6 KOMPAKTHEIT

kompakte

6.1. EINLEITUNG: Aus der Analysis sind kp = abg Intervalle bzw kp Mengen als besonders praktisch bekannt, z.B.

- stetige Fkt auf kp Intervallen sind gleichmäßig stetig
- stetige Fkt auf kp Mengen nehmen max. & min an.

Außerdem sind kp Mengen in $\mathbb{R}^n$ einfach zu charakterisieren

- [Heine-Borel] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kp $\iff$ A beschr + abg.

In allgemeinen Situationen ist Kompaktheit nicht-mehr so einfach charakterisierbar – wir werden einige Kriterien f. Kompaktheit diskutieren; was bleibt ist ein starker Bezug zu kp und abgeschlossen.

Insgesamt ist Kompaktheit ein freundlicher/nützlicher Begriff; kp Räume sind insbesondere deswegen einfacher, da sie es erlauben lokale Eigenschaften auf den ganzen (kp!) Raum fortzusetzen. [vgl. 6.5 Bem]

6.2. DEF (Kompakt) $(X, \mathcal{O})$ t.R.

(i) X heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h.

$$\underbrace{\forall (O_i)_{i\in I},\ O_i \text{ offen},\ X = \bigcup_{i\in I} O_i}_{(O_i)_i \text{ offene Überd. von } X} \Longrightarrow \underbrace{\exists n, i_1, i_2, \dots i_n \in I: X = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}}_{O_{i_1}, \dots, O_{i_n} \text{ endl. Teilüberd.}}$$

(ii) $Y \subseteq X$ heißt kompakt, wenn $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ kp ist.

6.2A WARNUNG: Oft wird (i) als quasikp bezeichnet und kp als T_2 + quasikp definiert z.B. [BOURBAKI]

6.3 BEM (Kompaktheit)

(i) 6.2(ii) $\Longleftrightarrow$ $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ (O_i offen in X) $\Rightarrow \exists n, i_1, \dots, i_n: Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_i$

Es ist also egal, ob Y „genau passend" (mit $=$) überdeckt wird, oder „überstehend" (mit $\subseteq$) mittels X-offener Mengen. [Hausübung]

(ii) Kompaktheit ist eine INTRINSISCHE Eigenschaft; es kommt nicht darauf an ob oder wie Y in einem größeren top. Raum liegt, sondern nur auf die Top auf Y an.

Im Unterschied dazu ist Abgeschlossenheit nicht intrinsisch:

$(0,1)$ ist abg in $(0,1)$ mit der Spurtop

$(0,1) \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ ist nicht abgeschlossen.

NICHT VORGETRAGEN

(iii) WARNUNG: In 6.2(i) ist die Reihenfolge der Quantoren essentiell: (Für jede ÜD $\exists$ endl. Teil(ÜD)).
Beachte dazu folgende Beispiele auf $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$

•) $\{(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ offene ÜD von $(0,1)$
$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ist endl. TÜD aber $(0,1)$ ist nicht kp

•) $\{(\frac{k}{n}, \frac{k+2}{n}) \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3, k = -1, \dots, n-1\}$
ist offene ÜD von $[0,1]$ und $\{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})\}$ ist endl. TÜD aber das genügt nicht als Beweis f. die Kompaktheit von $[0,1]$

•) $\{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \mid n \geq 3\}$ ist offene ÜD von $(0,1)$ und besitzt keine endl. TÜD; damit ist $(0,1)$ nicht kp.

6.4 BEOBACHTUNG (Einfache kp. Mengen)

(i) Jede endl. Menge ist kp, denn ist $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_i G_i$, wähle zu jedem $1 \leq j \leq n$: $G_{i_j} \ni x_j \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$

(ii) Jede Vereinigung von zwei (endlich vielen) kp Mengen ist kompakt; ... $A \cup B \subseteq \bigcup_{\text{endl}} \cup \bigcup_{\text{endl}} = \bigcup_{\text{endl.}}$

6.5 BEM (Vom Nutzen der Kompaktheit)

In einem kompakten Raum $(X, \mathcal{O})$ kann auf folgende Art von lokalen Eigenschaften auf globale Eig. geschlossen werden:

Sei (E) eine Eigenschaft, die offene Mengen in X haben können oder nicht.

Zusätzlich gelte: Haben U, V die Eig. (E), dann auch $U \cup V$.

Dann haben wir folgendes

"<u>THM</u>": Gilt (E) lokal (d.h. $\forall x$ $\exists$ offene Umgebung von x mit (E)), dann gilt (E) auf ganz X.

"<u>Beweis</u>": $\forall x$ sei U_x eine offene Umgebung von x mit (E). Es gilt $X = \bigcup_{x \in X} U_x$; X kp $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n$: $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Nach obigem und Induktion haben endliche Vereinigungen von offenen Mengen mit (E) wieder (E) $\Rightarrow$ X hat (E). $\square$

<u>Bsp</u>: $f: X \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt (z.B. f stetig)

[d.h. $\forall x \in X$ $\exists U_x \in \mathcal{U}_x$ $\exists M_x$: $|f(x)| \leq M_x$ $\forall x \in U_x$]

X kp $\Rightarrow$ f beschränkt.

<u>6.6 SATZ</u> (Stetige Bilder kp Räume sind kp) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ t.R.

$f: X \to Y$ stetig, X kp $\Rightarrow$ $f(X)$ kp

<u>Beweis</u>: Sei $(O_i)_i$ offene ÜD von $f(X)$ $\Rightarrow$ $(f^{-1}(O_i))_i$ offene ÜD v. X

[denn $f^{-1}(O_i)$ offen und $X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_i O_i) = \bigcup_i f^{-1}(O_i)$]

X kp $\Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n$: $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{i_k})$ $\Longrightarrow$

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{i_k})\Big) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(O_{i_k})) = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}. \quad \square$$

6.7 SATZ (Kompaktheit via HW von Netzen)

$(X,\mathcal{O})$ kp $\overset{①}{\Longleftrightarrow}$ Jedes Netz in X hat einen HW in X

20.VO 3.6.

$\overset{②}{\Longleftrightarrow}$ Jedes Netz in X hat eine in X konv. Verfeinerung

21.VO, 8.6.

Beweis ($\overset{①}{\Longrightarrow}$) Indir. ang. $\exists\ (x_\lambda)_\lambda$ in X ohne HW in X, d.h.

$\forall x\in X\ \exists U_x\in\mathcal{U}_x\ \exists \lambda_x: \forall \lambda\geq\lambda_x\ \ x_\lambda\notin U_x$

Wähle U_x OBdA [wegen 2.18] offen. Dann gilt

$X=\bigcup\limits_{x\in X} U_x \overset{kp}{\Longrightarrow} \exists x_1,\dots,x_n: X=\bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Wähle nun $\lambda_0\geq\lambda_{x_k}\ \forall k$

(hat!) $\Rightarrow x_{\lambda_0}\notin U_{x_k}\ \forall k \Rightarrow x_{\lambda_0}\notin X$. ↯

($\overset{①}{\Longleftarrow}$) Sei $X=\bigcup\limits_{i\in I} O_i$, O_i offen und indir. ang. $\nexists$ endl. TeilÜD

Sei $\Lambda:=\{F\subseteq I \mid F \text{ endl.}\}$, $F_1\leq F_2 :\Leftrightarrow F_1\subseteq F_2 \Rightarrow (\Lambda,\leq)$ g.M.

Es gilt $\forall F\in\Lambda: \bigcup\limits_{i\in F} O_i\neq X \Rightarrow \exists x_F\in X\setminus\bigcup\limits_{i\in F} O_i$

Lt. Voraus hat $(x_F)_F$ einen HW $x\in X$ und $\exists i_0: x\in O_{i_0}\in\mathcal{U}_x$

Da $\{i_0\}\in\Lambda \Rightarrow \exists F\in\Lambda: F\geq\{i_0\}: x_F\in O_{i_0}$

Das widerspricht aber der Konstruktion von $(x_F)_F$, denn

$x_F\in X\setminus\bigcup\limits_{i\in F} O_i\subseteq X\setminus O_{i_0} \Rightarrow x_F\notin O_{i_0}$.

($\overset{②}{\Longleftrightarrow}$) Folgt sofort aus 3.15.

6.8 SATZ (Kompakt vs. Abgeschlossen) $(X,\mathcal{O})$ t.R. $A \subseteq X$. Dann gilt

(i) X kompakt: A abg $\Rightarrow$ A kp

[Abg. Teilmengen kompakter Räume sind kp]

(ii) X T_2: A kp $\Rightarrow$ A abg.

[Kp Teilmengen eines Hausdorffraumes sind abg.]

6.9 KOR: X kp, T_2, $A \subseteq X$: A abg $\Leftrightarrow$ A kp

6.10 WARNUNG zu 6.8

(i) ist ohne kp falsch: $X = \mathbb{R} = A$ mit $\mathcal{O}_n$

(ii) ist ohne T_2 falsch: $(X, \mathcal{O}_{ke})$; jede endliche Menge A ist kp (6.4(ii)), aber nur $\emptyset, X$ sind abg.

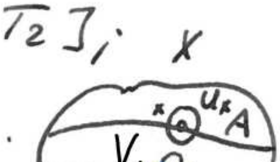
Beweis von 6.8 (i) Sei $\underset{\sim}{A} \subseteq \bigcup_{i \in I} \underset{\sim}{O_i}$, O_i offen $\Rightarrow$ $X = A \cup A^c =$

$$= \bigcup_{i \in I} O_i \cup \underset{\text{offen!}}{A^c} \xRightarrow{X \text{ kp}} \underset{\sim}{\exists\, i_1, \dots, i_n}\ X = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \cup A^c \Rightarrow \underset{\sim}{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \underset{\sim}{O_{i_k}}$$

(ii) Wir zeigen A^c ist offen; sei $y \in A^c$; $\forall x \in A$ $(x \neq y!)$

$\xRightarrow{T_2}$ $\exists U_x, V_x$ offen: $x \in U_x$, $y \in V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$ [wegen T_2];

$A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \xRightarrow{kp} \exists\, x_1 \dots x_n$: $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} =: U$.



Nun ist $y \in V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$; V offene Umgebung von y und

$$y \in V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k} \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_{x_k}^c = \Big(\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k} \Big)^c \subseteq A^c \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}_y.$$

$\square$

Wir sind nun in der Lage einen hübschen Satz über Homöomorphie zu beweisen [vgl. dazu 4.9.]

6.11 SATZ (Homöomorphien von kp in T_2-Räume)

Sei $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig + bijektiv, X kp, Y T_2

Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis: ?? $f^{-1}=:g:Y\to X$ ist stetig; verwende 4.4 (ii)

$A\subseteq X$ abg $\overset{6.8(i)}{\Longrightarrow}$ A kp $\overset{6.6.}{\Longrightarrow}$ $f(A)$ kp $\overset{6.8(ii)}{\Longrightarrow}$ $f(A)=g^{-1}(A)$ abg. $\square$

6.12 KOR. Eine kp Topologie kann Hausdorffsch nicht vergröbert werden, d.h. $(X,\mathcal{O}_1)$ kp, $\mathcal{O}_2$ T_2-Top auf X mit $\mathcal{O}_2\subseteq\mathcal{O}_1\Rightarrow\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$.

Beweis: $id:(X,\mathcal{O}_1)\to(X,\mathcal{O}_2)$ stetig, da $id^{-1}(\mathcal{O}_2)=\mathcal{O}_2\subseteq\mathcal{O}_1$.

6.11 $\Rightarrow$ id^{-1} stetig $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_1\subseteq\mathcal{O}_2$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2$. $\square$

6.13 SATZ Jeder kp T_2-Raum ist normal [vgl. 3.22(vi)]

Beweis: Wir müssen T_1+T_4 zeigen. $T_2\Rightarrow T_1$ [3.22(i)]; bleibt T_4 ??:

Seien $A,B\subseteq X$ abg, $A\cap B=\emptyset$ $\overset{6.8(i)}{\Longrightarrow}$ A,B kp; Wir steigen in den Bew von 6.8(ii) ein: Dort haben wir für A kp und $y\in A^c$ – jetzt $y\in B$! – disjunkte offene Mengen U – jetzt U_y – und V – jetzt V_y – angegeben sodass $A\subseteq U_y$, $y\in V_y$. Nun gilt $B\subseteq\bigcup_{y\in B}V_y\overset{kp}{\Longrightarrow}\exists y_1\dots y_n$: $B\subseteq\bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$. Setze $U:=\bigcap_{k=1}^n U_{y_k}$, $V:=\bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$. Dann gilt U,V offen, $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ und

$$U\cap V=U\cap\bigcup_{k=1}^n V_{y_k}=\bigcup_{k=1}^n(U\cap V_{y_k})\subseteq\bigcup_{k=1}^n(U_{y_k}\cap V_{y_k})=\emptyset. \quad\square$$

Der wahrscheinlich wichtigste Satz über kp Mengen ist

6.14 THM (Tychonoff) $(X_i, \mathcal{O}_i)$ t.R $\forall i \in I$ (beliebig)

$$\boxed{X = \prod_{i\in I} X_i \text{ kp} \iff \forall i \in I: X_i \text{ kp}}$$

bzgl Produkttopologie

Beweis: $(\Rightarrow)$ Folgt sofort aus 6.5, da $pr_k : X \to X_k$ [vgl. 5.11] stetig und surjektiv

$(\Leftarrow)$ o.B. [Diese, die nichttriviale Richtung benutzt

21.VO das Auswahlaxiom - oder eine dazu äquivalente Bed. -

18.6. und ist über Filter [vgl. 3.16(ii)] „einfach" zu führen.]

22.VO, 10.6.

6.15 BEM (Kompaktheit im Anschluß an die Analysis]

Im $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von Heine-Borel $(A \subseteq \mathbb{R}^n)$

$$A \text{ kp} \iff A \text{ beschränkt + abg.}$$

Diese Aussage hat in allg top. Räumen keinen Sinn ①; dort wo sie Sinn hat ist sie i.a. falsch ②

ad 1): Was soll in t.R. beschränkt bedeuten; dieser Begriff ist nur in spezielleren Räumen (z.B MR) definierbar.

ad 2): In $\mathbb{R}$ gilt

$$A \text{ kp} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} A \text{ beschr} + \text{abg}$$

($\Rightarrow$) In $\mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ AA1 2.53(ii)) gilt 6.7 mit Folgen statt Netzen [vgl. 2.56(i)]; Also A kp $\Leftrightarrow$ Jede Folge in A hat eine in A konvergente TF.

Dieser Begriff wird auch als Folgenkompaktheit bezeichnet

Nun kann A nicht unbeschränkt sein, denn sonst könnte eine Folge ohne konv. TF konstruiert werden. Ebenso muß A abg. sein, sonst sei $(x_n)_n$ Folge in A und $x_n \to x \notin A$ [3.10(i) in AA1-Räumen für Folgen] Jede TF von x_n konvergiert aber ebenfalls gegen x, das wegen der Kompaktheit aber in A liegen muß ↯.

($\not\Leftarrow$) In jedem ∞-dimensionalen NVR ist die abg. Einheitskugel $\{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$ beschr + abg aber nicht kp! Z.B.: $\ell^2 := \{x = (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum x_n^2 < \infty\}$ mit $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_n x_n^2}$ ist Hilbertraum und die Folge der Standardeinheitsvektoren $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ erfüllt $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ $\forall m, n$. Daher $\nexists$ konv. TF.

n.te Stelle

ALSO VORSICHT! Es ist Aufgabe der Top bzw. der linearen Funktionalanalysis auf einzelne Räume zugeschnittene Kompaktheitskriterien zu liefern (z.B. Satz v. Arzela-Ascoli für $C[a,b]$; glm. quadr. Summierbarkeit in ℓ^2)

10.6. 22.15

Zusammenfassung: Kompaktheit in der Analysis + anderswo

NICHT VORGETRAGEN

Thm: $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent

(i) Jede Folge in A hat einen HW (resp. eine in A konvergente TF)

(ii) Jede offene Überdeckung von A hat eine endl. Teilüd.

(iii) A ist beschränkt und abg.

Bem (1) Meist wird (i) als Definition für Kompaktheit verwendet. In allgemeineren Räumen heißt (i) Folgenkompaktheit.

(2) Eigenschaft (ii) heißt meistens die Überdeckungseigenschaft.

(3) In MR, AA1-Räumen gilt (ii) $\Leftrightarrow$ (i). [überall wo Folgen die Konvergenz beschreiben ist Folgenkp äquivalent zur Überdeckungseigenschaft; manchmal als Überdeckungssatz von Heine-Borel bezeichnet]

(4) (i) resp (ii) $\Rightarrow$ (iii) bleibt in MR richtig [6.15]. Darüberhinaus ist (iii) (genauer: beschränkt) sinnlos.

(5) (iii) $\Rightarrow$ (ii) resp (i) ist schon in NVR mit $\dim = \infty$ i.a. falsch; daher erst recht in MR.

(6) In top. Räumen gilt immerhin (ii) $\Leftrightarrow$ (i)' [= (i) für Netze] [6.7]

(7) —"— gibt es starke Beziehungen zu kp & abg.
[6.8, 6.9]

$\boxed{7}$ ZUSAMMENHANG

23.VO
15.6.

7.1 MOTIVATION: Einer der wichtigsten Sätze der Analysis 1 ist der Zwischenwertsatz; er beruht auf dem „Zusammenhang" der reellen Zahlen [vgl. 1.19]. Wir wollen diesen Begriff nun in allgemeinen top. Räumen definieren und seine wichtigsten Eigenschaften studieren.

[Nebenbei bemerken wir, dass wir unser Programm TC aus 0.1 damit zu Ende führen...]

7.2 DEF (Disjunktion). $(X,\mathcal{O})$ t.R. Eine Disjunktion von X ist ein Paar nichtleerer, disjunkter offener Teilmengen G_1, G_2 von X sodass $X = G_1 \cup G_2$.

7.3 BEM (Disjunktion, offen+abgeschlossene Mengen)

(i) G_1, G_2 können als „getrennte Teile" von X angesehen werden, die nichts voneinander wissen – im top. Sinne. z.B. $x \in G_1 \Rightarrow G_1 \in \mathcal{U}_x$ und G_2 ist „weit weg" von x weil es durch G_1 abgeschirmt wird z.B.:

$X = (0,1) \cup [2,3]$, $G_1 = (0,1)$, $G_2 = [2,3]$

ist offen in $\mathcal{O}_n|_X$! [vgl. 5.5(ii)]

(ii) G_1, G_2 sind genau die nicht-trivialen offen-abgeschlossenen Mengen in X.

LETZTE WARNUNG: offen ist nicht das Gegenteil von abgeschlossen!

[engl: "clopen" dt. Rückübersetzung "abgeschloffen" ???]

Beweis:

G_1, G_2 Disjunktion $\Rightarrow$ G_1 offen, $X \setminus G_2 = G_1$ auch abg. G_2 analog

G offen, abg, $\neq \emptyset$, $\neq X$ $\Rightarrow$ G, $G^c = X \setminus G$ ist Disjunktion.

7.4 DEF (Zusammenhang) Sei $(X, \mathcal{O})$ top. Raum

(i) X heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ X hat keine Disjunktion

[d.h. $X = G_1 \cup G_2$ beide offen, nicht leer, disjunkt ist nicht möglich!

d.h. [vgl. 7.3(ii)] Die einzigen offen-abgeschlossenen Mengen in X sind: $X, \emptyset$.]

(ii) $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow$ $(A, \mathcal{O}|_A)$ ist zsh.

7.5 BSP (zsh. Räume) (i) $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}_n$ ist zsh.

Denn angenommen nicht $\Rightarrow$ $\exists$ Disj. G_1, G_2. Wähle $p_1 \in G_1$, $p_2 \in G_2$ und oBdA $p_1 < p_2$. Sei $s = \inf\{x \in G_2 \mid p_1 < x\}$. Dann ist $a < p_1 \leq s \leq p_2 < b$
$\Rightarrow s \in (a,b)$ aber $s \notin G_1$, $s \notin G_2$, denn

- $s \in G_1 \Rightarrow G_1$ (offen!) ist Umgebung von s. $\overset{\text{Def des inf}}{\Rightarrow}$ G_1 enthält Pkte aus G_2 ↯
- $s \in G_2 \Rightarrow s \neq p_1$ und $s \geq p_1 \Rightarrow p_1 < s \overset{G_2 \text{ offen}}{\Rightarrow} \exists$ ε-Umg. von s mit $\varepsilon < s - p_1$, die ganz in G_2 liegt. ↯ zur Def des Inf.

Also G_1, G_2 keine Disj. Widerspruch. $\square$

(ii) Die leere Menge und jede einpunktige Menge ist zsh.

(iii) Jede mind. 2-punktige Menge mit $\mathcal{O}_{dis}$ ist nicht zsh.

(iv) $\mathbb{Q}$ mit der Spurtop von $\mathbb{R}$ ist nicht zsh, denn

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})\right) \cup \left(\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)\right).$$

<u>7.6. BEM</u> (Zusammenhangskomponenten)

Jeder t.R lässt sich in <u>Zusammenhangskomponenten</u> zerlegen, d.h. <u>maximale zsh. Teilmengen</u> (ohne Beweis).

Für "schöne Mengen" ist das genau das erwartete; im Allgemeinen: <u>Vorsicht</u>!

Die Zusammenhangsk. von $\mathbb{Q}$ sind die einpktigen Mengen $\{r\}$

Die einzige —"— von $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$ selbst; diese Aussage gilt für alle zsh. Räume

<u>7.7 BEM</u> (Vom Nutzen des Zusammenhangs)

In einem zsh. Raum kann auf folgende Art von lokalen Eigenschaften auf globale Eig. geschlossen werden:

Sei (E) eine Eigenschaft, die Punkte in X haben können oder nicht und es gelte

(1) $\exists x$ in X, das (E) hat

(2) Hat x (E) dann auch alle y in einer Umgebung von x

(3) Hat x (E) nicht, —"— kein y —"— —"— ——.

Dann gilt das folgende

"THM." Ist X zsh, dann haben alle $x \in X$ Eigensch. (E).

"Beweis": Sei $G_1 = \{x \in X \mid x \text{ hat } (E)\}$, $G_2 = \{x \in X \mid x \text{ hat } (E) \text{ nicht}\}$

G_1, G_2 offen wegen (1), (2), disjunkt und $X = G_1 \cup G_2$.

Da X zsh $\nexists$ Disjunktion, $G_1 \neq \emptyset \Rightarrow G_2 = \emptyset \Rightarrow X = G_1$. □

Bsp: $f: X \to Y$ lokal konstant $[\forall x\, \exists U \in \mathcal{U}_x : f|_U = \text{const}]$

X zsh $\Rightarrow f$ konstant auf X, sonst wäre

$G_1 = \{x \mid f(x) = y\}$ $G_2 = \{x \mid f(x) \neq y\}$ Disjunktion.

einer der lokal von f angenommenen Werte

7.8 SATZ (Stetige Bilder zsh. Räume)

Stetige Bilder zsh. Räume sind zusammenhängend.

Beweis: Indirekt sei $f: X \to f(X) \subseteq Y$, $f(X)$ nicht zsh $\Rightarrow$

$\exists$ Disjunktion $G_1, G_2 \Rightarrow f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2)$ ist Disjunktion

von X. ↯ □

7.9 SATZ (Zsh. Mengen in $\mathbb{R}$) Die mindestens zweipunktigen

zsh. Mengen in $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}_n$ sind genau die Intervalle.

Beweis "$\Leftarrow$" wie in Bsp 7.5(i) auch für abg, halboffene Int.

"$\Rightarrow$" A zsh, $x_1 < x_2 \in A \Longrightarrow [x_1, x_2] \subseteq A$ (*), denn oy nicht

$\exists s \in (x_1, x_2)$ aber $s \notin A \Rightarrow A = \big(A \cap (-\infty, s)\big) \cup \big(A \cap (s, \infty)\big)$

Und das wäre eine Disjunktion von A

Aber $(*) \Rightarrow A$ ist Intervall, denn setze $a = \inf A$

$\Rightarrow$ entweder $a \in A \Rightarrow A \subseteq [a, \infty)$ (also $A = [a, \dots]$ oder $= [a, \dots)$)

oder $a \notin A \Rightarrow A \subseteq (a, \infty)$ (also $A = (a, \dots]$ oder $= (a, \dots)$)

und analog für $b = \sup A$. □

7.10 KOR (Zwischenwertsatz)

Sei $f : (X, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ stetig, X zsh. Dann gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ und } f(x_1) < t < f(x_2) \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = t.$$

[Im Fall X ein reelles Intervall ergibt sich der ZWS der Analysis 1.] 23. VO 15.6.

Beweis: $7.8 \Rightarrow f(X)$ zsh $\overset{7.9}{\Rightarrow} f(X)$ ist Intervall;

mit $f(x_1), f(x_2)$ ist auch $t \in f(X) \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = t$. □

Zum Schluß des Kap. stellen wir noch einen top. Begriff vor.

7.11 DEF (Wegzusammenhang) $(X, \mathcal{O})$ t.R. 24. VO 17.6.

X heißt wegzusammenhängend (bogenweise zusammenh.)

$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X \; \exists c : [0,1] \to X$ stetig: $x = c(0)$, $y = c(1)$

[c wird als stetiger Weg von x nach y bezeichnet]

7.12 PROP ((Weg)-Zsh)

$$\boxed{X \text{ wegzsh } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} X \text{ zsh}}$$

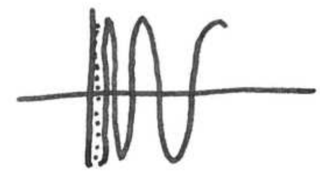
Beweis: „$\Rightarrow$" Wäre G_1, G_2 Disj. von X, wähle $x \in G_1$, $y \in G_2$

lt. Voraus. $\exists$ stetiger Weg von x nach y; $c^{-1}(G_1), c^{-1}(G_2)$

Disj. von $[0,1]$ ↯ zu 7.9.

"$\ast$" $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\} \cup \{0\} \times [-1,1]$

mit der Spurtop des $\mathbb{R}^2$ ist zsh
aber nicht wegzsh [CR, p152]



7.13 Bem ((Weg)-zsh)

Die Umkehrung von 7.12. stimmt, falls X zsh und X lokal wegzsh, d.h. jedes $x \in X$ besitzt eine wegzsh. Umgebung.