Aufgabensammlung
Funktionalanalysis

Roland Steinbauer

Sommersemester 2019

(Version 28. Februar 2019)

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für die *Übungen zur Funktionalanalysis*, die die gleichnamige Vorlesung begeleiten. Die Übungen und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloss die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. in den Übungen ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe entsteht daher auf der Basis beider Veranstaltungen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepasst; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen" (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell—aber nicht nur—für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur (für einen Überblick siehe die Literaturliste auf der Vorlesungshomepage) und/oder Gruppenarbeit.

1 Banach- und Hilberträume: Grundlagen und Beispiele

1.1 Normierte Vektorräume: Grundbegriffe

1. *Wichtige elementare Ungleichungen.*
   Wiederhole aus der Analysis die folgenden (für uns im Folgenden wichtigen) Ungleichungen (siehe zB. [Forster, Analysis 1, §16, Hilfssatz, Satz 7, Satz 8]).

   Die Zahlen p und q seien dabei stets konjugierte Indizes, d.h. $1/p + 1/q = 1$ mit der Vereinbarung $1/\infty = 0$. Weiters bezeichne $\mathbb{K}$ immer $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.

   (i) Für $1 < p, q$ und $x, y \geq 0$ gilt $x^{1/p}y^{1/q} \leq x/p + y/q$.

   (ii) (Hölder Ungleichung) Für $1 < p, q$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt
   $$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{1/q}.$$

   (iii) (Minkowski Ungleichung) Für $1 \leq p < \infty$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt
   $$\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\Big)^{1/p}.$$

   Bereite eine Minipräsentation (ca. 5 Minuten) vor, in der du die Ungleichungen präsentierst, die Cauchy-Schwarz Ungleichung als Spezialfall vorstellst und kurz und bündig die Beweise skizzierst. Achte insbesondere auf die zulässigen Bereiche von p und q. Wie können (ii) und (iii) umformuliert werden um auch $p = \infty$ zu erlauben?

2. *Die p-Normen auf $\mathbb{K}^n$.*
   Für $1 \leq p \leq \infty$ ist die p-Norm
   $$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

(vgl. Bsp. 1.2A(i)) tatsächlich eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Diese Tatsache ist schon aus der Analysis bekannt. Bereite eine Minipräsentation (ca. 5 Minuten) vor, in der du die Gültigkeit der respektiven Eigenschaften (N1)–(N3) für die verschiedenen Fälle $p = 1$, $p = \infty$, $p = 2$, sowie p allgemein diskutierst. Achte insbesondere darauf Triviales von Nichttrivialem zu trennen!

3. *Geometrisches zu den p-Normen im $\mathbb{R}^2$.*
   Im $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Geraden g und h gegeben durch die Gleichungen $g : x + y = 1$ und $h : y = 1$. Bestimme jeweils die dem Ursprung am nächsten gelegenen Punkte, wenn die Abstände mittels der 2-, der 1- bzw. der ∞-Norm gemessen werden.

4. $(\mathcal{B}(X), \| \ \|_\infty)$.
   Zeige, dass die Supremumsnorm
   $$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$$
   (vgl. 1.2A(ii)) auf dem Vektorraum der komplexwertigen, beschränkten Funktionen auf der beliebigen Menge X tatsächlich eine Norm ist.

5. *Die Minkowski und die Hölder Ungleichung für Integrale.*
   Wie schon für den Fall der p-Normen am $\mathbb{K}^n$ wird die Normeigenschaft (N3) für die p-Normen für Funktionen (vgl. 1.2(iii))
   $$\|f\|_p := \Big(\int |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}$$
   mittels der Minkowski Ungleichung nachgewiesen. Formuliere diese und auch die Hölder Ungleichung für Integrale. Welche Funktionen sind dabei zugelassen? Wie werden diese Ungleichungen bewiesen? Bereite wiederum eine Minipräsentation (ca. 5 Minuten) vor und beachte die zulässigen Bereiche von p und q.

6. *Normierte Vektorräume oder nicht?.*
   Welche der untenstehenden Paare sind tatsächlich normierte Vektorräume? Warum, warum nicht?

   (i) $(T[0, 1], \| \ \|_1)$, mit $T[0, 1]$, die Treppenfunktionen auf $[0, 1]$.

   (ii) $(\mathcal{C}(\Omega), \| \ \|_\infty)$, mit $\mathcal{C}(\Omega)$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

   (iii) $(\mathcal{C}[a, b], \| \ \|_1)$.

   (iv) $(L[a, b], \| \ \|_1)$, mit $L[a, b]$ die Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$.
   (Falls dir das Lebesgue-Integral (noch) ein wenig unheimlich ist, ersetze $L[a, b]$ durch den Vektorraum $R[a, b]$ der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$. An der Antwort ändert sich dadurch nichts!)

   (v) $(\{f \in \mathcal{C}[a, b] : |f(x)| \leq 1\}, \| \ \|_\infty)$

   Wie könnten in den negativ ausgegangenen Fällen die Normeigenschaften doch erzwungen werden? Insbesondere welcher Trick (welche Methode) wird in der Mathematik üblicherweise verwendet, um die nicht erfüllte Eigenschaft $\|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0$ doch zu erhalten?

7. *Fingerübungen zur Konvergenz in normierten Vektorräumen.*

   (i) (Stetigkeit der Vektorraumoperationen und der Norm) Beweise 1.4(vii), i.e., dass die Vektorraumoperationen und die Norm stetig sind.

   (ii) (Glieder konvergenter Reihen) Beweise 1.4(viii), i.e., dass die Glieder einer konvergenten Reihe notwendigerweise eine Nullfolge bilden.

   (iii) (Cauchyfolgen und Teilfolgen) Ziel dieser Aufgabe ist es den letzten Schritt im Beweis von Satz 1.7 explizit zu machen. Zeige also, dass eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt schon selbst konvergiert—und zwar gegen den Grenzwert der Teilfolge.

1.2 Vektorräume mit Skalarprodukt

8. *Skalarproduktеigenschaften.*
   Zeige, dass
   $$\langle f|g\rangle \;:=\; \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$
   ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ bildet. Wie sieht die von $\langle\ |\ \rangle$ induzierte Norm aus?

9. *Abstandssumme für Einheitsvektoren.*
   Ziel dieser Aufgabe ist es die folgende Aussage zu zeigen: Für Einheitsvektoren e_i in einem Prähilbertraum gilt
   $$\sum_{1\le i<j\le n} \|e_i - e_j\|^2 \;\le\; n^2. \qquad (*)$$
   Zeige zunächst, dass für beliebige Vektoren x_1, x_2, x_3 die Gleichung
   $$\|x_1-x_2\|^2 + \|x_2-x_3\|^2 + \|x_3-x_1\|^2 + \|x_1+x_2+x_3\|^2 = 3\big(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2\big)$$
   gilt. Verallgemeinere diese dann auf n-Tupel und wende die so erhaltene Aussage auf die Einheitsvektoren an. Wann gilt Gleichheit in $(*)$?

10. *Polarisierungsformeln.*
    (i) Beweise die Polarisierungsformeln (Satz 1.13), d.h. zeige, dass in jedem Prähilbertraum für die 2-Norm
    $$\langle v|w\rangle \;=\; \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\Big) \qquad (\mathbb{K}=\mathbb{R}) \qquad \text{bzw.}$$
    $$\langle v|w\rangle \;=\; \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2\Big) \qquad (\mathbb{K}=\mathbb{C})$$
    gilt. (*Tipp:* Die Formel im komplexen Fall ist leichter zu merken, falls „$-$" durch „i^2" und „$-i$" durch „i^3" ersetzt wird.)

    (ii) Welche Eigenschaften des Skalarprodukts (im reellen bzw. komplexen Fall) hast du bei obiger Rechnung *tatsächlich* verwendet? Für welche Klassen von Sesquilinearformen gelten daher die Polarisierungsformeln? (vgl. auch Bem. 1.17).

11. *Parallelogrammgleichung.*
    (i) Beweise die Parallelogrammgleichung (Satz 1.14), d.h. zeige, dass im Prähilbertraum
    $$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big)$$
    gilt.

    (ii) Der Name „Parallelogrammgleichung" ist abgeleitet vom Parallelogrammgesetz in $\mathbb{R}^2$. Formuliere und beweise diese elementargeometrische Aussage.

1.3 Beispiele

12. *Die l^p-Räume.*
    Vervollständige den Beweis von 1.22(i) indem du zeigst, dass alle l^p-Räume Banachräume sind.

    Tipp: Für den einzigen nichttrivialen Punkt im Beweis der Normeigenschaften ziehe Aufgabe 1(iii) bzw. Bemerkung 1.24 heran. Der Beweis der Vollständigkeit kann völlig analog zum Fall des l^2 aus der Vorlesung geführt werden.

13. *Der Raum der Nullfolgen.*
Vervollständige weiter den den Beweis von 1.22(i) indem du zeigst, dass der Raum c_0 der Nullfolgen ein Banachraum ist.

Tipp: Gehe den Beweis für den Raum c der konvergenten Folgen aus der Vorlesung durch und modifiziere ihn entsprechend. Das ist gar nicht schwer!

14. *Keine Hilberträume.*
Mache die Hinweise im Beweis von 1.22(ii) explizit und zeige, dass

    (i) keiner der Räume l^∞, c und c_0 ein Hilbertraum ist und

    (ii) l^p genau dann ein Hilbertraum ist, falls $p = 2$ gilt.

15. *Normkonvergenz vs. koordinatenweise Konvergenz in l^2.*
Im folgenden sei e_n der n-te Standardeinheitsvektor, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Bearbeite die folgenden (einfachen) Punkte und erarbeite dir so einen Überblick über den Zusammenhang zwischen koordinatenweiser Konvergenz und $\| \|_2$-Konvergenz.

    (i) Aus der Normkonvergenz in l^2 folgt die koordinatenweise Konvergenz, d.h. $\|x^{(n)} - x\|_2 \to 0$ (mit der aus der Vorlesung bekannten Bezeichnung $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ und $x = (x_1, x_2, \dots)$) impliziert $x_k^{(n)} \to x_k$ $(n \to \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Tipp:* Falls du Inspiration benötigst, schlage den Anfang des Beweises der Vollständigkeit von l^2 nach!)

    (ii) Konvergiert die Folge $(e_n)_n$ bzgl. $\| \|_2$ gegen den Nullvektor?

    (iii) Konvergiert $(e_n)_n$ vielleicht gegen einen anderen Vektor aus l^2? (*Tipp:* Beachte (i).)

    (iv) Konvergiert $(e_n)_n$ koordinatenweise? Was sagt dir das über eine mögliche Umkehrung von (i)?

    (v) Wie verhalten sich Normkonvergenz und koordinatenweise Konvergenz in $l^2(n)$, d.h. in $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$?

16. *Konvergenzfragen in c_0, l^1 und l^∞.*
Wir bezeichnen weiterhin den n-ten Standardeinheitsvektor mit e_n und betrachten die beiden Folgen $(e_n)_n$ und $(u_n)_n$ mit $u_n := \sum_{i=1}^n e_i$. Beantworte die folgenden Fragen:

    (i) Ist $(e_n)_n$ konvergent in c_0 bzw. l^1 bzw. l^∞? Ist $(e_n)_n$ eine Cauchyfolge in einem dieser Räume?

    (ii) Detto für $(u_n)_n$.

17. *Vollständigkeit von Räumen stetiger Funktionen.*
Vervollständige die Beweisskizze für die Vollständigkeit der Räume $\mathcal{C}[a, b]$, $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (Satz 1.28). Genauer zeige:

    (i) $\mathcal{C}[a, b]$ und $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ sind vollständig. (*Hinweis:* Verwende den passenden Satz aus der Analysis über die gleichmäßige Konvergenz von Folgen stetiger Funktionen.)

    (ii) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ist vollständig. (*Hinweis:* Verwende Prop. 1.23(ii) aus der Vorlesung.)

18. *Nichtvollständigkeit von Räumen stetiger Funktionen.*
Mache die Behauptung über die Nichtvollständigkeit des Raumes $\mathcal{C}[-2, 2]$ mit $\| \|_2$ aus 1.29 explizit. Genauer zeige für die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \notin [0, 1] \\ nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(1-x) & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

    (i) f_n ist Cauchyfolge (bzgl. $\| \|_2$). (*Tipp:* Brutale Gewalt!)

(ii) f_n hat in $(\mathcal{C}[-2,2], \| \, \|_2)$ keinen Grenzwert. (*Hinweis:* Mache das Argument, dass der Limes notwendigerweise unstetig ist wasserdicht.)

Weiters beantworte die folgenden Fragen:

(iii) Ist f_n eine Cauchyfolge bzgl. $\| \, \|_\infty$? Warum, warum nicht?

(iv) Ist f_n eine Cauchyfolge bzgl. $\| \, \|_1$? Warum, warum nicht? (*Tipp:* Falls dir für einen ähnlichen Gewaltakt wie in (i) die Geduld fehlt, versuche es mit einem Vorgriff auf Aufgabe 20(i).)

19. *L^2 ist der einzige Hilbertraum.*
Mache folgenden Punkt aus der Beweisskizze von Satz 1.34 exakt: Unter den Räumen L^p mit $p \in [1, \infty]$ ist L^2 der einzige Hilbertraum. (*Tipp:* Beherzige deine Erfahrungen aus Aufgabe 14.)

20. *(Nicht)-Schachtelung der L^p-Räume.*

(i) Zeige die folgende Behauptung, die in der Beweisskizze von Satz 1.34 aufgetreten ist: Für ein endliches Intervall I und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $L^q(I) \subseteq L^p(I)$. (*Hinweis:* Ein geschicktes Verwenden der Hölder-Ungleichung liefert sogar die explizite Abschätzung $\|u\|_p \leq m(I)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$.)

(ii) Falls I nicht endlich ist, sind die Räume $L^p(I)$ nicht vergleichbar, d.h. es gibt für $p \neq q$ stets Funktionen u, v mit $L^p \not\ni u \in L^q(I)$ und $L^p \ni v \notin L^q(I)$. Beweise diese Behauptung für den Spezialfall $I = \mathbb{R}$, $p = 1$ und $q = 2$. (*Tipp:* Betrachte Funktionen der Bauart $u(x) = 1/x^\alpha$ und spiele das Wachstumsverhalten bei 0 gegen das Abfallverhalten für große $|x|$ aus.)

21. *Vom beschränkten Nutzen der Räume $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ und c_{00}.* (Achtung: schwierig)

(i) Zeige, dass auf dem Raum aller skalarwertigen Folgen $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ keine Norm definiert werden kann, sodass die Normkonvergenz die koordinatenweise Konvergenz impliziert (also $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ nicht in „vernünftiger" Weise zu einem normierten Vektorraum gemacht werden kann).
Anleitung: Nimm indirekt an, dass für jede Folge $(x^{(n)})_n$ in $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ aus $\|x - x^{(n)}\| \to 0$ folgt, dass $|x_k - x_k^{(n)}| \to 0$ in $\mathbb{K}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Projektionen

$$p_k : \ \mathbb{K}^\mathbb{N} \ni x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto x_k \in \mathbb{K}$$

stetig und damit beschränkt (das ist ein Vorgriff auf Kapitel 2). Mit der Notation $\|p_k\| \leq \alpha_k$ betrachte nun $\mathbb{K}^\mathbb{N} \ni x = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots)$ und $p_k(x/\|x\|)$.

(ii) Zeige, dass c_{00} auf keine Weise zu einem Banachraum gemacht werden kann.
Anleitung: Betrachte die Mengen

$$A_n := \{x \in c_{00} : \ |x_k| \leq n \text{ für } k = 1, 2 \dots, n \text{ und } x_k = 0 \text{ für } k > n\}.$$

Es gilt $c_{00} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ und die A_n sind bezüglich jeder Norm auf c_{00} abgeschlossen und nirgends dicht; c_{00} is somit (als metrischer Raum) mager und kann daher nach dem Satz von Baire nicht vollständig sein.

Um die Abgeschlossenheit der A_n zu zeigen, verwende, dass jede Norm auf c_{00} den Teilraum $M_n := \{x \in c_{00} : \ x_k = 0 \text{ für } k > n\} \cong \mathbb{K}^n$ zum endlichdimensionalen normierten Vektorraum macht. Auf diesem sind alle Normen äquivalent (wieder ein Vorgriff auf Kap. 2, vgl. aber auch [Heuser, Analysis 2, Satz 109.8]) und daher ist M_n vollständig mit jeder von c_{00} ererbten Norm.

Um zu zeigen, dass das Innere der A_n leer ist, definiere für $x \in A_n$ den Vektor $z := x + \varepsilon/(2\,\|e_{n+1}\|)e_{n+1}$, der in $B_\varepsilon(x)$ liegt aber nicht in A_n.