

Roland STEINBAUER, Wien & Christoph ABLEITINGER, Wien

## **Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff**

### **1. Einleitung**

Das hochschuldidaktische Projekt BELLA (Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis) in dem die Autoren mit Fachdidaktiker/innen der Universität Wien und der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich (A. Anger, S. Götz, E. Süss-Stepancik) kooperieren, widmet sich der empirischen Erfassung und Erforschung von Beliefs und Vorstellungen von Bachelorstudierenden im Unterrichtsfach Mathematik zu Kernbegriffen der Analysis. In diesem Beitrag berichten wir über die laufende Auswertung einer Fragebogenuntersuchung vom Wintersemester 2018/19 an Studierenden der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ im Verbund Nord-Ost, der die gesamte Sekundarstufenausbildung im nordöstlichen Teil Österreichs (inkl. Wien) abwickelt. Dabei beschränken wir uns hier auf jenen kleinen Teil der Untersuchung, der sich mit (Grund-)Vorstellungen der Studierenden zum *Grenzwertbegriff* befasst.

Im Curriculum für das Unterrichtsfach Mathematik im Verbund Nord-Ost sind zu den zentralen Fachvorlesungen (Geometrie und lineare Algebra, Analysis, Stochastik), die vollständig getrennt von den Lehrveranstaltungen für Fachstudierende abgehalten werden, auch so genannte Schulmathematikvorlesungen vorgesehen (vgl. Ableitinger et. al., 2020). Im Fall der Analysis wird diese im Curriculum wie folgt beschrieben: „Die Studierenden erkennen die Relevanz der fachmathematischen Konzepte für den Schulunterricht und können diese dort angemessen verwenden. [...] Die Studierenden können in diesem Gebiet fachdidaktische Konzepte anwenden [...] sie kennen typische Fehlvorstellungen und passende Interventionsmöglichkeiten.“ (Universität Wien, 2016). Die zu einer Fachvorlesung gehörige Schulmathematikvorlesung findet dabei jeweils im Folgesemester statt.

Kernfrage dieses Teils des Projekts und dieses Beitrags ist also, welche (Grund-)Vorstellungen Lehramtsstudierende zum Grenzwertbegriff im Laufe ihrer Ausbildung aufbauen, und in weiterer Folge in wie weit diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden können.

## 2. Methoden

Die Lehramtsstudierenden wurden in der ersten und der letzten Vorlesungseinheit zur Schulmathematik eingeladen einen zweiteiligen Fragebogen auszufüllen. Die Zeitpunkte waren also so gewählt, dass die Befragung (1) nach Ende der Fachausbildung und vor Beginn der schulmathematischen Ausbildung zur Analysis und (2) nach Ende der Schulmathematik-Ausbildung Analysis stattfand. Im ersten Teil des Fragebogens wurden Vorstellungen zu Kernbegriffen der (eindimensionalen) Analysis erhoben, während der zweite Teil dem fachlichen Wissen über ebendiese Konzepte der Analysis gewidmet war und nur zum Zeitpunkt (1) erhoben wurde. Im Anschluss wurde eine verbundene Stichprobe,  $n=59$ , aus jener Gesamtheit von Proband/innen hergestellt, die alle Fragebögen bearbeitet hatten. Hier berichten wir über die Auswertung der Frage, bzw. der Fortsetzung des Satzanfangs „Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor...“. Der Kontext wurde so gestaltet, dass möglichst die tatsächlichen Vorstellungen der Proband/innen zum Tragen kamen und die Aufgabenstellung nicht etwa im Sinne einer fachinhaltlichen Prüfungsfrage nach der Definition des Grenzwerts missverstanden werden konnte. Für die konkrete Ausgestaltung des relevanten Teils des Fragebogens siehe Abbildung 1.

### **BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis**

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern.

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

### **Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis**

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Abb. 1: Relevanter Teil des Fragebogens

Die Auswertung der Fragebögen erfolgte im Team bestehend aus einem Fachdidaktiker und einem Fachmathematiker und beschränkte sich in einem ersten Schritt auf einen Abgleich der gegebenen Antworten mit den *normativen* Grundvorstellungen (GV) zum Grenzwertbegriff: Annäherungsvorstellung (AV: Das Zustreben oder Annähern der Folgenglieder an einen festen

Wert), Umgebungsvorstellung (UV: In jeder Umgebung um den Limes liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren), und Objektvorstellung (OV: Limes als math. Objekt, das durch eine Folge definiert/konstruiert wird) (vgl. Greefrath et. al., 2016). Dabei wurde das Vorhandensein einer der drei Grundvorstellungen erhoben, sowie die Qualität ihrer Ausprägung jeweils in 6 Kategorien einsortiert. Diese sind mit Beispielformulierungen für die AV in Tabelle 1 angegeben.

Code	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierung AV
U	Unspezifisch (Antwort ermöglicht keinen Zugriff auf Vorstellung)	Wert, der angestrebt wird
1	GV naiv ausgedrückt	nähert sich im Unendlichen an
2	GV schwach ausgeprägt/ungenau formuliert	kommt immer näher
3	GV vorhanden, nicht korrekt formuliert	kommt unendlich nahe
4	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	kommt schließlich beliebig nahe
F	Fehlvorstellung erkennbar	letztes Folgenglied

Tab. 1: Kategorisierung der Qualität der Ausprägung der GV

Konkret wurden ähnliche Äußerungen zu geglätteten Formulierungen zusammengefasst und diese nicht nur in die Kategorien U, 1-4, F einsortiert, sondern auch innerhalb der Kategorien der Qualität nach gereiht.

Des Weiteren wurden auftretende Fehlvorstellungen erfasst, kategorisiert und mit den in der Literatur beschriebenen einschlägigen (Fehl-)Vorstellungen von Schüler/innen (z.B. Marx, 2013) verglichen.

### 3. Resultate und Interpretation

In Tabelle 2 sind die absoluten Häufigkeiten des Auftretens der drei GV in ihren jeweiligen Qualitätsausprägungen zu den beiden Erhebungszeitpunkten angegeben. Die Zeile # gibt die Summe der absoluten Häufigkeiten des Auftretens der entsprechenden GV zum jeweiligen Zeitpunkt an. Schließlich wird in der Zeile Ø das arithmetische Mittel der Ausprägungsqualität der GV angegeben, wobei die Kategorie U unberücksichtigt blieb und die Kategorie F der Kategorie 1 zugeschlagen wurde.

	AV(1)	AV(2)	UV(1)	UV(2)	OV(1)	OV(2)
U	8	9	0	0	3	0
1	19	9	1	2	6	0
2	14	23	1	6	0	0

3	2	4	1	3	0	0
4	0	0	0	3	0	1
#	44	45	3	14	9	1
Ø	1.39	1.81	2.0	2.5	1.0	4.0

Tab. 2: Absolute Häufigkeiten der Qualitätsausprägungen der GV

Dabei zeigen sich folgende Auffälligkeiten: Die AV wird zu beiden Zeitpunkten am häufigsten genannt. Dies überrascht insofern, als ja die Standarddefinition der Analysis auf die UV referenziert und nach der Fachausbildung nur 3 Nennungen verzeichnet, was sich auf immerhin 14 Nennungen nach der Schulmathematik-Ausbildung erhöht. Des Weiteren zeigt sich deutlich, dass die Nennungen der AV durchwegs niedrige Ausprägungsqualität aufweisen und insgesamt keine voll zufriedenstellende Formulierung genannt wurde. Dem gegenüber weisen die Nennungen der UV insbesondere zum Zeitpunkt (2) eine wesentlich höhere Qualität auf ( $\bar{x}=2.5$ ). In dieses Bild fügt sich auch die Tatsache, dass Fehlvorstellungen vor allem im Zusammenhang mit der AV auftreten (29 bzw. 22 zum Zeitpunkt (1) bzw. (2)). Auch konnten einige der wesentlichen von Marx (2013) festgestellten Schüler/innen-Fehlvorstellungen in unserer Untersuchung wiedergefunden werden, z. B: Limes als letztes Folgeglied, Limes als Grenze/Schranke der Annäherung, die nicht überschritten/erreicht werden kann. Das bedeutet, dass ca. 1/3 der Proband/innen Fehlvorstellungen äußern, die denen von Schüler/innen ähneln und die durch die Lehramtsausbildung nicht ausreichend korrigiert werden konnten. Die OV trat insgesamt nur selten bzw. in unspezifischer Form auf, so dass eine Interpretation nicht sinnvoll erscheint.

Es erscheint daher fruchtbringend, folgende Erkenntnisse in die Gestaltung von Lehrveranstaltungen einfließen zu lassen, etwa durch explizite Diskussion der GV, evtl. im historischen Kontext, bzw. im Kontext dynamischer und statischer Sichtweisen auf den Grenzwertbegriff: Viele Studierende neigen primär zu einer, allerdings qualitativ mangelhaft ausgeprägten AV, während die UV (neben der Tatsache mathematisch anschlussfähiger zu sein) einfacher in ansprechender Qualität auszudrücken ist.

## Literatur

- Ableitinger, C., Kittinger, H., Steinbauer, R. (2020). Adressatenspezifische Gestaltung von Fachvorlesungen im Lehramt: eine Fallstudie als Anstoß für vertiefte Reflexionen. *Math. Did.* 43.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer-Spektrum.
- Marx, A. (2013). Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen. *J. Math. Did.* 34:73-97.
- Universität Wien (2016). *Mitteilungsblatt*. Studienjahr 2015/16, 41. Stück. *Curricula*. Abgerufen von [http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015\\_2016/2015\\_2016\\_246.pdf](http://www.univie.ac.at/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf)