3 Hilberträume

3.1 Orthogonalprojektionen

37. *Fingerübungen zum orthogonalen Komplement.*
Beweise Beobachtung 3.10 (iv), (v) und (ii). Genauer, zeige, dass für Teilmengen A und B des Prähilbertraumes H, gilt:

    (i) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A^\perp \supseteq B^\perp$,

    (ii) $A \subseteq A^{\perp\perp}$,

    (iii) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

    Gilt auch die zu (iii) „duale" Gleichung $(A \cap B)^\perp = A^\perp \cup B^\perp$? Warum, warum nicht?

38. *Fingerübungen zur orthogonalen Projektion.*
Sei M abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums H mit orthogonaler Projektion P_M.

    (i) Für $x, y \in H$ gilt
    $$x \in M,\; x - y \perp M \;\Leftrightarrow\; x = P_M y.$$
    Diese Behauptung ist natürlich in Lemma 3.14 enthalten. Zeige sie hier direkt aus dem Projektionssatz (Thm. 3.16).

    (ii) Zeige die folgende praktische und sehr einfach nachzurechnende Formel ($x, y \in H$)
    $$\langle P_M x | y\rangle \;=\; \langle P_M x | P_M y\rangle \;=\; \langle x | P_M y\rangle.$$

39. *Charakterisierung des Proximums.*
Sie H ein Hilbertraum, $A \subseteq H$ abgeschlossen und konvex und $x_0 \in H$ fix gewählt. Beweise, dass für alle $x \in A$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

    (i) $\|x_0 - x\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|$

    (ii) $\operatorname{Re}\langle x_0 - x | y - x\rangle \le 0 \;\forall y \in A$

    Was ist die geometrische Bedeutung von (ii)? Fertige eine Skizze im $\mathbb{R}^2$ an.

40. *Gerade Funktionen im L^2.*
Dies Aufgabe spielt im $L^2[-a, a]$ oder auch $L^2(\mathbb{R})$. Zeige der Reihe nach:

    (i) Ist $g(x) := f(-x)$, dann gilt $\|g\|_2 = \|f\|_2$.

    (ii) Gilt $\|f_n - f\|_2 \to 0$, dann gilt mit g wie oben und $g_n(x) := f_n(-x)$ auch $\|g_n - g\|_2 \to 0$.

    (iii) Sind alle f_n gerade (d.h. $f(x) = f(-x)$) und gilt $f = \lim f_n$, dann ist auch f gerade.

    (*Anmerkung:* Diese Aufgabe bereitet auf Aufgabe Nr. **??** vor, die die Deatils zu Bsp. 3.16A aus der Vorlesung nachliefert.)

41. *Konkrete Orthogonalprojektionen im L^2.*
In $L^2[-\pi, \pi]$ betrachte die Teilräume M_0 bzw. N_0, die von den Orthonormalsystemen (siehe Def. 3.22)
$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \;(k \ge 1)\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \;(k \ge 1)\}$$
aufgespannt werden. Mit den Bezeichnungen $M := \overline{M_0}$ und $N := \overline{N_0}$ stelle dich den folgenden Aufgaben:

    (i) Beschreibe M und N möglichst einfach.

    (ii) In welcher Beziehung stehen M und N zueinander?

    (iii) Gib möglichst einfache Formeln für die Orthogonalprojektionen auf M bzw. N an.

42. *Gerade und ungerade Funktionen im L^2.*
Beweise die Behauptungen in Bsp. 2.16A aus der Vorlesung. Genauer, zeige, dass für den Hilbertraum $H = L^2[-a,a]$ die Zerlegung

$$L^2[-a,a] = L_g^2[-a,a] \oplus L_u^2[-a,a]$$

gilt, wobei L_g^2 resp. L_u^2 die Teilräume der geraden bzw. ungeraden Funktionen in H sind, also $L_g^2[-a,a] := \{f \in H : \ f(x) = f(-x) \text{ f.ü. }\}$ resp. $L_u^2[-a,a] := \{f \in H : \ f(x) = -f(-x) \text{ f.ü. }\}$. Weiters zeige, dass die entsprechenden orthogonalen Projektionen durch

$$P_g f(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{bzw.} \quad P_u f(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

gegeben sind.

43. *Komplement vs. Abschluss.*
Beweise Korollar 3.18 aus der Vorlesung, d.h. zeige für Teilmengen A und Teilräume N eines Hilbertraumes H die folgenden :

(i) $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{span} A}$ (ii) $N^{\perp\perp} = N$

(iii) $A^{\perp} = \{0\}$ genau dann, wenn A total ist.