4 Operatoren in Hilberträumen

50. *Adjungierte Operatoren.*
Liefere die Details zu Bsp. 4.4 aus der Vorlesung nach. D.h. zeige die folgenden Punkte:

 (i) Sei $T \in L(l^2)$ bzgl. der Orthonormalbasis $e_1, e_2, \dots$ durch die Matrixelemente $a_{ij} = \langle Te_i | Te_j \rangle$ gegeben, dann seine Adjungierte durch die Matrixelemente $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

 (ii) Für die Adjungierte des Multiplikationsoperators $T_\varphi \in L(L^2[a,b])$

$$T_\varphi f(x) := \varphi(x) f(x) \qquad \text{mit } \varphi \in L^\infty[a,b], \text{ fix}$$

gilt $T_\varphi^* f(x) = \bar{\varphi}(x) f(x)$.

 (iii) Die Adjungierte des Hilbert-Schmidt Operators $T \in L(L^2[a,b])$ mit L^2-Kern K, d.h. des Operators

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \qquad (K \in L^2([a,b]^2))$$

hat den Integralkern $\overline{K(y,x)}$.

51. *Zweiseitige Shift-Operatoren.* Der zweiseitige Rechts-Shift U auf

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{(\dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1 \dots, x_{n-1}, x_n, \dots) : x_k \in \mathbb{K}, \sum_{-\infty}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

(vgl. Hinweis in Aufgabe 47) ist definiert durch $U(x_n)_n = (x_{n-1})_n$. Bestimme U^* sowie U^*U und UU^*. Ist U unitär? Vergleiche die Situation mit Bsp. 4.3 aus der Vorlesung.

52. *Kern, Bild, Adjunktion.*
Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeige die folgenden Punkte: (i) $\ker(T^*T) = \ker T$, (ii) $\ker T^* = (\mathrm{im} T)^\perp$, (iii) $\overline{\mathrm{im} T^*} = (\ker T)^\perp$

53. *Operatornorm und Skalarprodukt.*
Gibt es einen Operator T auf dem Hilbertraum $(\mathbb{R}^2, \| \, \|_2)$ für den

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx | x \rangle| < \|T\|$$

gilt? Warum ist das eine interessante Frage?

54. *Kompakte Multiplikationsoperatoren auf l^2.*
Liefere die Details zu Bsp. 4.10(i) nach, d.h. zeige, dass $T \in L(l^2)$, mit $(Tx_n)_n = (\lambda_n x_n)_n$, $(\lambda_n) \in l^\infty$ genau dann kompakt ist, falls $(\lambda_n) \in c_0$ gilt.

55. *Spektrum des Adjungierten Operators.*
Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeige

$$\lambda \in \rho(T^*) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T) \quad \text{und damit} \quad \sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}.$$

56. *Eigenwerte & Spektrum explizit.*
Liefere die Details von Bsp. 4.21 nach bzw. zeige folgende Erweiterungen:

 (i) Der Rechts-Shift $R = U$ auf l^2, $x \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ hat keine Eigenwerte. Für den Links-Shift $L = U^*$ (vgl. Bsp. 4.3) gilt $\sigma_P(L) = B_1(0)$, der offene Einheitsball.
Bestimme auch das Spektrum von L und von R.

 (ii) Sei der Operator $T \in L(l^2)$ definiert durch $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$. Bestimme *alle* Eigenwerte und Eigenvektoren sowie das Spektrum von T.

57. *Eigenwerte für Klassen von Operatoren.* Beweise Prop. 4.26 aus der Vorlesung, d.h. zeige dass für einen Operator T im Hilbertraum H gilt, dass

   (i) Ist T normal, dann gilt (a) $\ker T = \ker T^*$, (b) Falls λ Eigenwert von T ist, dann ist $\bar{\lambda}$ Eigenwert von T^* zum selben Eigenvektor, (c) Eigenvektoren zu verschiedenen Operatoren sind orthognal.

   (ii) Ist T selbstadjunguiert, so sind alle Eigenwerte reell.

   (iii) Ist T anti-selbstadjunguiert, so sind alle Eigenwerte rein imaginär.

   (iv) Ist T unitär, so haben alle Eigenwerte Betrag 1.

   (v) Ist T nicht-negativ, so sind auch alle Eigenwerte nicht-negativ.

58. *Spektrum von Projektoren.*
   Sei P_M Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum M eines Hilbertraumes H. Berechne das Spektrum von P_M. *Tipp:* Versuche $(\lambda 1 - P_m)^{-1}$ direkt hinzuschreiben, indem du $1 = P_m + P_{M^\perp}$ verwendest.

59. *Rang-1-Operatoren.*
   Liefere die Details von 4.23(iv), (v) aus der Vorlesung nach, d.h. zeige die folgenden Punkte:

   (i) $(f \otimes e^*)^* = e \otimes f^*$

   (ii) Jeder symmetrische Operator T auf dem $\mathbb{R}^n$ hat bzgl. einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren die Darstellung $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i^*$, wobei die λ_i die Eigenwerte zu e_i sind.

60. *Operatoren mit endlichdimensionalem Bild.*
   Seien E und F normierte Vektorräume. Zeige

   (i) Die Zuordnung
   $$\sum_{i=1}^n y_i \otimes f_i : \ x \mapsto \sum_i^n f_i(x) y_i \qquad (x \in E),$$
   wobei $y_i \in F$, $f_i \in E'$ sind, stellt einen stetigen linearen Operator von E nach F mit endlichdimensionalem Bild dar (vgl. Vorlesung 4.24).

   (ii) Die Operatoren aus (i) sind schon *alle* $T \in L(E, F)$ mit endlichdimensionalem Bild. *Tipp:* Betrachte dazu die Funktionale $x \mapsto \lambda_i(x)$, wobei $Tx = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ auf dem Bildraum $F_1 \subseteq F$ von T, wo $\{y_1, \ldots y_n\}$ eine Basis ist.

61. *Spektraldarstellung konkret.*
   Zeige, dass der lineare Operator $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ gegeben durch
   $$Tf(x) = \int_0^1 (2xy - x - y + 1) f(y)\, dy$$
   kompakt und selbstadjungiert ist und bestimme seine Spektraldarstellung.