{r})} \\
&= 1 - \frac{2m}{(1+\frac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2}+\frac{m}{\bar{r}})\bar{r}} + \frac{e^2}{(1+\frac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2}+\frac{m}{\bar{r}})^2\bar{r}^2} \\
&= \frac{(e^2-m^2+4\bar{r}^2)^2}{(e^2-m^2-4m\bar{r}-4\bar{r}^2)^2} = \frac{4\bar{r}^4(1+\frac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2})^2}{4\bar{r}^4((1+\frac{m}{2\bar{r}})^2-\frac{e^2}{4\bar{r}^2})^2} \\
&= (1+\tfrac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2})^2\,(1+\tfrac{m}{\bar{r}}+\tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^{-2} \\
&=: A\,B
\end{aligned}$$

Nun entwicklen wir B in eine Binominalreihe. Da wir nur am Limes $v \to 1$ interessiert sind, behalten wir nur alle in $(1-v)$ relevanten Terme und brechen die Reihe nach der Ordnung $1/\bar{r}^3$ ab. So erhalten wir:

$$\begin{aligned}
B &= (1+\tfrac{m}{\bar{r}}+\tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^{-2} =: (1+X)^{-2} \\
(1+X)^{-2} &= 1 - 2X + 3X^2 - 4X^3 + \ldots \\
(1+\tfrac{m}{\bar{r}}+\tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^{-2} &= 1 - (\tfrac{2m}{\bar{r}} + \tfrac{2(m^2-e^2)}{4\bar{r}^2}) \\
&\quad +3\,(\tfrac{m^2}{\bar{r}^2} + \tfrac{2m(m^2-e^2)}{4\bar{r}^3} + O(1/\bar{r}^4)) \\
&\quad -4\,(\tfrac{m^3}{\bar{r}^3} + O(1/\bar{r}^4)) \\
&= 1 - \tfrac{2m}{\bar{r}} + \tfrac{e^2}{2\bar{r}^2} + \tfrac{5m^2}{2\bar{r}^2} - \tfrac{5m^3}{2\bar{r}^3} - \tfrac{3me^2}{2\bar{r}^3} + O(1/\bar{r}^4)
\end{aligned}$$

Und mit $A = (1 + \frac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2})^2 = 1 + \frac{e^2-m^2}{2\bar{r}^2} + O(1/\bar{r}^4)$ erhalten wir:

$$g_{00}(\bar{r}) = B\,A = 1 - \frac{2m}{\bar{r}} + \frac{e^2}{\bar{r}^2} + \frac{2m^2}{\bar{r}^2} - \frac{3m^2}{2\bar{r}^3} - \frac{5e^2m}{2\bar{r}^3} + O(1/\bar{r}^4)$$

Berechnen wir noch den räumlichen Metrikkoeffizienten bis zur Ordnung $1/\bar{r}^4$:

$$\begin{aligned} g_{11}(\bar{r}) &= (1 + \tfrac{m}{\bar{r}} + \tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^2 \\ &= 1 + \tfrac{2m}{\bar{r}} - \tfrac{e^2}{2\bar{r}^2} + \tfrac{3m^2}{2\bar{r}^2} + \tfrac{m^3}{2\bar{r}^3} - \tfrac{me^2}{2\bar{r}^3} + O(1/\bar{r}^4) \end{aligned}$$

so erhalten wir schlußendlich für den Koeffizienten von γ^2:

$$g_{00}(\bar{r}) - g_{11}(\bar{r}) = -\frac{4m}{\bar{r}} + \frac{3e^2}{2\bar{r}^2} + \frac{m^2}{2\bar{r}^2} - \frac{2e^2m}{\bar{r}^3} + \frac{2m^3}{\bar{r}^3} + O(1/\bar{r}^4)$$

Nun können den ultrarelativistischen Limes für diese fünf Terme ermitteln und beginnen mit der Berechnung der punktweisen Limiten.

Behauptung 4.1 *Für die Punkte $\acute{x} \neq \acute{t}$ gilt:*

- $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{4m}{\bar{r}} = \frac{4p}{|\acute{x}-\acute{t}|}$
- *Die anderen Terme verschwinden im Limes $v \to 1$.*

Auf der Hyperebene $\acute{x} = \acute{t}$ gilt:

- $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{4m}{\bar{r}}$ *und* $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{3e^2}{2\bar{r}^2}$ *divergieren*
- $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{m^2}{2\bar{r}^2}$ *und* $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{2e^2m}{\bar{r}^3}$ *endlich*
- $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{2m^3}{\bar{r}^3} = 0$

Der Übersichtlichkeit wegen verwenden wir die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} [\quad] &:= (\acute{x} - v\acute{t}) + (1-v^2)\rho^2 \\ \{\quad\} &:= \acute{x}^2(1-v) + (1+v)\rho^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^2 \tfrac{m}{\bar r} &= \frac{p}{[\quad]^{1/2}} &&\rightarrow \frac{p}{|\acute x-\acute t|} && \acute x \neq \acute t \\
&= \frac{p}{\sqrt{1-v}\,\{\quad\}^{1/2}} &&\rightarrow \infty && \acute x = \acute t \\[2ex]
\gamma^2 \tfrac{e^2}{\bar r^2} &= \frac{p_e^2\sqrt{1-v^2}}{[\quad]} &&\rightarrow 0 && \acute x \neq \acute t \\
&= \frac{p_e^2\sqrt{1-v^2}}{(1-v)\,\{\quad\}} &&\rightarrow \infty && \acute x = \acute t \\[2ex]
\gamma^2 \tfrac{m^2}{\bar r^2} &= \frac{p^2(1-v^2)}{[\quad]} &&\rightarrow 0 && \acute x \neq \acute t \\
&= \frac{p^2(1-v^2)}{(1-v)\,\{\quad\}} &&\rightarrow \frac{p^2}{\rho^2} && \acute x = \acute t \\[2ex]
\gamma^2 \tfrac{e^2 m}{\bar r^3} &= \frac{p p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{[\quad]^{3/2}} &&\rightarrow 0 && \acute x \neq \acute t \\
&= \frac{p p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{(1-v)^{3/2}\,\{\quad\}^{3/2}} &&\rightarrow \frac{p p_e^2}{\rho^3} && \acute x = \acute t \\[2ex]
\gamma^2 \tfrac{m^3}{\bar r^3} &= \frac{p^3(1-v^2)^2}{[\quad]^{3/2}} &&\rightarrow 0 && \acute x \neq \acute t \\
&= \frac{p^3(1-v^2)^2}{(1-v)^{3/2}\,\{\quad\}^{3/2}} &&\rightarrow 0 && \acute x = \acute t
\end{aligned}$$

Als nächsten Schritt berechnen wir die distributionellen Limiten der fünf Terme. Da - analog zum Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes - zu hohe Potenzen von $1/\rho$ auftreten, und daher die betrachteten Funktionenfolgen nicht in $L^1_{\rm loc}(R^4)$ liegen, müssen wir die Definitionsmenge auf $\Omega := R^4 \setminus \{\rho = 0\}$ beschränken und Limiten in $\mathcal{D}'(\Omega)$ betrachten.
Wir behandeln die einzelnen Funktionenfolgen getrennt.

Der 1. Term $\gamma^2 \frac{4m}{\bar r}$ besitzt direkt keinen Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$, aber man kann einen Term abspalten, der zwar (für $\acute x = \acute t$) singulär ist, aber nicht zum Riemann-Tensor beiträgt, also für die physikalische Situation unerheblich ist. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim \gamma^2 \tfrac{4m}{\bar r} &= \lim \left\{ \tfrac{4p}{((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2)^{1/2}} \right\} \\
&= \underbrace{\lim \left\{ \frac{4p}{((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2)^{1/2} - ((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2))^{1/2}} \right\}}_{(1)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{4p}{\mid \acute t - \acute x \mid}}_{(2)}
\end{aligned}
$$

(2) ist der singuläre Term, der nicht zum Riemann-Tensor beiträgt; wir werden ihn später durch eine ebenfalls singuläre Koordinatentransformation zum verschwinden bringen. Diese Vorgangsweise ist zwar mathematisch nicht ganz zufriedenstellend, aber rechtfertigt sich durch physikalische Argumentation (die Krümmung ändert sich nicht). Wir folgen hierbei streng der Argumentation von [11] und [14].
Nach Abspaltung des singulären Terms hat nun (1) einen Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Behauptung 4.2 *In $\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt:*

$$
\lim_{v\to 1} \frac{4p}{((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2)^{1/2} - ((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2))^{1/2}} = -4p \ln \rho^2 \delta(\acute x - \acute t)
$$

Wir verwenden Satz 3.1 und zeigen zunächst (i):

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\acute x} (1)\,(\bar x)\, d\bar x &= \int_{-\infty}^{\acute x} \tfrac{4p}{((\bar x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2)^{1/2} - ((\bar x - v\acute t)^2 + (1-v^2))^{1/2}}\, d\bar x \\
&= 4p \ln \left\{ \tfrac{((1-v^2)\rho^2 + (\acute x - v\acute t)^2)^{1/2} + (\acute x - v\acute t)}{((1-v^2) + (\acute x - v\acute t)^2)^{1/2} + (\acute x - v\acute t)} \right\} \\
&\to 4p \ln \left\{ \tfrac{|\acute x - \acute t| + (\acute x - \acute t)}{|\acute x - \acute t| + (\acute x - \acute t)} \right\} \\
&= 4p \begin{cases} \ln 1 = 0 & (\acute x - \acute t) > 0 \\ \ln „\tfrac{0}{0}“ & (\acute x - \acute t) < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Für den Fall $(\acute{x}-\acute{t}) < 0$ müssen wir also die Regel von de l'Hospital verwenden:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dv}\left\{\tfrac{((1-v^2)\rho^2+(\acute{x}-v\acute{t})^2)^{1/2}+(\acute{x}-v\acute{t})}{((1-v^2)+(\acute{x}-v\acute{t})^2)^{1/2}+(\acute{x}-v\acute{t})}\right\} \\
= \quad & \tfrac{(1/2)((1-v^2)\rho^2+(\acute{x}-v\acute{t})^2)^{(-1/2)}(-2v\rho^2-2\acute{t}(\acute{x}-v\acute{t}))-\acute{t}}{(1/2)((1-v^2)+(\acute{x}-v\acute{t})^2)^{(-1/2)}(-2v-2\acute{t}(\acute{x}-v\acute{t}))-\acute{t}} \\
\to \quad & \tfrac{|\acute{x}-\acute{t}|^{-1}(-\rho^2-\acute{x}\acute{t}+\acute{t}^2)-\acute{t}}{|\acute{x}-\acute{t}|^{-1}(-1-\acute{x}\acute{t}+\acute{t}^2)-\acute{t}} \qquad (v \to 1) \\
= \quad & \tfrac{-\acute{t}+(\acute{x}-\acute{t})^{-1}(\rho^2+\acute{t}(\acute{t}-\acute{x}))}{-\acute{t}+(\acute{x}-\acute{t})^{-1}(1+\acute{t}(\acute{t}-\acute{x}))} \\
= \quad & \tfrac{-\acute{t}+\frac{\rho^2}{\acute{x}-\acute{t}}+t}{-\acute{t}+\frac{1}{\acute{x}-\acute{t}}+t} \;=\; \tfrac{\rho^2/(\acute{x}-\acute{t})}{1/(\acute{x}-\acute{t})} \;=\; \rho^2
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt (punktweise):

$$\lim \int_{-\infty}^{\acute{x}} (1)\,(\bar{x})\, d\bar{x} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & (\acute{x}-\acute{t}) > 0 \\ 4p\ln\rho^2 & (\acute{x}-\acute{t}) < 0 \end{array} \right\} = 4p\ln\rho^2\theta(\acute{t}-\acute{x})$$

Außerdem gilt die Abschätzung: $| \int_{-\infty}^{\acute{x}} (1)\,(\bar{x})\, d\bar{x} \,|\leq|\, \ln\rho^2 \,|\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\;\forall v$

Und so erhalten wir als Ergebnis:

$$\lim_{v\to 1}(1) \;=\; -4p\ln\rho^2\delta(\acute{x}-\acute{t}) \qquad \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Behauptung 4.3 $\lim_{v\to 1}\frac{3}{2}\gamma^2\frac{e^2}{\acute{r}^2} = \frac{3}{2}p_e^2\rho^{-1}\pi\delta(\acute{x}-\acute{t})$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$

Zunächst formen wir um:

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to 1}\gamma^2\tfrac{e^2}{\acute{r}^2} \quad &= \quad \lim \tfrac{\gamma p_e^2}{\gamma^2(\acute{x}-v\acute{t})^2+\rho^2} \\
&= \quad \lim \tfrac{\gamma^{-1}p_e^2}{(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2}
\end{aligned}$$

Nun wenden wir wiederum Satz 3.1 an und zeigen zunächst die Vorraussetzung (i):

$$\begin{aligned}
G_v \quad &:= \quad \int^{\acute{x}} \tfrac{\gamma^{-1}p_e^2}{(\bar{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2}\, d\bar{x} \\
&= \quad p_e^2\rho^{-1}\arctan\left\{\tfrac{\acute{x}-v\acute{t}}{\sqrt{1-v^2}\rho}\right\} \\
\lim G_v \quad &= \quad p_e^2\rho^{-1}\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\pi}{2} & (\acute{x}-\acute{t}) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & (\acute{x}-\acute{t}) < 0 \end{array} \right. \\
&= \quad p_e^2\rho^{-1}\left\{\tfrac{\pi}{2}\theta(\acute{x}-\acute{t}) - \tfrac{\pi}{2}\theta(\acute{t}-\acute{x})\right\} \qquad \text{(punktweise)}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt: $\mid G_v \mid \leq \frac{p_e^2 \pi}{2\rho} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\, \forall v$
Durch Ableiten erhalten wir nun das Ergebnis:

$$\lim \frac{3}{2}\gamma^2 \frac{e^2}{\bar{r}^2} = \frac{3}{2} p_e^2 \rho^{-1} \pi \delta(\acute{x} - \acute{t}) \quad \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Dieser Term besitzt nur aufgrund der Reskalierung der Ladung einen Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$; ohne Reskalierung wäre er divergent (analog der $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente des Energie-Impuls-Tensors des Coulombfeldes im flachen Raum).

Behauptung 4.4 $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{m^2}{2\bar{r}^2} = 0$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$

Diese Behauptung zeigen wir wie schon früher durch eine $\| \quad \|_1$- Abschätzung (siehe Abschnitt 3.3.2, Behauptung 3.6).

$$\begin{aligned}
\|\gamma^2 \tfrac{m^2}{2\bar{r}^2}(\acute{x})\|_1 &= \tfrac{(1-v^2)p^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{d\acute{x}}{(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2} \\
&= \tfrac{(1-v^2)p^2}{2\sqrt{1-v^2}\,\rho} \arctan\left(\tfrac{(\acute{x}-v\acute{t})}{\sqrt{1-v^2}\,\rho}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \tfrac{\pi p^2}{2\rho}\sqrt{1-v^2} \\
&\to 0 \quad v \to 1,\ \text{pktw.}
\end{aligned}$$

Die Integration in den restlichen Variablen über kompakte Mengen $\subseteq \Omega$ (typischer Träger von Testfunktionen) liefert nur Konstanten und somit gilt: $\lim \gamma^2 \frac{m^2}{2\bar{r}^2} = 0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Behauptung 4.5 $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{2e^2 m}{\bar{r}^3} = 0$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|\gamma^2 \tfrac{2e^2 m}{\bar{r}^3}(\acute{x})\|_1 &= 2(1-v^2)^{3/2} p p_e^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tfrac{d\acute{x}}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \\
&= 2(1-v^2)^{3/2} p p_e^2 \tfrac{(\acute{x}-v\acute{t})}{(1-v^2)\rho^2\sqrt{(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \tfrac{2pp_e^2}{\rho^2}\sqrt{1-v^2} \\
&\to 0 \quad v \to 1,\ \text{pktw.}
\end{aligned}$$

Die restliche Integration ist wieder harmlos und somit verschwindet der Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Auch dieser Term würde ohne Reskalierung der Ladung divergieren.

Behauptung 4.6 $\lim_{v\to 1} \gamma^2 \frac{2m^3}{\bar{r}^3} = 0$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$

Diese Behauptung können wir mit einer einfacheren Methode zeigen. Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen 0 und erfüllt die Vorraussetzungen des Lebesgueschen Satzes über dominierte Konvergenz, denn:

$$
\begin{aligned}
|\,\gamma^2 \tfrac{2m^3}{\bar r^3}\,| &= \frac{2(1-v^2)^2 p^3}{((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2)^{3/2}} = \frac{2(1-v^2)^2 p^3}{(1-v^2)^{3/2}\rho^3\,[1+\underbrace{\frac{(\acute x - v\acute t)^2}{(1-v^2)\rho^2}}_{\text{pos.}}]^{3/2}} \\
&\leq \frac{2p^3}{\rho^3}\sqrt{1-v^2} \leq \frac{2p^3}{\rho^3} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)\,\forall v
\end{aligned}
$$

Also strebt auch das Integral von $\gamma^2 \frac{2m^3}{\bar r^3}$ auf kompakten Mengen gegen 0, und somit verschwindet der Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Die höheren Terme in der Reihenentwicklung beinhalten noch höhere Potenzen von $(1-v)$ in Zähler und somit gehen sie erst recht im Limes gegen Null (punktweise und in $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Nun betrachten wir noch den Limes des Koeffizienten $g_{11}(\bar r)$, der ja als Faktor vor dem flachen Anteil der Metrik auftritt. Es gilt:

$$
g_{11}(\bar r) = 1 + \frac{2m}{\bar r} - \frac{e^2}{2\bar r^2} + \frac{3m^2}{2\bar r^2} + O(1/\bar r^3)
$$

Behauptung 4.7 *Im punktweisen Limes gilt:* $g_{11}(\bar r) \to 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{\bar r} &= \frac{p}{\gamma(\gamma^2(\acute x - v\acute t)^2 + \rho^2)^{1/2}} = \frac{(1-v^2)p}{((\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2)^{1/2}} \\
&\to 0 \qquad (v \to 1,\ \acute x \neq \acute t) \\
&= \frac{p(1-v)(1+v)}{(\acute x^2(1-v) + (1+v)\rho^2)^{1/2}(1-v)^{1/2}} \qquad (\acute x = \acute t) \\
&= \frac{p(1-v)^{1/2}(1+v)}{(\acute x^2(1-v) + (1+v)\rho^2)^{1/2}} \to 0 \qquad (v \to 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{e^2}{\bar r^2} &= \frac{p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{(\acute x - v\acute t)^2 + (1-v^2)\rho^2} \to 0 \qquad (v \to 1,\ \acute x \neq \acute t) \\
&= \frac{p_e^2(1-v)^{3/2}(1+v)^{3/2}}{(\acute x(1-v) + (1+v)\rho^2)(1-v)} \qquad (\acute x = \acute t) \\
&= \frac{p_e^2(1-v)^{1/2}(1+v)^{3/2}}{\acute x(1-v) + (1+v)\rho^2} \to 0 \qquad (v \to 1)
\end{aligned}
$$

Die höheren Ordnungen in der Reihenentwicklung fallen noch stärker ab.

Behauptung 4.8 *Es gilt auch in* $\mathcal{D}'(\Omega)$: $\lim_{v\to 1} g_{11}(\bar{r}) \to 1$

Die beiden im punktweisen Limes verschwindenden Terme erfüllen jeweils die Abschätzung für den Lebesgueschen Satz über dominierte Konvergenz.

$$
\begin{array}{lclcl}
\mid \frac{m}{\bar{r}} \mid & = & \frac{(1-v^2)p}{\sqrt{1-v^2}\,\rho\,[1+\frac{(\acute{x}-v\acute{t})^2}{(1-v^2)\rho^2}]^{1/2}} & \leq & \frac{p}{\rho} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,\forall v \\
\mid \frac{e^2}{\bar{r}^2} \mid & \leq & \frac{(1-v^2)^{3/2}p_e^2}{(1-v^2)\rho^2} & \leq & \frac{p_e^2}{\rho^2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,\forall v
\end{array}
$$

Fassen wir nun alle Rechnungen zusammen so erhalten wir für den ultrarelativistischen Limes der Reissner-Nordstrøm Metrik:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \gamma^2(g_{00}(\bar{r}) - g_{11}(\bar{r}))\,(d\acute{t} - v d\acute{x})^2 \\
&\quad + g_{11}(\bar{r})\,(d\acute{t}^2 - d\acute{x}^2 - d\acute{y}^2 - d\acute{z}^2) \\
\lim ds^2 &= \lim\Big(\gamma^2(g_{00}(\bar{r}) - g_{11}(\bar{r}))\Big)\,(d\acute{t} - d\acute{x})^2 \\
&\quad + \lim(g_{11}(\bar{r}))\,(d\acute{t}^2 - d\acute{x}^2 - d\acute{y}^2 - d\acute{z}^2) \\
&= (\tfrac{-4p}{|\acute{x}-\acute{t}|} + 4p\ln\rho^2 + \tfrac{3}{2}\pi p_e^2\rho^{-1})\,\delta(\acute{x}-\acute{t})\,(d\acute{t} - d\acute{x})^2 \\
&\quad + (d\acute{t}^2 - d\acute{x}^2 - d\acute{y}^2 - d\acute{z}^2)
\end{aligned}
$$

Wie bereits angedeutet, nehmen wir nun eine weitere Transformation der Metrik vor. Die (selbst singuläre) Transformation bringt den singulären, aber für die Krümmung unerheblichen Term $4p/\mid \acute{t} - \acute{x} \mid$ zum verschwinden. Wir setzen:

$$
\begin{array}{rclcl}
\hat{x} & := & \acute{x} & - & 2p\ln(\mid \acute{t} - \acute{x} \mid) \\
\hat{t} & := & \acute{t} & - & 2p\ln(\mid \acute{t} - \acute{x} \mid)
\end{array}
$$

Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
d\acute{t} - d\acute{x} &= d\hat{t} - d\hat{x} \\
d\acute{t} + d\acute{x} &= d\hat{t} + d\hat{x} - \tfrac{4p}{|\acute{t}-\acute{x}|}\,(d\acute{t} - d\acute{x})
\end{aligned}
$$

Die Metrik transformiert sich zu:

$$
ds^2 = (d\hat{t} - d\hat{x})^2\,\delta(\hat{x} - \hat{t})\,(8p\ln\rho + \tfrac{3}{2}\pi\tfrac{p_e^2}{\rho}) + (d\hat{t}^2 - d\hat{x}^2 - d\acute{y}^2 - d\acute{z}^2)
$$

Schließlich führen wir noch Nullkoordinaten ein:

$$
\begin{aligned}
u &:= \hat{x} - \hat{t} \\
v &:= \hat{x} + \hat{t}
\end{aligned}
$$

So erhalten wir als Endergebnis für den ultrarelativistischen Limes der Reissner-Nordstrøm Metrik in $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$ds^2 = \left\{ 8p \ln \rho + \frac{3}{2}\pi \frac{p_e^2}{\rho} \right\} \delta(u)\, du^2 - dudv - d\acute{y}^2 - d\acute{z}^2$$

Diese Metrik repräsentiert das Gravitationsfeld eines geboosteten Punktteilchens der Masse m und der elektrischen Ladung e im ultrarelativistischen Limes $v \to 1$ mit festgehaltenen Momenten p bzw. p_e und Reskalierung $m = p/\gamma$ bzw. $e^2 = p_e^2/\gamma$.

Die Metrik gehört der Klasse der pp-Wellen an und ist überall flach, außer auf der Nullebene $u = 0$, die normal auf die Bewegungsrichtung des Teilchens steht; dort besitzt sie eine δ-förmige Profilfunktion. Dabei ist die ρ-Abhängigkeit von der gravitativen Masse und vom elektromagnetischen Feld verschieden.

Der Limes ist nur aufgrund der Reskalierung sowohl der Masse, als auch der Ladung in $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiert. Für das elektromagnetische Feld und den Energie-Impuls-Tensor hat diese Reskalierung weitreichende Konsequenzen, wie wir in den nächsten beiden Abschnitten sehen werden.

4.2 Boost und Limes des elektromagnetischen Feldes

Das elektromagnetische Potential A_μ der Reissner-Nordstrøm Lösung nimmt bei geeigneter Wahl der Eichung in Schwarzschild-Koordinaten folgende, einfache Gestalt an:

$$A_0 = \frac{e}{r} \qquad A_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

Günstiger ist es jedoch, im Folgenden den Formenkalkül zu verwenden. Die Potential-1-Form lautet dann: $A = \frac{e}{r}dt$. Daraus berechnet sich die Feldstärken-2-Form des eletktromagnetischen Feldes (in Schwarzschildkoordinaten) zu: $F = \frac{e}{r^2}(dt \wedge dr)$. Nun führen wir wiederum isotrope Koordinaten ein. Es gilt:

$$\begin{aligned} r &= \bar{r}(1 + \tfrac{m}{\bar{r}} + \tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2}) \\ dr &= \left\{1 + \tfrac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2}\right\} d\bar{r} \\ F &= \tfrac{e}{r^2(\bar{r})}\left\{1 + \tfrac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2}\right\} dt \wedge d\bar{r} \end{aligned}$$

Um den Boost analog zur Geometrie durchführen zu können, transformieren wir nun auf zur isotropen, radialen Koordinate $\bar{r}$ gehörende, quasikartesische Koordinaten ($x^i = (t, x, y, z)$, $\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$).
Mit $d\bar{r} = \frac{x^i}{\bar{r}}dx^i$ gilt für die Feldstärken-2-Form:

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{e}{r^2(\bar{r})}\left\{1 + \tfrac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2}\right\} \tfrac{x^i}{\bar{r}}\,(dt \wedge dx^i) \\ &= \tfrac{e}{\bar{r}^3}\left\{\frac{1+\frac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2}}{(1+\frac{m}{\bar{r}}+\frac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^2}\right\} x^i\,(dt \wedge dx^i) \\ &= \tfrac{e}{\bar{r}^3}\, G(\bar{r})\,(dt \wedge (xdx + ydy + zdz)\,) \\ G(\bar{r}) &:= \tfrac{4\bar{r}^2(4\bar{r}^2-m^2+e^2)}{(4\bar{r}^2+4\bar{r}m+m^2-e^2)^2} \end{aligned}$$

Daraus lesen wir nun die kovarianten Komponenten des elektromagnetischen Feldstärkentensors ab:

$$F_{0\alpha} = \frac{ex^\alpha}{\bar{r}^3}\, G(\bar{r})$$

Gegenüber dem Coulombfeld im flachen Raum (in kartesischen Koordinaten) tritt hier der Zusatzterm $G(\bar{r})$ auf.
Wir führen nun den Boost analog zur Geometrie durch ($x^m = (t, x, y, z) \mapsto x^{\acute{m}} = (\acute{t}, \acute{x}, \acute{y}, \acute{z})$) und erhalten mit $L^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $F_{\acute{i}\acute{k}}(x^{\acute{m}}) =$

$L_{\acute{i}}^{\ l} L_{\acute{k}}^{\ n} F_{ln}(x^m)$ für den geboosteten Feldtensor:

$$F_{\acute{i}\acute{k}}(x^{\acute{m}}) = \frac{e\,(1-v^2)G(\bar{r})}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & \acute{x}-v\acute{t} & \acute{y} & \acute{z} \\ -\acute{x}+v\acute{t} & 0 & -v\acute{y} & -v\acute{z} \\ -\acute{y} & v\acute{y} & 0 & 0 \\ -\acute{z} & v\acute{z} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wobei: $\rho^2 := (y^2+z^2) = (\acute{y}^2+\acute{z}^2)$

Um den ultrarelativistischen Limes durchführen zu können, entwickeln wir nun den Faktor $G(\bar{r})$ in eine Binominalreihe bis zur Ordnung $O(1/r^3)$. Der Reihenabbruch rechtfertigt sich wiederum dadurch, daß wir nur am Limes $v \to 1$ interressiert sind, und die Terme höherer Ordnungen in eben diesem Limes verschwinden.

$$\begin{aligned} G(\bar{r}) &= \tfrac{4\bar{r}^2(4\bar{r}^2-m^2+e^2)}{(4\bar{r}^2+4\bar{r}m+m^2-e^2)^2} \\ &= \left(1+\tfrac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2}\right)\left(1+\tfrac{m}{\bar{r}}+\tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2}\right)^{-2} \\ (1+X)^{-2} &= 1-2X+3X^2+O(1/r^3) \\ \left(1+\tfrac{m}{\bar{r}}+\tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2}\right)^{-2} &= 1-\tfrac{2m}{\bar{r}}-\tfrac{5m^2}{2\bar{r}^2}+\tfrac{e^2}{2\bar{r}^2}+O(1/r^3) \\ G(\bar{r}) &= 1-\tfrac{2m}{\bar{r}}+\tfrac{3e^2}{4\bar{r}^2}+\tfrac{9m^2}{4\bar{r}^2}+O(1/r^3) \end{aligned}$$

Mit den Reskalierungen $m = p\sqrt{1-v^2} = \frac{p}{\gamma}$ und $e^2 = p_e^2\sqrt{1-v^2} = \frac{p_e^2}{\gamma}$ (wobei die Momente p und p_e im Limes konstant gehalten werden), erhalten wir für den gemeinsamen Faktor aller Komponenten:

$$\begin{aligned} \tfrac{e\,(1-v^2)G(\bar{r})}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} &= \tfrac{p_e(1-v^2)^{5/4}}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}}\left(1-\tfrac{2m}{\bar{r}}+\tfrac{3e^2}{4\bar{r}^2}+\tfrac{9m^2}{4\bar{r}^2}+O(1/r^3)\right) \\ &= \tfrac{p_e(1-v^2)^{5/4}}{[\quad]^{3/2}}\left(1-\tfrac{2p(1-v^2)}{[\quad]^{1/2}}+\tfrac{3p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{4[\quad]}\right. \\ &\qquad \left.+\tfrac{9p^2(1-v^2)^2}{4[\quad]}+O(1/\bar{r}^3)\right) \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder die Abkürzung: $[\quad] := (\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2$

Den ultrarelativistischen Limes des Feldstärkentensors berechnen wir explizit nur für die Komponenten $F_{\acute{0}\acute{1}}$ und $F_{\acute{0}\acute{2}}$. Die übrigen Komponenten können völlig anlog behandelt werden.

Behauptung 4.9 *$F_{\acute{0}\acute{1}}$ verschwindet im punktweisen Limes $v \to 1$.*

$$\lim_{v\to 1} F_{\acute{0}\acute{1}}(x^{\acute{m}}) = \lim \Big\{ \tfrac{p_e\,(1-v^2)^{5/4}\,(\acute{x}-v\acute{t})}{[\quad]^{3/2}}$$

$$\Big(1 - \tfrac{2p(1-v^2)}{[\quad]^{1/2}} + \tfrac{3p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{4[\quad]} + \tfrac{9p^2(1-v^2)^2}{4[\quad]} + O(1/\bar{r}^3)\Big) \quad \Big\}$$

1. Term:

$$\tfrac{p_e\,(1-v^2)^{5/4}\,(\acute{x}-v\acute{t})}{(\,(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \quad \to 0 \qquad (v \to 1,\ \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \tfrac{p_e\,(1-v)^{9/4}\,(1+v)^{5/4}\acute{x}}{(1-v)^{3/2}\,(\acute{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^{3/2}} \quad \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\ v \to 1)$$

Die höheren Terme verschwinden ebenfalls im punktweisen Limes, da die Potenzen von $(1-v)$ im Zähler schneller anwachsen als im Nenner und so das Abfallverhalten noch verstärkt wird.

Behauptung 4.10 *$F_{\acute{0}\acute{1}}$ verschwindet im Limes $v \to 1$ auch in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Diese Behauptung zeigen wir wiederum durch $\|\quad\|_1$-Abschätzungen.

$$\|\ 1.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\ \|_1 \quad = \quad p_e(1-v^2)^{5/4} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{(\acute{x}-v\acute{t})\,d\acute{x}}{[\quad]^{3/2}}}_{-[\quad]^{-1/2}}$$

$$= \quad \tfrac{p_e(1-v^2)^{5/4}}{\sqrt{1-v^2}\,\rho} \ \to\ 0$$

Die Integration in den verbleibenden Variablen über kompakte Mengen $\subseteq \Omega$ liefert nur Konstanten.
Die höheren Terme zeigen noch stärkeres Abfallverhalten; es gilt:

$$\|\ 2.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\ \|_1 \quad \propto \quad \tfrac{(1-v^2)^{9/4}}{(1-v^2)\rho^2} \ \to\ 0$$

$$\|\ 3.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\ \|_1 \quad \propto \quad \tfrac{(1-v^2)^{11/4}}{(1-v^2)^{3/2}\rho^3} \ \to\ 0$$

$$\|\ 4.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\ \|_1 \quad \propto \quad \tfrac{(1-v^2)^{13/4}}{(1-v^2)^{3/2}\rho^3} \ \to\ 0$$

Und die restliche Integration ist wieder harmlos.

Behauptung 4.11 *$F_{\acute{0}\acute{2}}$ verschwindet im punktweisen Limes fast überall; nur der 1. Term divergiert auf der Hyperebene $\acute{x} = \acute{t}$.*

$$F_{\acute{0}\acute{2}}(x^{\acute{m}}) = \frac{p_e\,(1-v^2)^{5/4}\acute{y}}{[\quad]^{3/2}}\Big(1 - \frac{2p(1-v^2)}{[\quad]^{1/2}} + \frac{3p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{4[\quad]} + \frac{9p^2(1-v^2)^2}{4[\quad]} + O(1/\bar{r}^3)\Big)$$

1. Term:

$$\frac{p_e\,(1-v^2)^{5/4}\acute{y}}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^{3/2}} \quad\rightarrow\quad 0 \qquad (v\rightarrow 1,\ \acute{x}\neq\acute{t})$$

$$= \frac{p_e\,(1-v)^{5/4}\,(1+v)^{5/4}\acute{y}}{(1-v)^{3/2}\,(\acute{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^{3/2}} \quad\rightarrow\quad \infty \qquad (\acute{x}=\acute{t},\ v\rightarrow 1)$$

2. Term:

$$\frac{2p_e p(1-v^2)^{9/4}\acute{y}}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^2} \quad\rightarrow\quad 0 \qquad (v\rightarrow 1,\ \acute{x}\neq\acute{t})$$

$$= \frac{2p_e p(1-v)^{9/4}(1+v)^{9/4}\acute{y}}{(1-v)^2\,((\acute{x}^2(1-v)+(1+v)\rho^2)^2} \quad\rightarrow\quad 0 \qquad (\acute{x}=\acute{t},\ v\rightarrow 1)$$

Die höheren Terme fallen wiederum noch stärker ab.

Behauptung 4.12 *$F_{\acute{0}\acute{2}}$ verschwindet im Limes $v\rightarrow 1$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

$$\begin{aligned}
\|\,1.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\,\|_1 &= p_e(1-v^2)^{5/4}\ |\,y\,|\ \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{d\acute{x}}{[\quad]^{3/2}}}_{\frac{(\acute{x}-v\acute{t})}{(1-v^2)\rho^2[\,]^{1/2}}} \\
&= \frac{2p_e(1-v^2)^{5/4}|y|}{(1-v^2)\,\rho^2} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\,2.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\,\|_1 &= 2pp_e(1-v^2)^{9/4}\ |\,y\,|\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\acute{x}}{[\quad]^2} \\
&= \frac{\pi pp_e(1-v^2)^{9/4}|y|}{(1-v^2)^{3/2}\,\rho^3} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

$$\|\,3.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\,\|_1 \ \propto\ \frac{(1-v^2)^{11/4}}{(1-v^2)^2\rho^4} \rightarrow 0$$

$$\|\,4.\,\mathrm{Term}(\acute{x})\,\|_1 \ \propto\ \frac{(1-v^2)^{13/4}}{(1-v^2)^2\rho^4} \rightarrow 0$$

Die restliche Integration wieder ist harmlos.

Fassen wir nun alle Rechnungen zusammen, so erhalten wir als Ergebnis:
Der Feldstärkentensor der Reissner-Nordstrøm Lösung verschwindet - mit der Reskalierung der Ladung - im ultrarelativistischen Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\lim_{v\to 1} F_{\acute{i}\acute{k}}(x^{\acute{m}}) = 0$$

Im Vergleich mit dem ultrarelativistischen Limes des Coulombfeldes im flachen Raum zeigen sich hier folgende zwei Punkte:

- Der Zusatzterm $G(\bar{r})$ (der aus der Transformation auf isotrope Koordinaten stammt) spielt im Limes keine Rolle.
- Das Feld der Reissner-Nordstrøm Lösung verschwindet, im Unterschied zum Coulombfeld im flachen Raum, wegen der Reskalierung der Ladung mit $e := p_e/\sqrt{\gamma}$, die wir einführen mußten, um einen, im Sinne der Distributionentheorie definierten, ultrarelativistischen Limes der Metrik zu erhalten.

Die Reskalierung der Ladung hat noch weitere Konsequenzen; nämlich für den Limes des Energie-Impuls-Tensors, wie wir in nächsten Abschnitt sehen werden.

4.3 Boost und Limes des Energie-Impuls-Tensors

Zunächst berechnen wir den Energie-Impuls-Tensor der Reissner-Nordstrøm Lösung in quasikartesischen Koordinaten ($x^i = (t, x, y, z)$, $\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$) aus dem Feldtensor $F_{0\alpha} = \frac{ex^\alpha}{\bar{r}^3} G(\bar{r})$ gemäß:

$$4\pi T^i{}_k = F^{il} F_{lk} - \frac{1}{4} \delta^i_k F_{lm} F^{ml}$$

Da der metrische Tensor in diesen Koordinaten die Gestalt $g_{ik} = \mathrm{diag}(\, g_{00}, -g_{11}, -g_{11}, -g_{11})$
mit $g_{00}(\bar{r}) = 1 - \frac{m}{r(\bar{r})} + \frac{e^2}{r^2(\bar{r})} = \left(1 + \frac{e^2 - m^2}{4\bar{r}^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{\bar{r}} + \frac{m^2 - e^2}{4\bar{r}^2}\right)^{-2}$
und $g_{11}(\bar{r}) = \left(1 + \frac{m}{\bar{r}} + \frac{m^2 - e^2}{4\bar{r}^2}\right)^2$ annimmt ergibt sich für den Spurterm:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\delta^i_k F_{lm} F^{ml} &= \tfrac{1}{4}\delta^i_k \left(F_{\alpha 0} F^{0\alpha} + F_{0\beta} F^{\beta 0}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\delta^i_k g^{00} g^{\alpha\alpha} F_{\alpha 0} F_{0\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2}\delta^i_k g^{00} g^{\alpha\alpha} \tfrac{e^2 G^2}{\bar{r}^6} \left(\sum x^\alpha x^\alpha\right) \\
&= \tfrac{e^2 G^2}{2\bar{r}^4} g^{00} g^{11} \delta^i_k
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors:

$$\begin{aligned}
4\pi T^0{}_0 &= g^{00} g^{\alpha\alpha} F_{0\alpha} F_{\alpha 0} - \tfrac{e^2 G^2}{2\bar{r}^4} g^{00} g^{11} \delta^i_k \\
&= -g^{00} g^{11} \left(\tfrac{e^2 G^2}{\bar{r}^6}(-x^\alpha) x^\alpha + \tfrac{e^2 G^2}{2\bar{r}^4}\right) \\
&= g^{00} g^{11} \tfrac{e^2 G^2}{2\bar{r}^4}
\end{aligned}$$

$$4\pi T^0{}_\alpha = F^{0\beta} F_{\beta\alpha} = 0$$

$$4\pi T^\alpha{}_0 = F^{\alpha\beta} F_{\beta 0} = 0$$

$$\begin{aligned}
4\pi T^\alpha{}_\beta &= F^{\alpha 0} F_{0\beta} = -g^{00} g^{\alpha\alpha} F_{\alpha 0} F_{0\beta} \\
&= g^{00} g^{11} \tfrac{e^2 G^2}{\bar{r}^6} x^\alpha x^\beta
\end{aligned}$$

$$4\pi T^\alpha{}_\alpha = g^{00} g^{11} \tfrac{e^2 G^2}{2\bar{r}^6} \left(x^\alpha x^\alpha - \left(\sum_{\beta \neq \alpha} x^\beta x^\beta\right)\right)$$

Insgesamt erhalten wir also für den Energie-Impuls-Tensor des Reissner-Nordstrøm Feldes in quasikartesische Koordinaten:

$$4\pi T^i{}_k = \frac{e^2 G^2}{2\bar{r}^6} g^{00} g^{11} \begin{pmatrix} \bar{r}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 - y^2 - z^2 & 2xy & 2xz \\ 0 & 2xy & -x^2 + y^2 - z^2 & 2yz \\ 0 & 2xz & 2yz & -x^2 - y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

Vom Energie-Impuls-Tensor des Coulombfeldes im flachen Raum unterscheidet sich $T^i{}_k$ nur durch den, aus der Koordinatentransformation entstandenen Zusatzterm G^2 und das Auftreten der Metrikkoeffizienten.

Nun wenden wir wieder den Boost in x-Richtung mit $L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ an und erhalten mittels $T^{\acute{i}}{}_{\acute{k}}(x^{\acute{l}}) = L^{\acute{i}}{}_m L_{\acute{k}}{}^n T^m{}_n(x^l)$ den Energie-Impuls-Tensor des transformierten Reissner-Nordstrøm Feldes:

$$4\pi T^{\acute{i}}_{\acute{k}}(x^{\acute{l}}) \;=\; \frac{e^2 G^2(\acute{r})\,(1-v^2)^2 g^{00} g^{11}}{2(\,(\acute{x} - v\acute{t})^2 + (1-v^2)\rho^2)^3}$$

$$\begin{pmatrix} (\acute{x}-v\acute{t})^2 + \frac{\rho^2}{\gamma^2} & -2v\rho^2 & 2v(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & 2v(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} \\ 2v\rho^2 & (\acute{x}-v\acute{t})^2 - \frac{\rho^2}{\gamma^2} & 2(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & 2(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} \\ -2v(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & 2(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & -(\acute{x}-v\acute{t})^2 + \frac{\acute{y}^2-\acute{z}^2}{\gamma^2} & 2(1-v^2)\acute{y}\acute{z} \\ -2v(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} & 2(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} & 2(1-v^2)\acute{y}\acute{z} & -(\acute{x}-v\acute{t})^2 + \frac{\acute{z}^2-\acute{y}^2}{\gamma^2} \end{pmatrix}$$

Günstiger ist es jedoch, im Folgenden Nullkoordinaten $x^{\tilde{i}} = (u, v, \acute{y}, \acute{z})$ zu verwenden, wo:

$$\begin{aligned} \acute{t} &\mapsto u := \acute{x} - \acute{t} \\ \acute{x} &\mapsto v := \acute{x} + \acute{t} \end{aligned}$$

Die Matrix der entsprechenden Koordinatentransformation hat daher die Gestalt $\bar{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Um außerdem die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors mit unteren Indices zu berechnen, müssen wir den inversen metrischen Tensor $g^{\tilde{i}\tilde{k}}$ in diesen Koordinaten $(x^{\tilde{i}})$ bestimmen. Zunächst erhalten wir mit $g^{\acute{i}\acute{k}} = L^{\acute{i}}_m L^{\acute{k}}_n g^{mn}$ den geboosteten Metriktensor, dann mittels

Transformation mit $\bar{L}$ den inversen metrischen Tensor in den gewünschten Koordinaten:

$$g^{\tilde{i}\tilde{k}} = \begin{pmatrix} \frac{(g^{11}-g^{00})(1+v)}{4(1-v)g^{00}g^{11}} & \frac{1}{4}(g_{00}+g_{11}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(g_{00}+g_{00}) & \frac{(g^{11}-g^{00})(1-v)}{4(1+v)g^{00}g^{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{11} \end{pmatrix}$$

wobei $g^{00} = g_{00}^{-1}$ und $g^{11} = g_{11}^{-1}$
Schließlich erhalten wir für den geboosteten Energie-Impuls-Tensor des Reissner-Nordstrøm Feldes in Nullkoordinaten mit unteren Indices:

$$4\pi T_{\tilde{i}\tilde{k}} = \frac{p_e^2 G^2(\bar{r})}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^3}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \begin{array}{c}(1-v)^{3/2}(1+v)^{7/2}(g^{11}-g^{00})(\acute{x}-v\acute{t})^2/4 \\ +(1-v)^{5/2}(1+v)^{9/2}(g^{00}+g^{11})\rho^2/4\end{array} & \begin{array}{c}(1-v^2)^{5/2}(g^{00}+g^{11})(\acute{x}-v\acute{t})^2/4 \\ +(1-v^2)^{7/2}(g^{11}-g^{00})\rho^2/4\end{array} \\ \begin{array}{c}(1-v^2)^{5/2}(g^{00}+g^{11})(\acute{x}-v\acute{t})^2/4 \\ +(1-v^2)^{7/2}(g^{11}-g^{00})\rho^2/4\end{array} & \begin{array}{c}(1-v)^{7/2}(1+v)^{3/2}(g^{11}-g^{00})(\acute{x}-v\acute{t})^2/4 \\ +(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}(g^{00}+g^{11})\rho^2/4\end{array} \\ (1-v)^{5/2}(1+v)^{7/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & -(1-v)^{7/2}(1+v)^{5/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} \\ (1-v)^{5/2}(1+v)^{7/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} & -(1-v)^{7/2}(1+v)^{3/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} (1-v)^{5/2}(1+v)^{7/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & (1-v)^{5/2}(1+v)^{7/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} \\ -(1-v)^{7/2}(1+v)^{5/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y} & -(1-v)^{7/2}(1+v)^{5/2}g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{z} \\ (1-v^2)^{5/2}g^{00}[(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)(\acute{z}^2-\acute{y}^2)] & -2(1-v^2)^{7/2}g^{00}\acute{y}\acute{z} \\ -2(1-v^2)^{7/2}g^{00}\acute{y}\acute{z} & (1-v^2)^{5/2}g^{00}[(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)(\acute{y}^2-\acute{z}^2)] \end{array} \right)$$

Wobei bereits die Resklalierung $e^2 = p_e^2/\gamma$ eingesetzt ist.

Um den ultrarelativistischen Limes berechnen zu können, entwickeln wir die Faktoren $G^2(\bar{r})$, $g^{00}(\bar{r})$ und $g^{11}(\bar{r})$ in Binominalreihen bis zur Ordnung

$O(1/\bar{r}^3)$ und erhalten so:

$$\begin{aligned}
G^2(\bar{r}) &= 1 - \tfrac{4m}{\bar{r}} + \tfrac{3e^2}{2\bar{r}^2} + \tfrac{17m^2}{2\bar{r}^2} + (1/\bar{r}^3) \\
g^{00}(\bar{r}) &= (1 + \tfrac{m}{\bar{r}} + \tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^2\,(1 + \tfrac{e^2-m^2}{4\bar{r}^2})^{-2} \\
&= 1 - \tfrac{2m}{\bar{r}} - \tfrac{2m^2}{\bar{r}^2} + O(1/\bar{r}^3) \\
g^{11}(\bar{r}) &= (1 + \tfrac{m}{\bar{r}} + \tfrac{m^2-e^2}{4\bar{r}^2})^{-2} \\
&= 1 - \tfrac{2m}{\bar{r}} + \tfrac{e^2}{2\bar{r}^2} + \tfrac{5m^2}{2\bar{r}^2} + O(1/\bar{r}^3) \\
g^{00} + g^{11} &= 2 - \tfrac{4m}{\bar{r}} + \tfrac{e^2}{2\bar{r}^2} + \tfrac{m^2}{2\bar{r}^2} + O(1/\bar{r}^2) \\
g^{00} - g^{11} &= -\tfrac{e^2}{2\bar{r}^2} - \tfrac{9m^2}{2\bar{r}^2} + O(1/\bar{r}^3)
\end{aligned}$$

Nun können wir darangehen, die ultrarelativistischen Limiten der einzelnen Komponenten und Terme zu berechnen. Wir verwenden wieder die Abkürzungen $[\ \ ] := (\acute{x} - v\acute{t})^2 + (1-v^2)\rho^2$ und $\{\,\} := \acute{x}^2(1-v) + (1+v)\rho^2$.

Behauptung 4.13 *$T_{\tilde{0}\tilde{0}}$ verschwindet im punktweisen Limes fast überall. Auf der Hyperebene $\acute{x} = \acute{t}$ divergiert der 2. Term in 1.Ordnung und hat in 2. Ordnung einen endlichen Grenzwert.*

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to 1} 4\pi T_{\tilde{0}\tilde{0}} &= \lim\Big\{ \ \frac{p_e^2(1-v)^{3/2}(1+v)^{7/2}G^2(g^{11}-g^{00})(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4[\ \ ]^3} \\
&\qquad + \frac{p_e^2(1-v)^{5/2}(1+v)^{9/2}G^2(g^{00}+g^{11})\rho^2}{4[\ \ ]^3}\ \Big\}
\end{aligned}$$

1. Term, 1. Ordnung $(G^2(g^{11}-g^{00}) \approx \frac{e^2}{\bar{r}^2} = \frac{p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{[\ \ ]})$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_e^4(1-v)^3(1+v)^5(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4(\,(\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^4} &\to 0 \qquad (v\to 1,\ \acute{x}\neq\acute{t}) \\
= \frac{p_e^4(1-v)^5(1+v)^5\acute{x}^2}{4(1-v)^4\{\,\}^4} &\to 0 \qquad (\acute{x}=\acute{t},\ v\to 1)
\end{aligned}$$

Die höheren Ordnungen fallen mit noch stärkeren Potenzen von $(1-v)$ ab.

2. Term, 1. Ordnung $(G^2(g^{00}+g^{11}) \approx 2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_e^2(1-v)^{5/2}(1+v)^{9/2}\rho^2}{2[\ \ ]^3} &\to 0 \qquad (v\to 1,\ \acute{x}\neq\acute{t}) \\
= \frac{p_e^2(1-v)^{5/2}(1+v)^{9/2}\rho^2}{2(1-v)^3\{\ \ \}^3} &\to \infty \qquad (\acute{x}=\acute{t},\ v\to 1)
\end{aligned}$$

2. Term, 2. Ordnung: $(G^2(g^{00}+g^{11}) \approx \frac{m}{\bar r} = \frac{p(1-v^2)}{[\quad]^{1/2}})$

$$\begin{aligned} \tfrac{p_e^2 p(1-v)^{7/2}(1+v)^{11/2}\rho^2}{4[\quad]^{7/2}} &\rightarrow 0 \qquad (v\rightarrow 1,\, \acute{x}\neq\acute{t}) \\ = \tfrac{p_e^2 p(1-v)^{7/2}(1+v)^{11/2}\rho^2}{4(1-v)^{7/2}\{\}^{7/2}} &\rightarrow \mathrm{const} \qquad (\acute{x}=\acute{t},\, v\rightarrow 1) \end{aligned}$$

Die höheren Ordnungen fallen stärker mit $(1-v)$ ab und veschwinden daher auch auf der Hyperebene $\acute{x}=\acute{t}$.

Behauptung 4.14 *In $\mathcal{D}'(\Omega)$ gilt:* $\lim\limits_{v\rightarrow 1} T_{\tilde{0}\tilde{0}} = \frac{3p_e^2}{16\rho^3}\,\delta(u)$

Der 1. Term verschwindet im distributionellen Limes, wie wir durch eine $\|\quad\|_1$-Abschätzung zeigen bereits in 1. Ordnung; die höheren Ordnungen fallen noch stärker ab.

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{p_e^4(1-v)^3(1+v)^5(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^4}\right\|_1 &= \tfrac{p_e^4(1-v)^3(1+v)^5}{4}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\acute{x}-v\acute{t})^2}{[\quad]^4}}_{\pi/(16(1-v^2)^{5/2}\rho^5)} \\ &= \tfrac{\pi p_e^4(1-v)^3(1+v)^5}{64(1-v^2)^{5/2}\rho^5} \\ &\rightarrow 0 \text{ und die restl. Integration ist harmlos} \end{aligned}$$

Auf den 2. Term, 1. Ordnung wenden wir Satz 3.1 an und zeigen zunächst die Vorraussetzung (i):

$$\frac{2p_e^2(1-v)^{5/2}(1+v)^{9/2}\rho^2}{4}\int^{\acute{x}}\frac{d\bar{x}}{((\acute{x}-v\acute{t})^2+(1-v^2)\rho^2)^3}$$

$$= \tfrac{2p_e^2(1-v)^{5/2}(1+v)^{9/2}\rho^2}{4}$$

$$\left\{\tfrac{(\acute{x}-v\acute{t})}{4(1-v^2)\rho^2[\quad]^2}+\tfrac{3(\acute{x}-v\acute{t})}{8(1-v^2)^2\rho^4[\quad]}+\tfrac{3}{8(1-v^2)^{5/2}\rho^5}\arctan\left(\tfrac{(\acute{x}-v\acute{t})}{\sqrt{1-v^2}\,\rho}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{p_e^2(1-v)^{3/2}(1+v)^{7/2}(\acute{x}-v\acute{t})}{8[\quad]^2}+\tfrac{3p_e^2(1-v)^{1/2}(1+v)^{5/2}(\acute{x}-v\acute{t})}{16\rho^2[\quad]}$$

$$+\tfrac{3p_e^2(1+v)^2}{16\rho^3}\arctan\left(\tfrac{(\acute{x}-v\acute{t})}{\sqrt{1-v^2}\,\rho}\right)$$

$$\rightarrow 0+0+\tfrac{3p_e^2}{4\rho^3}\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \acute{x}-\acute{t}>0\\ -\frac{\pi}{2} & \acute{x}-\acute{t}<0\end{cases}$$

$$= \tfrac{3p_e^2}{4\rho^3}\left\{\tfrac{\pi}{2}\theta(\acute{x}-\acute{t})-\tfrac{\pi}{2}\theta(\acute{t}-\acute{x})\right\}$$

Nun zeigen wir die Abschätzungen für die drei Terme der Stammfunktion. Um die ersten beiden Terme abzuschätzen, setzen wir: $\zeta := \acute{x} - v\acute{t}$ und $a^2 := (1-v^2)\rho$ und berechnen die Extremwerte.
Für den 1. Term gilt: $\left(\frac{\zeta}{(\zeta^2+a^2)}\right)' = \frac{a^2-3\zeta^2}{(a^2+\zeta^2)^3} \Rightarrow$ Maximum bei: $\zeta_0 = \pm a/\sqrt{3}$
Der Wert in ζ_0 ist: $\pm\frac{a/\sqrt{3}}{(a^2/3+a^2)^2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{16a^3}$
Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left|\frac{2p_e^2(1-v)^{3/2}(1+v)^{7/2}(\acute{x}-v\acute{t})}{16[\quad]^2}\right| &\leq \frac{2p_e^2(1+v)^{7/2}}{16}\frac{(1-v)^{3/2}3\sqrt{3}}{16(1-v^2)^{3/2}\rho^3} \\ &\leq \frac{\text{const}}{\rho^3} \quad \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)\,\forall v \end{aligned}$$

Für den 2. Term berechnen wir: $\left(\frac{\zeta}{(\zeta^2+a^2)}\right)' = \frac{a^2-\zeta^2}{(\zeta^2+a^2)^2} \Rightarrow$ Max. bei: $\zeta_0 = \pm a$
Der Wert in ζ_0 beträgt: $\pm\frac{a}{(a^2+a^2)} = \pm\frac{1}{2a}$
So erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left|\frac{3p_e^2(1-v)^{1/2}(1+v)^{5/2}(\acute{x}-v\acute{t})}{16\rho^2[\quad]}\right| &\leq \frac{3p_e^2(1+v)^{5/2}}{16\rho^2}\frac{\sqrt{1-v}}{2\sqrt{1-v^2}\rho} \\ &\leq \frac{\text{const}}{\rho^3} \quad \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)\,\forall v \end{aligned}$$

Der 3. Term ist leicht abzuschätzen; es gilt:

$$\left|\frac{3p_e^2(1+v)^2}{16\rho^3}\arctan\left(\frac{(\acute{x}-v\acute{t})}{\sqrt{1-v^2}\rho}\right)\right| \leq \frac{3p_e^2\pi}{8\rho^3} \quad \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)\,\forall v$$

Also geht der 2. Term 1. Ordnug in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gegen:

$$\frac{3\pi p_e^2}{4\rho^3}\delta(u)$$

Die 2. Ordnung des 2. Terms erledigen wir wieder durch eine $\|\quad\|_1$-Abschätzung; die höheren Ordnungen gehen noch schneller gegen 0.

$$\begin{aligned} \left\|\frac{p_e^2 p(1-v)^{7/2}(1+v)^{11/2}\rho^2}{4[\quad]^{7/2}}\right\|_1 &= \frac{p_e^2 p(1-v)^{7/2}(1+v)^{11/2}\rho^2}{4}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\acute{x}}{[\quad]^{7/2}}}_{8/(15(1-v^2)^3\rho^6)} \\ &= \frac{p_e^2 p(1-v)^{7/2}(1+v)^{11/2}\rho^2}{4(1-v^2)^3\rho^6} \\ &\to 0 \text{ und restl. Integration harmlos} \end{aligned}$$

Also gilt: $\lim 4\pi T_{\tilde{0}\tilde{0}} = \frac{3\pi p_e^2}{4\rho^3}\,\delta(u) \Rightarrow \lim T_{\tilde{0}\tilde{0}} = \frac{3p_e^2}{16\rho^3}\,\delta(u)\,\in \mathcal{D}'(\Omega)$

Im Folgenden ist der Faktor 4π aus der Definition des Energie-Impuls-Tensors völlig unerheblich, sodaß wir ihn ignorieren.

Behauptung 4.15 *$T_{\tilde{0}\tilde{1}}$ verschwindet im punktweisen Limes und auch in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

$$T_{\tilde{0}\tilde{1}} = \frac{p_e^2(1-v^2)^{5/2}G^2(g^{11}+g^{00})(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4[\quad]^3} + \frac{p_e^2(1-v^2)^{7/2}G^2(g^{11}-g^{00})\rho^2}{4[\quad]^3}$$

Der 1. Term verschwindet bereits in 1. Ordnug im punktweisen Limes, denn mit $G^2(g^{00}+g^{11}) \approx 2$ gilt:

$$\frac{p_e^2(1-v^2)^{5/2}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{2[\quad]^3} \to 0 \qquad (v \to 0,\, \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^2(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}\acute{x}^2}{2(1-v)^3\{\}^3} \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\, v \to 1)$$

Ebenso für den 2. Term ($G^2(g^{11}-g^{00}) \approx \frac{e^2}{\bar{r}^2} = \frac{p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{[\quad]}$):

$$\frac{p_e^4(1-v^2)^5\rho^2}{4[\quad]^4} \to 0 \qquad (v \to 0,\, \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^4(1-v)^5(1+v)^5\rho^2}{4(1-v)^4\{\}^4} \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\, v \to 1)$$

Den distributionellen Limes erledigen wir wieder duch $\|\quad\|_1$- Abschätzungen; es gilt:

$$\left\|\frac{p_e^2(1-v^2)^{5/2}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{2[\quad]^3}\right\|_1 \propto \frac{1-v^2)^{5/2}}{(1-v^2)^{3/2}\rho^3} \to 0 \text{ weitere Integation harmlos}$$

$$\left\|\frac{p_e^4(1-v^2)^5\rho^2}{4[\quad]^4}\right\|_1 \propto \frac{(1-v^2)^5}{(1-v^2)^{7/2}\rho^7} \to 0 \text{ weitere Integation harmlos}$$

Behauptung 4.16 *Die Komponenten $T_{\tilde{0}\tilde{2}}$, $T_{\tilde{0}\tilde{3}}$, $T_{\tilde{1}\tilde{2}}$ und $T_{\tilde{1}\tilde{3}}$ gehen punktweise und auch in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gegen 0.*

Wir behandel nur die $T_{\tilde{0}\tilde{2}}$-Komponente; $T_{\tilde{0}\tilde{3}}$ ist völlig analog und die beiden anderen Komponenten haben dieselbe Struktur, aber fallen mit noch einer Potenz von $(1-v)$ stärker ab.

Es gilt: $\lim_{v\to 0} T_{\tilde{0}\tilde{2}} = \lim \left\{\frac{p_e^2(1-v)^{5/2}(1-v)^{7/2}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y}G^2g^{00}}{[\quad]^3}\right\}$

Punktweise verschwindet der Limes bereits in 1. Ordnug ($G^2g^{00} \approx 1$):

$$\frac{p_e^2(1-v)^{5/2}(1+v)^{7/2}(\acute{x}-v\acute{t})\acute{y}}{[\quad]^3} \to 0 \qquad (v \to 0,\, \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^2(1-v)^{7/2}(1+v)^{7/2}\acute{x}\acute{y}}{(1-v)^3\{\}^3} \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\, v \to 1)$$

Außerdem gilt schon in 1. Ordnung:

$$\|T_{\tilde{0}\tilde{2}}\|_1 \propto \frac{(1-v)^{5/2} \mid \acute{y} \mid}{(1-v^2)^2 \rho^4} \to 0$$

Behauptung 4.17 *Auch die noch fehlenden Komponenten $T_{\tilde{1}\tilde{1}}, T_{\tilde{2}\tilde{2}}$, $T_{\tilde{2}\tilde{3}}$ und $T_{\tilde{3}\tilde{3}}$ verschwinden sowohl punktweise als auch in $\mathcal{D}'(\Omega)$ im Limes $v \to 1$.*

- $T_{\tilde{1}\tilde{1}} =$

$$\frac{p_e^2(1-v)^{7/2}(1+v)^{3/2}G^2(g^{11}-g^{00})(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4[\quad]^3} + \frac{p_e^2(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}G^2(g^{00}+g^{11})\rho^2}{4[\quad]^3}$$

1. Term, 1. Ordnug $(G^2(g^{11}-g^{00}) \approx \frac{e^2}{\tilde{r}^2} = \frac{p_e^2(1-v^2)^{3/2}}{[\quad]})$:

$$\frac{p_e^4(1-v)^5(1+v)^{3/2}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4[\quad]^4} \to 0 \qquad (v \to 0,\, \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^4(1-v)^7(1+v)^{3/2}\acute{x}}{4(1-v)^4\{\}^4} \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\, v \to 1)$$

Außerdem:

$$\|\frac{p_e^4(1-v)^5(1+v)^{3/2}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{4[\quad]^4}\|_1 \propto \frac{(1-v)^5}{(1-v^2)^{5/2}\rho^5} \to 0$$

2. Term, 1. Ordnug $(G^2(g^{00}+g^{11}) \approx 1)$:

$$\frac{p_e^2(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}\rho^2}{4[\quad]^3} \to 0 \qquad (v \to 0,\, \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^2(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}\rho^2}{4(1-v)^3\{\}^3} \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\, v \to 1)$$

Und:

$$\|\frac{p_e^2(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}\rho^2}{4[\quad]^3}\|_1 \propto \frac{(1-v)^{9/2}}{(1-v^2)^{3/2}\rho} \to 0$$

Die höheren Ordnungen brauchen wir also nicht zu betrachten.

- $T_{\tilde{2}\tilde{2}} = \frac{p_e^2(1-v^2)^{5/2}G^2g^{00}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{[\quad]^3} + \frac{p_e^2(1-v^2)^{7/2}G^2g^{00}(\acute{z}^2-\acute{y}^2)}{[\quad]^3}$

1. Term, 1. Ordnug $(G^2g^{00} \approx 1)$:

$$\frac{p_e^2(1-v^2)^{5/2}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{[\quad]^3} \to 0 \qquad (v \to 0,\, \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^2(1-v)^{9/2}(1+v)^{5/2}\acute{x}^2}{(1-v)^3\{\}^3} \to 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\, v \to 1)$$

Und:

$$\|\frac{p_e^2(1-v^2)^{5/2}(\acute{x}-v\acute{t})^2}{[\quad]^3}\|_1 \propto \frac{(1-v^2)^{5/2}}{(1-v^2)^{3/2}\rho^3} \to 0$$

2. Term, 1. Ordnug ($G^2 g^{00} \approx 1$):

$$\frac{p_e^2(1-v^2)^{7/2}(\acute{z}^2-\acute{y}^2)}{[\quad]^3} \quad \to \quad 0 \qquad (v \to 0,\ \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{p_e^2(1-v)^{7/2}(1+v)^{7/2}(\acute{z}^2-\acute{y}^2)}{(1-v)^3\,\{\}^3} \quad \to \quad 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\ v \to 1)$$

Außerdem:

$$\|\frac{p_e^2(1-v^2)^{7/2}(\acute{z}^2-\acute{y}^2)}{[\quad]^3}\|_1 \propto \frac{(1-v^2)^{7/2} \mid \acute{z}^2-\acute{y}^2 \mid}{1-v^2)^{5/2}\rho^5} \to 0$$

Die höheren Ordnungen fallen wiederum noch stärker ab.

- Der Limes von $T_{\tilde{3}\tilde{3}}$ berechnet sich völlig analog, sodaß nur mehr die $T_{\tilde{2}\tilde{3}}$-Komponente übrigbleibt.

- $\lim_{v\to 1} T_{\tilde{2}\tilde{3}} = \lim \left\{ \frac{-2p_e^2(1-v^2)^{7/2} G^2 g^{00} \acute{y}\acute{z}}{[\quad]^3} \right\}$

  1. Ordnug ($G^2 g^{00} \approx 1$):

$$\frac{-2p_e^2(1-v^2)^{7/2}\acute{y}\acute{z}}{[\quad]^3} \quad \to \quad 0 \qquad (v \to 0,\ \acute{x} \neq \acute{t})$$

$$= \frac{-2p_e^2(1-v)^{7/2}(1+v)^{7/2}\acute{y}\acute{z}}{(1-v)^3\,\{\}^3} \quad \to \quad 0 \qquad (\acute{x} = \acute{t},\ v \to 1)$$

Und schließlich:

$$\|\frac{-2p_e^2(1-v^2)^{7/2}\acute{y}\acute{z}}{[\quad]^3}\|_1 \propto \frac{(1-v^2)^{7/2} \mid \acute{y}\acute{z} \mid}{(1-v^2)^{5/2}\rho^5} \to 0$$

Fassen wir nun alle Rechnungen zusammen, so erhalen wir folgendes Ergebnis:

Im ultrarelativistischen Limes (in $\mathcal{D}'(\Omega)$) verschwinden alle Komponenten des Energie-Impuls Tensors außer der T_{uu}-Komponente und diese hat eine δ-artige Profilfunktion, die auf der Hypereben $\acute{x} = \acute{t}$, d. h. $u = 0$ konzentriert ist. Es gilt im Limes $v \to 1$:

$$T_{uu} \equiv T_{\tilde{0}\tilde{0}} = \frac{3p_e^2}{16\rho^3}\,\delta(u)$$

Die Reskalierung der Ladung hat also zur Folge, daß die im Falle des Coulombfeldes im flachen Raum divergente $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$-Komponente hier einen Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$ besitzt. Dieser ist proportional zur δ-Distribution, also ungleich 0, obwohl das elektromagnetische Feld im ultrarelativistischen Limes im ganzen Raum verschwindet.
Im letzten Abschnitt werden wir nun dieses „merkwürdige" Ergebnis diskutieren.

4.4 Diskussion des Ergebnisses

Fassen wir zunächst noch einmal das Ergebnis unserer Rechnungen für das elektromagnetische Feld und den Energie-Impuls-Tensor der Reissner-Nordstrøm Lösung zusammen. Im ultrarelativistischen Limes $v \to 1$ mit der Reskalierung von Masse $m = p/\gamma$ und Ladung $e^2 = p_e^2/\gamma$, bei festgehaltenen Momenten p bzw. p_e, gilt in $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{v\to 1} F_{\acute{i}\acute{k}}(x^{\acute{m}}) &= 0 \qquad \forall\, \acute{i}, \acute{k} \\
\lim_{v\to 1} T_{\tilde{i}\tilde{k}}(x^{\tilde{m}}) &= 0 \qquad \forall\, (\tilde{i}, \tilde{k}) \neq (0,0) \\
\lim_{v\to 1} T_{\tilde{0}\tilde{0}}(x^{\tilde{m}}) &= \tfrac{3p_e^2}{16\rho^3}\, \delta(u)
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis ist vom physikalischen Standpunkt aus gesehen unbefriedigend, da ein verschwindendes elektromagnetisches Feld einen nicht verschwindenden Energie-Impuls-Tensor besitzt. Offensichtlich gilt:

$$T_{\tilde{0}\tilde{0}}(\lim F_{\acute{i}\acute{k}}) \neq \lim T_{\tilde{0}\tilde{0}}(F_{\acute{i}\acute{k}})$$

Also vertauscht die Limesbildung *nicht* mit der „Multiplikation" (d. h. der Berechnung des Energie-Impuls-Tensors, die aber als Multiplikation in $\mathcal{D}'$ nicht definiert ist).

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen haben wir es mit Funktionenfolgen $(F_{\acute{i}\acute{k}\,v})_v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ zu tun, die im Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$ verschwinden, aber deren „Quadrat" $(T_{\tilde{0}\tilde{0}\,v})_v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ im Limes in $\mathcal{D}'(\Omega)$ proportional zur δ-Distribution ist. In dieser Tatsache spiegelt sich das schon des öfteren besprochene Problem wieder, daß in $\mathcal{D}'(\Omega)$ keine Multiplikation definierbar ist, die die Multiplikation von $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$-Funktionen fortsetzt.

4.4.1 Aus der Sicht der Colombeau-Theorie

Betrachten wir nun die Situation aus dem Blickwinkel der Colombeau-Theorie. Zunächst müssen wir wieder den Definitionsbereich der Funktionen auf $\tilde{\Omega} := R^4 \setminus \{\acute{x} = v\acute{t}\ (0 < v < 1) \wedge \rho = 0\}$ einschränken, um wohldefinierte „Einbettungen":

$$
\begin{aligned}
C^\infty(\tilde{\Omega})^I &\hookrightarrow \mathcal{G}(\tilde{\Omega}) \\
(F_{\acute{i}\acute{k}\,v})_v &\mapsto (F_{\acute{i}\acute{k}\,v(\epsilon)})_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde{\Omega})
\end{aligned}
$$

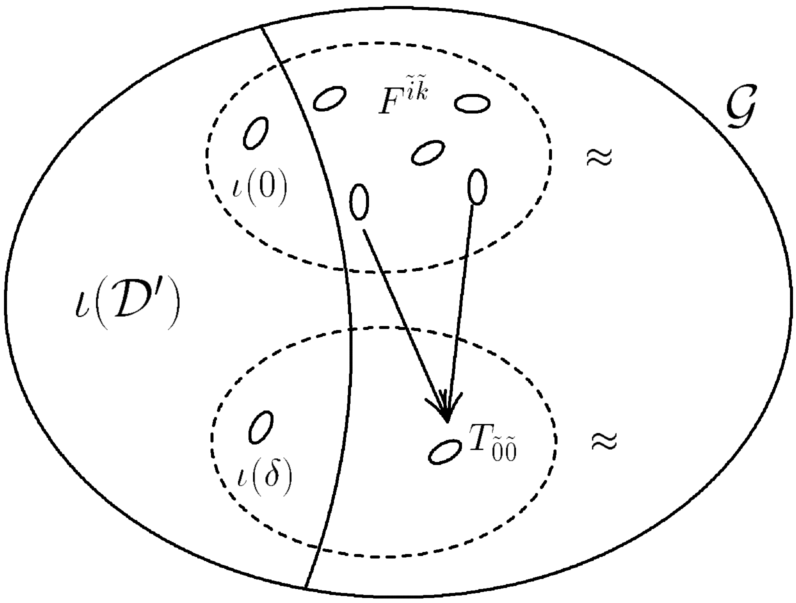
zu erhalten (vergleiche Abschnitt 3.4.1).

In $\mathcal{G}(\Omega)$ können wir nun die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors berechnen, da die Multiplikation verallgemeinerter Funktionen wohldefiniert ist.

In der Colombeau-Algebra übersetzten sich unsere Rechnungen in folgende Assoziationsrelationen:

$$
\begin{aligned}
F_{\acute{i}\acute{k}} &= \left(F_{\acute{i}\acute{k}\,v(\epsilon)}\right)_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde{\Omega}) &&\approx 0 && \forall\, \acute{i}, \acute{k} \\
T_{\tilde{i}\tilde{k}} &= \left(T_{\tilde{i}\tilde{k}\,v(\epsilon)}\right)_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde{\Omega}) &&\approx 0 && \forall\, (\tilde{i}, \tilde{k}) \neq (0,0) \\
T_{\tilde{0}\tilde{0}} &= \left(T_{\tilde{0}\tilde{0}\,v(\epsilon)}\right)_\epsilon + \mathcal{N}(\tilde{\Omega}) &&\approx \tfrac{3p_e^2}{16\rho^3}\,\delta(u)
\end{aligned}
$$

Wir können die Situation in folgender Grafik darstellen.



Die Tatsache, daß das „Quadrat" $T_{\tilde{0}\tilde{0}}$ der zu 0 assoziierten verallgemeinerten Funktionen $F_{\acute{i}\acute{k}}$ nicht zu 0, sondern zu $\frac{3p_e^2}{16\rho^3}\,\delta(u)$ assoziiert ist, ist vom Standpunkt der Colombeauschen Theorie nicht verwunderlich. Die Assoziation ist eben mit der Multiplikation in $\mathcal{G}(\tilde{\Omega})$ nicht verträglich (Satz 2.21)!

Also ist das physikalisch unbefriedigende Ergebnis vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet völlig klar. Es tritt darin die prinzipielle „Unverträglichkeit" von „linearen Idealisierungen", wie der δ-Distribution mit dem Ausführen nichtlinearer Operationen, wie der Berechnung des Energie-Impuls-Tensors eines elektromagnetischen Feldes zu Tage, von der schon wiederholt die Rede war.
Die Colombeau-Theorie ist klarerweise nicht dazu in der Lage, diese „Unverträglichkeit" zu beseitigen, liefert aber einen Rahmen, in dem dieses und ähnliche nichtlineare Probleme behandelt und studiert weden können.

Die Frage nach der physikalischen Relevanz eines verschwindenden elektromagnetischen Feldes mit von Null verschiedenem Energie-Impuls-Tensor muß hier klarerweise offenbleiben; die mathematische Theorie zeigt aber, daß ein solches Ergebnis, läßt man Felder mit distributionsartigem Profil zu, vom rein formalen Standpunkt aus zulässig bzw. sogar zu erwarten ist.

A Koordinatentransformationen und Pullback von Distributionen

Ziel dieses Anhangs ist es, eine exakte Definition der in Abschnitt 3.2 und Abschnitt 4.1 verwendeten Distribution $\delta(x-t) \in \mathcal{D}'(R^2)$ zu geben, d. h. die Verknüpfung der δ-Distribution mit der Koordinatentransformation $f(x,t) = x-t$ zu definieren.

Die Problemstellung ist allgemein folgende: Sei $X \subseteq R^n$ offen, $Y \subseteq R^m$ offen und $f : X \to Y$ glatt. Dann existiert eine lineare Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} f^* : C^\infty(Y) & \to & C^\infty(X) \\ u & \mapsto & f^*(u) := u \circ f \end{array}$$

Diese soll nun fortgesetzt werden zu:

$$\widehat{f^*} : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(X)$$

Da $C^\infty(Y)$ in $\mathcal{D}'(Y)$ dicht liegt, existiert höchstens eine solche stetige Fortsetzung.

1. Fall: f ist Diffeomorphismus

Satz A.1 *Seien $X, Y \subseteq R^n$ offen und $f : X \to Y$ ein Diffeomorphismus, dann existiert genau eine stetige Abbildung:*

$$\widehat{f^*} : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(X) \quad \textit{mit: } \widehat{f^*}\,|_{C^\infty(Y)} = f^*$$

und es gilt für $u \in \mathcal{D}'(Y)$:

$$\langle \widehat{f^*}u, \varphi\rangle := \langle u \circ f, \varphi\rangle = \langle u(y), \underbrace{\varphi(f^{-1}(y)\,)\ |\det f^{-1\,\prime}(y)\,|}_{:=F(\varphi)\,(y)}\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(X)$$

Beweis. $F(\varphi) \in \mathcal{D}(Y)$ ist klar, $F : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(Y)$ ist stetig, und daher ist $\widehat{f^*} = F^t : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(X)$ stetig.
Sei $u \in C^\infty(Y) \Rightarrow \langle \widehat{f^*}u, \varphi\rangle = \langle f^*u, \varphi\rangle$ (Transformationsformel) □

Korollar. Seien u, f wie oben. Die Ableitungen von $u \circ f = \widehat{f^*}u$ können nach der Kettenregel berechnet werden.

Beweis. Für $u \in C^\infty(Y)$ ist alles klar. $u \mapsto u \circ f : \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(X)$ ist stetig. Wir berechnen als Beispiel ∂_{x_1}:

$$\begin{array}{rcl} A : u & \mapsto & \partial_{x_1}(u \circ f) \\ B : u & \mapsto & ((\partial_1 u) \circ f)\,\partial_{x_1} f_1 + \ldots + ((\partial_n u) \circ f)\,\partial_{x_1} f_n \end{array}$$

A, B sind stetig und stimmen auf $C^\infty(Y)$ überein $\Rightarrow A = B$ □

2. Fall: f kein Diffeomorphismus

Wir beschränken uns hier auf $Y = R$. Sei also $f : X \to R$ glatt.

Motivation. Sei zunächst $u \in \mathcal{D}(R)$, $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, dann haben wir:

$$\begin{aligned}\langle f^*u, \varphi\rangle = \langle u \circ f, \varphi\rangle &= \int u(f(x)\,)\,\varphi(x)\,dx \\ = -\int(\int_{f(x)}^{\infty} u'(t)\,dt\,)\,\varphi(x)\,dx &= -\int_{\{(x,t)\,:\,f(x)\,<\,t\}} u'(t)\,\varphi(x)\,dx\,dt \\ = -\int u'(t)(\int_{\{x\,:\,f(x)\,<\,t\}} \varphi(x)\,dx)\,dt &= \int u(t)\tfrac{d}{dt}(\int_{\{f(x)\,<\,t\}} \varphi(x)\,dx)\,dt \\ &=: \int u(t)\,\varphi_f(t)\,dt\end{aligned}$$

Offen bleibt hier, ob φ_f Testfunktion ist und ob $\varphi \mapsto \varphi_f$ stetig: $\mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}(R)$ ist.

Satz A.2 *Sei $X \subseteq R^n$ offen; $f \in C^\infty(X)$, $f'(x) = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \neq 0\ \forall x \in X$, dann existiert genau eine stetige Abbildung:*

$$\widehat{f^*} : \mathcal{D}'(R) \to \mathcal{D}'(X) \quad \textit{mit: } \widehat{f^*}\,|_{\mathcal{D}(R)} = f^*$$

und es gilt:

$$\langle \widehat{f^*}u, \varphi\rangle = \langle u, \varphi_f\rangle \qquad \forall \varphi \in C^\infty(X)$$

wobei φ_f im folgenden Beweis definiert wird.

Beweis. Da $\mathcal{D}(R)$ dicht in $\mathcal{D}'(R)$ liegt (Satz 1.11), ist auch hier die Eindeutigkeit klar.
Sei nun $y \in X$ beliebig und o.B.d.A. $\partial_n f(y) \neq 0$. Wir definieren die Abbildung $h_y : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n) := (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x)\,)$
h_y ist Diffeomorphismus von U_y, einer genügend kleinen Umgebung von y, nach $h_y(U_y)$ und wir definieren $g_y := h_y^{-1}$. Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(U_y)$, so setzen wir

$$\begin{aligned}\tilde\varphi_f(t) &:= \tfrac{d}{dt}\int_{\{x:\,f(x)<t\}} \varphi(x)\,dx \qquad (*) \\ &= \tfrac{d}{dt}\int_{\xi_n<t} \varphi(g_y(\xi)\,)\ |\det g_y'(\xi)\,|\ d\xi \\ &= \int \underbrace{\varphi \circ g_y(\xi', t)\ |\det g_y'(\xi', t)\,|}_{\in\mathcal{D}(R^n)} d\xi' \qquad \xi' := (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}),\end{aligned}$$

wobei wir $(\varphi \circ g_y)\ |\det g_y'\,|$ mit 0 von $h_y(U_y)$ auf ganz R^n fortgesetzt haben. Daraus ersehen wir, daß $\tilde\varphi_f$ ein Element von $\mathcal{D}(R)$ ist. Wir werden allerdings

mit dem Ausdruck $(*)$ weiterrechnen, da dieser neutral in bezug auf den Index i ist, für den $\partial_i f(y) \neq 0$ gilt (wir hatten ja o.B.d.A. $i = n$ gesetzt, für verschiedene $y \in X$ können aber notwendigerweise verschiedene Indices auftreten).
Nun wählen wir eine den $(U_y)_{y \in X}$ untergeordnete C^∞-Partition $(\chi_j)_j$ der Eins, wobei $\mathrm{tr}(\chi_j) \subseteq U_{y_j}$ gelten möge. Für $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ ist dann $\varphi = \sum^{\text{endl.}} \chi_j \varphi$ und wir definieren:

$$\varphi_f(t) := \sum_j^{\text{endl.}} (\widetilde{\chi_j \varphi})_f(t) = \sum_j^{\text{endl.}} \frac{d}{dt} \int\limits_{\{x : f(x) < t\}} (\chi_j \varphi)(x)\, dx$$

Da wir wissen, daß jeder einzelne Summand zu $\mathcal{D}(R)$ gehört, gilt auch $\varphi_f \in \mathcal{D}(R)$.
Ist $(V_y)_{y \in X}$ eine weitere Überdeckung von X analog zu den $(U_y)_{y \in X}$ und $(\kappa_k)_k$ eine analoge C^∞-Partition der Eins, so gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_j^{\text{endl.}} \frac{d}{dt} \int\limits_{\{x:f(x)<t\}} (\chi_j \varphi)(x)\, dx &= \sum_j^{\text{endl.}} \frac{d}{dt} \int\limits_{\{x:f(x)<t\}} \Big(\sum_k^{\text{endl.}} \kappa_k \chi_j \varphi \Big)(x)\, dx \\
&= \sum_{j,k}^{\text{endl.}} \frac{d}{dt} \int\limits_{\{x:f(x)<t\}} (\kappa_k \chi_j \varphi)(x)\, dx \\
&= \sum_k^{\text{endl.}} \frac{d}{dt} \int\limits_{\{x:f(x)<t\}} \Big(\sum_j^{\text{endl.}} \kappa_k \chi_j \varphi \Big)(x)\, dx \\
&= \sum_k^{\text{endl.}} \frac{d}{dt} \int\limits_{\{x:f(x)<t\}} (\kappa_k \varphi)(x)\, dx
\end{aligned}$$

φ_f ist somit wohldefiniert, d. h. unabhängig von der Wahl der $(U_y)_y$, $(g_y)_y$ und der $(\mathcal{X}_j)_j$ und hat kompakten Träger.
Die Linearität von $\varphi \mapsto \varphi_f$ liegt auf der Hand und die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Operationen

$$\varphi \mapsto \varphi\chi_j \mapsto \varphi\chi_j \,|_{U_{y_j}} \mapsto (\varphi\chi_j \,|_{U_{y_j}}) \circ g_{y_j} \mapsto \Big[(\varphi\chi_j \,|_{U_{y_j}}) \circ g_{y_j} \Big] \,|\det g'_{y_j}(\xi)\,|$$

sowie der Zuordnungen $I_i : \mathcal{D}(R^n) \to \mathcal{D}(R)$

$$(I_i(\psi))(t) := \int\limits_{R^{n-1}} \psi(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, t, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{i-1}\, d\xi_{i+1} \ldots d\xi_n\,.$$

Somit ist der zu $(\varphi \mapsto \varphi_f)$ adjungierte Operator $\widehat{f^*}$, der durch

$$\langle \widehat{f^*} u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_f \rangle$$

definiert ist, linear und stetig von $\mathcal{D}'(R)$ nach $\mathcal{D}'(X)$. Überdies stimmt er auf $\mathcal{D}(R)$ mit f^* überein, denn es gilt für $u \in \mathcal{D}(R)$:

$$\langle f^* u, \varphi\rangle = \langle u \circ f, \varphi\rangle = \text{...analog zur Motivation...}$$

$$= -\int u'(t) \int_{\{f<t\}} \varphi(x)\, dx\, dt$$

$$= -\sum_j \int u'(t) \int_{\{f<t\}} \mathcal{X}_j \varphi(x)\, dx\, dt$$

$$= \sum_j \int u(t) \left[\frac{d}{dt} \int_{\{f<t\}} (\mathcal{X}_j\varphi)(x)\, dx\right] dt$$

$$= \sum_j \int u(t) \int (\mathcal{X}_j \varphi) \circ g_{y_j}(\xi', t)\ \left|\det g'_{y_j}(\xi', t)\right|\ d\xi'\, dt$$

$$= \int u(t) \sum_j \int (\mathcal{X}_j \varphi) \circ g_{y_j}(\xi', t)\ \left|\det g'_{y_j}(\xi', t)\right|\ d\xi'\, dt$$

$$= \int u(t) \varphi_f(t)\, dt$$

Schließlich sei $g \in C^\infty(R)$. Wir wählen $\omega_n \in \mathcal{D}(R)$ mit $0 \le \omega_n \le 1$, $\omega_n \equiv 1$ auf $[-n, n]$. Dann gilt $g = \lim_n g\omega_n$ bezüglich $\sigma(\mathcal{D}'(R), \mathcal{D}(R))$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ folgt aufgrund der Stetigkeit von $\widehat{f^*}$:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f^*} g, \varphi\rangle &= \lim_n \langle \widehat{f^*}(g\omega_n), \varphi\rangle = \lim_n \langle\, (g\omega_n) \circ f, \varphi\rangle \\
&= \lim_n \int (g \circ f)(x)\, (\omega_n \circ f)(x)\, \varphi(x)\, dx \\
&= \lim_n \int (g \circ f)(x)\, \varphi(x)\, dx \\
&= \langle g \circ f, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Hierbei ergibt sich aus der Beschränktheit der Funktionen $g \circ f$ und $\omega_n \circ f$ auf $\mathrm{tr}(\varphi)$ die Anwendbarkeit des Satzes von der dominierten Konvergenz. Beachten wir $\lim_n \omega_n(f(x)) = 1$ für alle x, ist die obige Rechnung gerechtfertigt. $\Box$

Analog zum Fall, wo f Diffeomorphismus war, folgern wir:

Korollar. Die Ableitungen von $\widehat{f^*} = u \circ f$ können nach der Kettenregel berechnet werden.

Schlußendlich erhalten wir als das angestrebte Resultat die Definition von $\delta(x - t) \in \mathcal{D}(R^2)$:

Beispiel. $u = \delta \in \mathcal{D}(R)$, $f : \begin{array}{ccc} R^2 & \to & R \\ (x,t) & \mapsto & x - t \end{array}$
Hier können wir $U_y = R^2$ wählen und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} h_y = h & : & (x,t) \mapsto (x, f(x,t)\,) = (x, x-t) \\ g := h^{-1} & : & (x,t) \mapsto (x, x-t) \end{array}$$

Es gilt $\mid \det g' \mid = 1$ und wir erhalten:

$$\varphi_f(t) \quad = \int (\varphi \circ g)(x,t)\, dx \;=\; \int \varphi(x, x-t)\, dx$$

$$\begin{aligned} \langle \delta(x-t), \varphi(t,x) \rangle \quad &:= \langle \widehat{f^*}\delta, \varphi \rangle \;=\; \langle \delta \circ f, \varphi \rangle \\ &= \langle \delta, \varphi_f \rangle \;=\; \langle \delta, \int \varphi(x, x-t)\, dx \rangle \;=\; \int \varphi(x,x)\, dx\,. \end{aligned}$$

B Zusammenfassung/Abstract

Die Arbeit beginnt mit einer kurzen Zusammenfassung der Schwartzschen Distributionentheorie. Besonders wird dabei auf die Grenzen dieser Theorie eingegangen, vor allem auf die Probleme, die beim Versuch, eine Multiplikation von Distributionen zu definieren, auftreten.

Daran schließt sich eine breite Darstellung der Colombeauschen Theorie der verallgemeinerten Funktionen an, in deren Rahmen eine Multiplikation von Distributionen möglich ist.

In den folgenden Kapiteln werden Boost und ultrarelativistischer Limes ($v \to 1$) von Coulombfeld und Reissner-Nordstrøm-Lösung im Raum der Distributionen berechnet. Die dabei auftretenden Fragen im Zusammenhang mit der Multiplikation von Distributionen werden schließlich vom Standpunkt der Colombeau-Theorie aus diskutiert und interpretiert.

B Abstract

This work begins with a short summary of Schwartz' distribution theory. We take a close look at the limitations of this theory, especially at the problems that arise while trying to define a product of distributions.

Then follows a presentation of Colombau's theory of New Generalized Functions, that provides the possibility of a multiplication of distributions.

In the following chapters we compute the boost and ultrarelativistic limit ($v \to 1$) of the Coulombfield and the Reissner-Nordstrøm solution in the space of distributions. Finally we discuss the results involving products of distributions from the viewpoint of Colombeau's theory.

C Literatur

Entsprechend der Thematik und der Konzeption der Arbeit gliedert sich auch die von mir verwendete Literatur in zwei Untergruppen; zum einen die „*physikalische*" Literatur, die neben den Standardlehrbüchern der allgemeinen Relativitätstheorie vor allem Arbeiten über den Boost und ultrarelativistischen Limes von Raum-Zeit Geometrien der Kerr-Newman Familie umfaßt, zum anderen die „*mathematische*" Literatur, die hauptsächlich aus Standardbüchern zur Distributionentheorie, sowie Arbeiten und Büchern zur Colombeau-Theorie besteht.

[1] Sexl R., Urbantke H., *Relativität, Gruppen, Teilchen* (Springer, 3. Auflage, 1992).

[2] Sexl R., Urbantke H., *Gravitation und Kosmologie* (BI-Wiss. Verlag, 3 .Auflage, 1987).

[3] Thirring W., *Lehrbuch der Mathematischen Physik* Vol. 1, Vol. 2 (Springer, 2. Auflage, 1988, 1990).

[4] Wald R., *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).

[5] Straumann N., *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer, 1984).

[6] Papapetrou A., *Lectures on General Relativity* (Reidel, 1974).

[7] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation* (Freeman, 1973).

[8] Ellis G., Hawking S., *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973).

[9] Rindler W., *Essential Relativity* (Springer, 1987).

[10] Penrose R., Rindler W., *Spinors and Space-Time* Vol. 1, Vol. 2 (Cambridge University Press, 1984).

[11] Aichelburg P., Sexl R., *J. Gen. Rel. Grav.* **2**, 303 (1971).

[12] Loustó C. O., Sánchez N., *Phys. Lett. B* **220**, 55 (1989).

[13] Loustó C. O., Sánchez N., *Phys. Lett. B* **232**, 462 (1989).

[14] Loustó C. O., Sánchez N., *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 915 (1990).

[15] Loustó C. O., Sánchez N., *preprint* gr-qc/9410041 (1994).

[16] Balasin H., Nachbagauer H., *Class. Quant. Grav.* **10**, 2271 (1993).

[17] Balasin H., Nachbagauer H., *preprint* gr-qc/9312028 (1993).

[18] Balasin H., Nachbagauer H., *preprint* gr-qc/9405053 (1994).

[19] Dray T., 't Hooft G., *Nucl. Phys. B* **232**, 173 (1985).

[20] Aichelburg P., Balasin H., *preprint* (1994).

[21] Aichelburg P., Embacher F., in *Gravitation and Geometry, A Volume in Honour of I. Robinson* Hrsg. Rindler W., Trautman A., (Bibliopolis, 1987).

[22] Ehlers J., Kundt W., in *Gravitation, An Introduction to Current Research* Hrsg. L. Witten (Wiley, 1964).

[23] Kramer D., Stephani H., MacCallum M., Herlt E., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, 1980).

[24] Penrose R., *Rev. Mod. Phys.* **37**, 215, (1965).

[25] Penrose R., in *Batelle Recontres* Hrsg. De Witt C. M., Wheeler J. A., (Benjamin, 1967).

[26] Penrose R., in *Differential Geometry and Relativity, A Volume in Honour of André Lichnerowicz on his 60^{th} Birthday* Hrsg. Cahen M., Flato M., (D. Reidel Pub. Comp., 1976).

[27] Pirani F., *Phys. Rev.* **105**, 1089 (1957).

[28] Pirani F., *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 252**, 96, (1959).

[29] Hirzebruch F., Scharlau W., *Einführung in die Funktionalanalysis* (Bibliogr. Inst. Mannheim, 1971).

[30] Kriegl A., *Funktionalanalysis I* (Skriptum zur Vorlesung, 1991).

[31] Jänich K., *Topologie* (Springer, 3. Auflage, 1990).

[32] Cigler J., Reichel H.-C., *Topologie* (Biblogr. Inst., 2. Auflage, 1987)

[33] Schwartz L., *Théorie des Distributions* (Hermann, 1966).

[34] Gelfand I. M., Schilow G. E., *Verallgemeinerte Funktionen* Band 1 (Deutscher Verl. d. Wiss., 1960).

[35] Barros Neto J., *An Introduction to the Theory of Distributions* (M. Dekker Inc., 1973).

[36] Friedlander F., *Introduction to the Theory of Distributions* (Cambridge University Press, 1982).

[37] Grosser M., *Distributionen* (Vorlesungsmitschrift, 1994).

[38] Lützen J., *The Prehistory of the Theory of Distributions* (Springer, 1982).

[39] Colombeau J. F., *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions* (North Holland, 1984).

[40] Colombeau J. F., *Elementary Introduction to New Generalized Functions* (North Holland, 1985).

[41] Colombeau J. F., Le Roux A., *J. Math. Phys.* **29**, 315 (1988).

[42] Colombeau J. F., *Multiplication of Distributions* (Springer Lecture Notes, 1992).

[43] Rosinger E. E., *Generalized Solutions of nonlinear Partial Differential Equations* (North Holland, 1987).

[44] Oberguggenberger M., *Nichtlinerae partielle Differentialgleichungen* (Vorlesungsmitschrift, 1991).

[45] Oberguggenberger M., *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations* (Longman Scientific and Technical, 1992).

[46] Kunzinger M., *preprint* (1995)

[47] Parker P., *J. Math. Phys.* **20**, 1423 (1979).

[48] Parker P., *preprint* (1989)

D Verzeichnis häufig verwendeter Symbole

R	...	reelle Zahlen
C	...	komplexe Zahlen
Ω	...	offene Menge im R^n
C^k	...	Raum der k-fach stetig-differenzierbaren Funkt.
C_0^k	...	Raum der k-fach stetig-differenzierbaren Funkt. mit kompaktem Träger
$\mathcal{D}$	...	Raum der Testfunktionen ($= C_0^\infty$)
$\mathcal{D}'$	...	Raum der Distributionen
$\mathcal{E}'$	...	Raum der Distributionen mit kompaktem Träger
$\mathcal{L}^1_{(\mathrm{loc})}$	...	Raum der (lokal) Lebesgue-integrierbaren Funkt.
$L^1_{(\mathrm{loc})}$	...	Raum der (lokal) Lebesgue-integrierbaren Funkt. mit herausfaktorisiertem Nullteiler
$\mathcal{S}$	...	Raum der Schwartzschen Funktionen
$\mathcal{S}'$	...	Raum der temperierten Distributionen
$\mathcal{G}$	...	Colombeau-Algebra, Algebra der verallgemeinerten Funktionen
$\bar{C}$	...	Ring der verallgemeinerten Zahlen
f_v, $(f_v)_v$	...	(verallgemeinerte) Funktionenfolge ($0 < v < 1$)
F_f	...	aus der L^1_{loc}-Funktion f gebildete reguläre Distribution
$u = (u_\epsilon)_\epsilon + \mathcal{N}$	...	verallgemeinerte Funktion (Colombeau-Funktion)
∂_i	...	partielle Ableitung nach der i-ten Variable
∂^α	...	partielle Ableitung der Ordnung $\mid \alpha \mid$
$P(\partial)$	...	linearer partieller Differentialoperator
δ	...	Diracsche Delta-Distribution
$\theta \equiv H$	...	Heavysidesche Sprungfunktion
$f * g$	...	Faltung von f und g
$\mathcal{F}f \equiv \hat{f}$	...	Fouriertransformierte von f
g_{ik}	...	Raumzeit-Metrik (Signatur $(+,-,-,-)$)
η_{ik}	...	Metrik des flachen Raumes ($\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$)
F^{ik}	...	elektromagnetischer Feldstärketensor
T_{ik}	...	(symmetrischer) Energie-Impuls-Tensor

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem und in erster Linie meinen Eltern, die mir nicht nur durch ihre materielle Unterstützung das Studium ermöglichten, sondern durch ihre Anteilnahme und Förderung meiner Interessen erst den Weg dahin ebneten.

Des weiteren möchte ich allen meinen universitären Lehrern danken, vor allem Prof. Rindler, der mich in den Anfangssemestern stark motivierte und unterstützte.

Besonderer Dank gebührt natürlich meinem Diplomarbeitsbetreuer Doz. Urbantke, der stets um meine Arbeit bemüht war und mit seinem umfangreichen Wissen viel zu ihrem Gelingen beigetragen hat.

Vieles des hier inkludierten mathematischen Stoffes habe ich in den Vorlesungen und Seminaren von Doz. Grosser gelernt. Dafür, und für seine tatkräftige Unterstützung bei der Abfassung meiner Diplomarbeit sei ihm herzlich gedankt.

Sehr dankbar bin ich auch Mag. Kunzinger für die vielen hilfreichen Diskussionen und Dr. Hörmann für seine Korrekturen in letzter Minute.

Schließlich möchte ich mich bei all meinen Freunden bedanken, die mich die letzten Jahre begleitet haben, vor allem bei Anita für ihre Geduld und Unterstützung.

Lebenslauf

23.02.70: Geburt als erster Sohn des Beamten Dipl. Ing. Wolfgang Steinbauer und der Bankangestellten Christl Steinbauer, geborene Englisch, in Wien.

20.03.72: Geburt des einzigen Bruders Christoph.

1976-1980: Besuch der öffentlichen Volksschule Wien 9, Lichtentalergasse 31-35.

1980-1988: Besuch des Bundesrealgymnasium IX, Wien 9, Glasergasse 25.

07.06.88: Ablegung der Reifeprüfung an ebendieser Schule mit ausgezeichnetem Erfolg.

01.10.88-31.05.89: Präsenzdienst in Wien und Stockerau.

18.09.89: Immatrikulation an der Universität Wien, Inskription des Diplomstudiums der Physik

08.03.91: Zusätzliche Inskription des Diplomstudiums der Mathematik.

28.06.91: Ablegung der 1. Diplomprüfung beider Studien mit ausgezeichnetem Erfolg.

Sommer 92: Mitarbeit an der Herausgabe des Skriptums ,,Lineare Algebra I und II" zur Vorlesung von Prof. Rindler am Institut für Mathematik.

Ws 92/93: Bestellung zum Tutor am Institut für Mathematik.

15.10.92-31.12.92: Anstellung im mittleren Dienst am Institut für Mathematik.

01.01.93-30.06.93: Anstellung als Studienassistent am Institut für Mathematik.

WS 93/94: Bestellung zum Tutor am Institut für Mathematik.

SS 94: Beginn der Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik unter der Betreuung von Doz. Urbantke.

27.06.94: Zuerkennung des Leistungsstipendiums der Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät für das Studienjahr 1993/94.

26.06.95: Zuerkennung des Leistungsstipendiums der Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät für das Studienjahr 1994/95.