8 Metrische Räume, Teil 2: Spezielle Resultate über M.R.

8.1. Einleitung: In diesem letzten Kapitel befassen wir uns mit Eigenschaften M.R., bei denen es wirklich auf die Metrik ankommt – und nicht nur die von der Metrik induzierte Top. Diese Inhalte werden trotzdem traditionell als Teil der mengentheoretischen Topologie gesehen.

vgl. Bem 4.12

Aus der Vielzahl möglicher Themen behandeln wir 3 besonders für die Analysis relevante:

- Vervollständigung M.R.
- Fixpunktsatz von Banach
- Satz von Baire

8.2. Notation: In diesem Kapitel sei (X,d) immer M.R und $\mathcal{O}_d$ die von d induzierte Topologie (vgl. 2.4(ii)) auf X; die sogenannte metrische Topologie auf X.

$[\ \mathcal{O}_d := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O\ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq O\}\ ]$

§ 8.1. Vervollständigung M. R.

Lesetipp: [J, IV]

8.3 Erinnerung = 1.20(i) (Cauchy Folge) Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt Cauchy Folge :$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n \geq N$ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$

8.4. Bem (CF und Konvergenz)

(i) $(x_n)_n$ konvergent $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ Cauchy, denn

$$d(x_m, x_n) \leq \underbrace{d(x_m, \lim x_k)}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } m \text{ groß}} + \underbrace{d(\lim x_k, x_n)}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \text{ groß}} < \varepsilon$$

(ii) $(x_n)_n$ CF $\not\Rightarrow$ $(x_n)_n$ konvergent, denn sei $X=(0,1]$ mit $d(x,y)=|x-y|$, dann ist $x_n = \frac{1}{n}$ CF in X aber nicht konv. in X.

(iii) Es ist also eine Eigenschaft von X, ob jede CF konvergiert; diese ist von höchster Wichtigkeit, daher...

8.5 Def (Vollständigkeit) (X,d) M.R

X heißt vollständig :$\Leftrightarrow$ $\forall$ CF $(x_n)_n$ in X $\exists x \in X$ mit $\lim x_n = x$.

8.6 Bsp (Vollständige M.R.)

(i) $(\mathbb{R}, |\ |)$ ist vollst. [Vollständigkeitsaxiom der Analysis]

(ii) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ ist vollst. aber auch mit jeder anderen von einer Norm stammenden Metrik [vgl. Hö, 17.9]

(iii) $(E, \| \ \|)$ NVR $d(x,y) := \|x-y\|$

Ist (E,d) vollständig so heißt $(E, \| \ \|)$ Banach-Raum

(iv) $(E, \langle \ \rangle)$ Vektorraum mit Skalarprod.

$d(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$. Ist (E,d) vollständig, so heißt $(E, \langle \ \rangle)$ Hilbert-Raum.

8.7 BEOBACHTUNG (Vollständigkeit) (ohne Beweise)

(i) $(X, \mathcal{O}_d)$ kp $\Rightarrow$ (X,d) vollst.

(ii) (X,d) vollst, $A \subseteq X$. Dann gilt

$$A \text{ abg.} \iff A \text{ vollst. (bzg. } d|_{A \times A})$$

z.B. ist $C([a,b])$ abg. im Banach-Raum $(B([a,b]), \| \ \|_\infty)$ und daher selbst ein B-Raum.

beschränkte Fkt

8.8. BEM (Bedeutung der Vollst.) Eine wichtige Technik der Analysis ist es die Existenz eines Objekts als Limes einer CF zu konstruieren; Klarerweise funktioniert das nur in vollst. Räumen! z.B. wird oft die Lösung einer Gleichung als limes approximativer Lösungen gewonnen [vgl. auch Fixpktsatz v. Banach 8.20.].

8.9. MOTIVATION (Vervollständigung) Wir stellen uns – durch die Wichtigkeit der Vollständigkeit motiviert – die folgende Frage:

Gegeben ein nicht-vollst. M.R. (Wie) Können wir diesen durch Hinzufügen möglichst weniger "neuer Punkte" zu einem vollst. M.R. machen?

Die Antwort lautet: $\boxed{\text{JA}}$ es gibt immer genau eine "Vervollständigung"; sie kann mittels Hinzufügen von Limiten nicht-konv. CF gewonnen werden.

Um das exakt zu machen, benötigen wir etwas Terminologie.

8.10 DEF (Vervollständigung) Sei (X, d) M.R. Ein vollst. M.R. $(\hat{X}, \hat{d})$ mit $X \subseteq \hat{X}$ heißt EINE Vervollständigung von X falls (i) $\hat{d}(x,y) = d(x,y)$ $\forall x, y \in X$

(ii) $\overline{X} = \hat{X}$ ⊛

die metrischen Strukturen von $X, \hat{X}$ sind kompatibel, d.h. $\underbrace{\hat{d}|_{X \times X} = d}$

X liegt dicht in $\hat{X}$

d.h. $\hat{X}$ ist möglichst klein, da jeder "neue" Pkt $x \in \hat{X} \setminus X$ Limes einer Folge in X ist, also nicht weggelassen werden kann. □

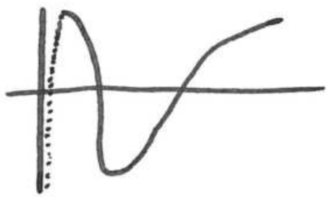
24. VO 17.6.

⊛ ACHTUNG: Abschluss von X in $\hat{X}$! [$\overline{X}$ in X ist ja gleich X; cf 2.40(iii)]

8.12 Bsp (Vervollständigungen)

(i) $X=(0,\infty)$ hat $[0,\infty)$ als eine(!) Vervollständigung.

(ii) $X=\{(x,\sin\frac{1}{x}) \mid x>0\}$; Eine Vervollständigung ist



$X\cup\{0\}\times[-1,1]$.

25. VO 22.6.

Diese Bsp zeigen, dass als top. Räume homöomorphe MR durchaus verschiedene Vervollst. haben können; Vervollst ist also definitiv kein top. Konzept [vgl. auch Bem 4.12]

8.13 THM (Vervollst. M.R) Zu jedem MR gibt es (mind.) eine Vervollständigung. Je zwei Vervollst. sind isometrisch isomorph.

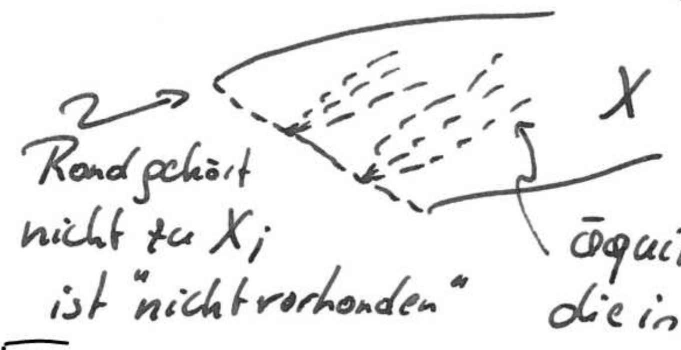
d.h. $\exists$ bijektive Abb φ, die die Metriken respektiert, genauer $(\hat{X},\hat{d})$, $(\tilde{X},\tilde{d})$ 2 Vervollst $\Rightarrow \exists\, \varphi: \hat{X}\to\tilde{X}$ bijektiv und $\tilde{d}(\varphi(\hat{x}),\varphi(\hat{y}))=\hat{d}(\hat{x},\hat{y})\ \forall \hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$.
[$\Rightarrow \varphi, \varphi^{-1}$ stetig]

Beweisidee: (Existenz) Sei N die Menge der nicht-konvergenten CF in X. Wir nennen 2 CF in N $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ äquivalent $:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)=0$ „hätten denselben Limes"...

Nun definieren wir $\boxed{\hat{X}:=X\cup N/\sim}$

prospektive Grenzwerte von CF

[graphische Veranschaulichung von $\hat{X}$]



NICHT VORGETRAGEN

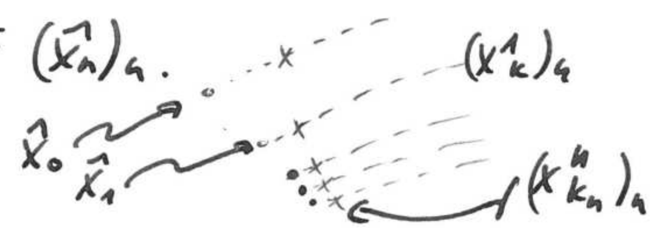
Die Metrik $\hat{d}$ auf $\hat{X}$ definieren wir nun gemäß

$$\hat{d}(x,y) := d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

$$\hat{d}(\hat{x},x) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) \quad \forall x \in X \ \forall \hat{x} = [(x_n)_n] \in N/_\sim$$

$$\hat{d}(\hat{x},\hat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \quad \forall \hat{x} = [(x_n)_n],\ \hat{y} = [(y_n)_n] \in N/_\sim$$

Nun können wir leicht alle Eigenschaften einer Vervollst. für $\hat{X}$ nachrechnen; einzig trickreicher Punkt ist die Vollst. für $\hat{X}$: Für CF in $\hat{X}$ die ganz in X liegen ist alles klar; für eine allg. CF $(\hat{x}_n)_n$ in $\hat{X}$ wähle falls $\hat{x}_n \notin X$ ein CF $(x^n{}_k)_k$ in N mit $[(x^n{}_k)_k] = \hat{x}_n$ falls $\hat{x}_n \in X$ setze $(x^n{}_k)_k = x_n \ \forall k$. Dann ist $(x^n{}_{k_n})_n$ für geeignete k_n CF in X, hat also einen Grenzwert $\hat{x}$ in $\hat{X}$ und dieser ist auch Grenzwert der ursprünglichen CF $(\hat{x}_n)_n$.



(**Eindeutigkeit**) $\forall x \in X$ setze $\varphi(x) = x$

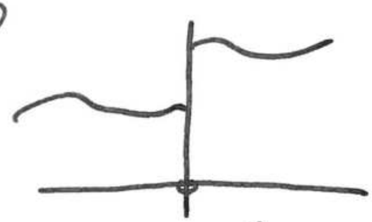
für $\hat{x} = [(x_n)_n] \in N/\sim$ setze $\varphi(\hat{x}) = \lim_{n\to\infty} (x_n)_n$ ($\exists$ in $\tilde{X}$, da $(x_n)_n$ CF in X)

8.14 MOTIVATION (Vervollständigung von Abb)

Wir stellen uns nun folgender Frage: Sei $f: X \to Y$ (Y M.R.) eine stetige Abb. Können wir f zu $\hat{f}: \hat{X} \to Y$ fortsetzen mit $\hat{f}$ stetig und $\hat{f}|_X = f$?

Die Antwort lautet: i.a. $\boxed{\text{NEIN}}$; es gibt folgende 2 Obstruktionen gegen die Stetigkeit von $\hat{f}$:

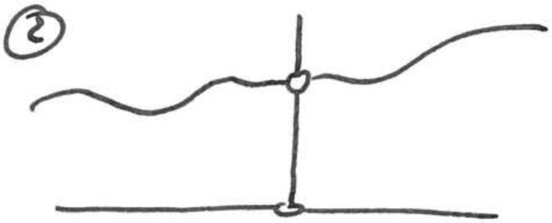
1



$X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\hat{X} = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$

Sprung an entscheidender Stelle

2



$X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\hat{X} = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Einzig möglicher Bildpunkt fehlt im Zielraum

Hindernis 2 können wir sicherlich ausschließen, wenn Y vollst. ist; also müssen wir zur Vervollst. $\hat{Y}$ übergehen.

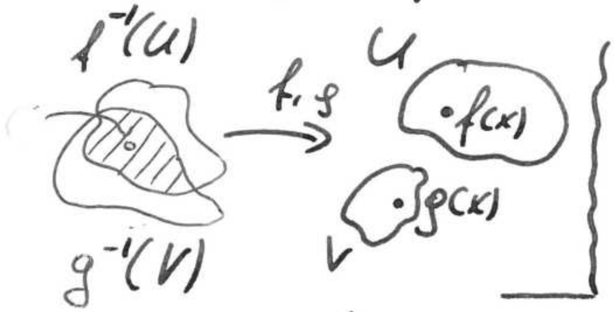
Hindernis 1 können wir vermeiden, wenn wir f als gleichmäßig stetig voraussetzen.

Zunächst stellen wir aber fest, dass wir f auf höchstens eine Art fortsetzen können.

8.15 Prop (Dicht definierte stetige Abb)

Sei $(X,\mathcal{O})$ t.R., $A \subseteq X$ dicht und $f,g: X \to Y$ stetige Abb in einen T_2-Raum. Stimmen f und g auf A überein, dann gilt schon $f=g$.

Beweis: Indirekt ang. $\exists x \in X: f(x) \neq g(x)$. Dann trenne $f(x)$ und $g(x)$ offen durch U und V. Wegen $U \cap V = \emptyset$ ist



dann auf ganz $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ $f \neq g$. Dies ist aber eine offene Umgebung von x. Widerspruch,

da $A \cap (f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)) \neq \emptyset$ [2.50(i)]. $\square$

8.16 Erinnerung (glm Stetigkeit) = 1.20(ii)

$f: X \to Y$ heißt glm stetig $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in X$

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

8.17 Satz (Vervollst. glm stetiger Abb)

Sei $f: X \to Y$ eine glm stetige Abb zw M.R. Sind $\hat{X}, \hat{Y}$ Vervollst. von X und Y dann existiert genau eine stetige Fortsetzung $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{Y}$ von f (d.h. $\hat{f}|_X = f$). $\hat{f}$ ist dann automatisch glm. stetig.

Beweisidee: Für $\hat{x} = \lim x_n$ ($x_n \in N$) setze $\hat{f}(\hat{x}) = \lim_n f(x_n)$.

§ 8.3. Der Banachsche Fixpunktsatz

8.18 Motivation („Existenzmaschinen" in vollst. M.R)

Den Gedankengang in 8.8 aufnehmend wollen wir nun eine der mächtigsten „Existenzmaschinen" der Analysis kennenlernen. Der Banachsche Fixpunktsatz generiert eine Lösung für eine Fixpunktgleichung direkt aus der Vollst des zugrundeliegenden Raumes. Angewendet auf gewöhnliche Differentialgleichungen liefert er ohne große Mühe den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf...

8.19 Def (Kontraktion) Eine Abb $T: X \to X$ heißt

Kontraktion $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, K$ mit $0 < K < 1$ sodass

$$d(Tx, Ty) \leq K\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

[$\Rightarrow T$ glm stetig mit $\delta := \varepsilon/K$]

8.20. Thm (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $T: X \to X$ Kontraktion am vollst. MR X.

Dann hat T einen eindeutigen Fixpunkt z

[d.h. $Tz = z$] und es gilt

$$z = \lim_n T^n x$$

für jeden beliebigen „Startpunkt" $x \in X$.

25.10
22.6.

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig; setze $T_x^1 := Tx$, $T_x^n := T(T_x^{n-1})$

$\Longrightarrow$ $d(T_x^{n+1}, T_x^n) \leq K d(T_x^n, T_x^{n-1}) \leq \dots \leq K^n d(Tx, x)$

26.05
24.6.

Sei nun $m > n$, dann gilt

$$d(T_x^m, T_x^n) \leq d(T_x^m, T_x^{m-1}) + d(T_x^{m-1}, T_x^{m-2}) + \dots + d(T_x^{n+1}, T_x^n)$$

$$\leq (K^{m-1} + K^{m-2} + \dots + K^n)\, d(Tx, x)$$

$$\leq (K^n + K^{n+1} + \dots \quad)\, d(Tx, x)$$

K<1
geom.
Reihe

$$= \frac{K^n}{1-K}\, d(Tx, x)$$

Wegen $K^n \to 0$ (Kontraktion!) ist $(T_x^n)_n$ CF.

X vollst $\Longrightarrow \exists\, z := \lim\limits_n T_x^n$.

Für z gilt (T stetig!)

$$Tz = T(\lim T_x^n) = \lim_n T_x^{n+1} = z$$

also ist z tatsächlich Fixpunkt von T.

Ang $\exists\, u, z$ mit $Tu = u$, $Tz = z$ dann folgt

$$d(z,u) = d(Tz, Tu) \leq K d(z,u)$$

und wegen $K < 1 \Rightarrow d(z,u) = 0 \Rightarrow z = u$; also ist z auch eindeutig.

$\square$

§ 8.3. Der Satz von Baire

8.21 Motivation (Bairsche Eigenschaft) Wir haben schon wiederholt festgestellt, dass Vollständigkeit keine top. Eigenschaft ist, sondern eine metrische (vgl. 4.12). Dennoch: die Top eines vollst. MR hat eine bedeutende Eigenschaft – die sog. Bairsche Eigenschaft. Diese besagt gewissermassen, dass der Raum "sehr viele Pkte hat" und ist von sehr großer Wichtigkeit für Anwendungen in der Funktionalanalysis [siehe etwa CR p.63-65]. Wie üblich benötigen wir einige neue Begriffe ...

8.22 Def (nirgends dicht; mager) $(X,\mathcal{O})$ t.R. $A \subseteq X$

(i) A heißt <u>nirgends dicht</u> $:\Leftrightarrow \overline{A}^{\circ} = \emptyset$

(ii) A heißt <u>mager</u> $:\Leftrightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ alle A_i nirgends dicht

8.23 Bem (nirgends dicht & mager)

(i) Nirgends dichte (n.d.) Mengen sind topologisch gesehen "klein" bzw "dünn"; ihre Abschlüsse enthalten keine nichtleeren offenen Mengen und keine Umgebungen.

(ii) Endliche Vereinigungen n.d Mengen sind n.d., denn $\Big[$ A, B n.d $O \in \mathcal{O}$ und $O \subseteq \overline{A \cup B} \underset{2.40(iv)}{=} \overline{A} \cup \overline{B}$

$\Rightarrow \underbrace{O \setminus \overline{A}}_{\text{(offen)}} \subseteq \overline{B} \underset{B \text{ n.d}}{\Rightarrow} O \setminus \overline{A} = \emptyset \Rightarrow O \subseteq \overline{A} \underset{A \text{ n.d.}}{\Rightarrow} O = \emptyset$ $\Big]$

$[O \setminus \overline{A} = O \cap \overline{A}^c]$

(iii) Daher sind magere Mengen gewissermassen die „höchst-größeren" Mengen; magere Mengen heißen auch manchmal Mengen von 1. Kategorie; nicht-magere Mengen Mengen von 2. Kategorie.

8.24 BSP (mager & n.d.)

(i) $\{x\}$ ist n.d. in $\mathbb{R}$; jede Gerade ist n.d in $\mathbb{R}^2$ jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist n.d.

(ii) $\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$ ist mager in $\mathbb{R}$; eine abz. Vereinigung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ ist mager.

8.25 Beobachtung (mager & n.d.)

(i) Teilmengen von $\left\{\begin{matrix}\text{n.d} \\ \text{mageren}\end{matrix}\right\}$ Mengen sind $\left\{\begin{matrix}\text{n.d} \\ \text{mager}\end{matrix}\right\}$.

A n.d., $B \subseteq A \underset{2.40(iii)}{\overset{2.34(iii)}{\Rightarrow}} \overline{B}^{\circ} \subseteq \overline{A}^{\circ} = \emptyset$

A mager $B \subseteq A \Rightarrow B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{B \cap A_n}_{\text{n.d.}} \Rightarrow B$ mager.

(ii) A n.d $\Leftrightarrow \bar{A}^\circ = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ keine nichtleere offene Menge paßt in $\bar{A}$ rein

$\Leftrightarrow$ jede nichtleere offene Menge steht über $\bar{A}$ raus

$\Leftrightarrow$ — " — " — " — enthält ext(A)-Punkte

$\overset{2.50(i)}{\Leftrightarrow}$ ext(A) ist dicht

8.26 THM (Satz v. Baire)

In einem vollst. M.R. ist das Innere von mageren Mengen leer.

8.27 BEM (Baire)

(i) 8.26 besagt also, dass in vollst. M.R. nicht nur die nd Mengen klein sind, sondern auch die mageren.

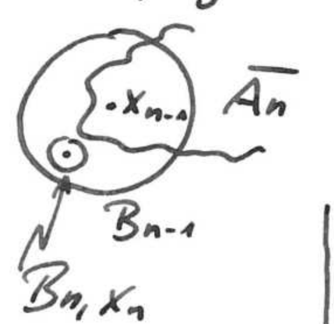
(ii) 8.26 besagt insbesondere, dass ein vollst MR X nicht selbst mager (in sich) sein! ($X \neq \emptyset$ vgl. 1.3)

(iii) Ist X nicht vollst., so kann X sehr wohl mager (in sich) sein, z.B. $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\}$.

Beweis von 8.26: Sei A mager, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n n.d.

Sei $x_1 \in X$ beliebig $r_1 \in \mathbb{R}$ beliebig; wir zeigen, dass $B_{r_1}(x_1) \not\subseteq A$; somit enthält A keine offene Kugel und daher $A^\circ = \emptyset$.

Zu diesem Zweck definieren wir beginnend mit $B_1 = B_{r_1}(x_1)$ induktiv eine Folge von Kugeln $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ mit $B_n = B_{r_n}(x_n)$, $r_n < \frac{1}{n}$ wie folgt:



Sei B_{n-1} gewählt $\overset{A_n \text{ nd}}{\Longrightarrow} \exists x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$; offen!

$\Longrightarrow \exists r_n < \frac{1}{n}: x_n \in B_{r_n}(x_n) \subseteq \overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$ $(*)$

$\Longrightarrow (x_n)_n$ CF, denn für $m > n$: $x_m \in B_n \Longrightarrow d(x_m, x_n) < 1/n$

$\overset{X \text{ vollst}}{\Longrightarrow} \exists x = \lim_n x_n$

Außerdem $x_m \in \overline{B_n}$ für $m \geq n \Longrightarrow x = \lim_m x_m \in \overline{B_n}\ \forall n$

und daher

$$\underline{x \in} \bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{B_n} \overset{(*)}{\subseteq} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(B_{n-1} \cap \overline{A_n}^c\right) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)^c \subseteq \underline{B_1 \setminus A}.$$

Also $\exists x \in B_1 \setminus A \Rightarrow B_1 \not\subseteq A$ □

8.29. Bem (Bairesche Räume)

Oft findet sich in der Literatur in 8.26 statt

(i) A mager $\Rightarrow A^\circ = \emptyset$ eine der äquivalenten Bedingungen [o. Beweis]

(ii) A mager $\Rightarrow A^c$ dicht

(iii) $O \neq \emptyset$ offen $\Rightarrow O$ nicht mager

(iv) $G_1, \dots$ alle offen + dicht $\Rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ dicht.

Räume die eine [$\Leftrightarrow$ jede] der Bedingungen (i)–(iv) erfüllen heissen Bairsche Räume. Nach 8.26 sind also vollst. MR Bairesch; Auch jeder kp T_2 Raum ist Bairesch. [ohne Beweis].