Lösungsvorschlag für die Aufgabe der Woche
zur Analysis in einer Variable für das Lehramt für den 17.3. 2020

$\boxed{1}$ **Infimum und Supremum.** Bestimme das Infimum und das Supremum der folgenden Menge:

$$M := \left\{ \frac{3x}{x+2} \mid x > 0 \right\}.$$

Lösung: Gesucht werden die kleinste obere Schranke (Supremum) und die größte untere Schranke (Infimum) der Menge M.
Nach der Definition von M dürfen wir nur positive Werte für x in den Term einsetzen. Wir werden zunächst einige Werte von M berechnen:

$$\begin{aligned}
x = 0.01 &\Rightarrow \frac{3 \cdot 0.01}{0.01 + 2} = \frac{0.03}{2.01} \approx 0.015 \\
x = 0.1 &\Rightarrow \frac{3 \cdot 0.1}{0.1 + 2} = \frac{0.3}{2.1} \approx 0.14 \\
x = 1 &\Rightarrow \frac{3 \cdot 1}{1 + 2} = 1 \\
x = 10 &\Rightarrow \frac{3 \cdot 10}{10 + 2} = \frac{30}{12} = 2.5 \\
x = 100 &\Rightarrow \frac{3 \cdot 100}{100 + 2} = \frac{300}{102} \approx 2.94
\end{aligned}$$

Anhand dieser Werte von M können wir uns überlegen wie das Supremum und das Infimum aussehen könnten. In M liegen nur positive Werte das bedeutet, dass jede negative Zahl eine untere Schranke für unsere Menge ist. Als größte untere Schranke kommt also für uns 0 in Frage.
Für das Supremum von M suchen wir die kleinste Zahl die größer oder gleich aller Zahlen aus M ist. Wenn wir unsere berechneten Werte untersuchen, sehen wir, dass keine größer sind als 3 und dass sie 3 von unten annähern.
Unsere Vermutung ist also, dass 3 das Supremum unserer Menge ist und dass 0 das Infimum ist.
Diese beiden Aussagen müssen noch bewiesen werden da es sein könnte, dass in unserer Vermutung ein Fehler liegt.
Behauptung: Das Supremum von M ist 3.
Dies bedeutet einerseits, dass 3 eine obere Schranke von M ist und andererseits, dass es die *kleinste* obere Schranke ist. Zunächst zeigen wir, dass

eine obere Schranke ist:

$$\begin{aligned} 3 &\geq \frac{3x}{x+2} \quad für \;\; alle \;\; x > 0 \\ \Leftrightarrow 3(x+2) &\geq 3x \quad für \;\; alle \;\; x > 0 \\ \Leftrightarrow 3x+6 &\geq 3x \quad für \;\; alle \;\; x > 0 \\ \Leftrightarrow 6 &\geq 0 \quad für \;\; alle \;\; x > 0 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist trivialerweise erfüllt, somit ist 3 eine obere Schranke. Es ist noch zu zeigen, dass 3 die kleinste obere Schranke ist. Wenn für jedes $m \in M$ mit $m < 3$ gilt, dass m keine obere Schranke von M ist, dann folgt, dass 3 die kleinste obere Schranke und somit das Supremum von M ist. Konkret bedeutet das, dass $\forall \epsilon > 0$ die Zahl $3 - \epsilon$ keine obere Schranke mehr ist.
Um das zu beweisen müssen wir für ein beliebiges aber fixes $\epsilon_0 > 0$ einen Wert x_0 finden, welches uns ein Element in M liefert das größer als $3 - \epsilon_0$ ist. Wenn wir ein beliebiges $\epsilon_0 > 0$ fix wählen, dann erhalten wir Folgendes durch Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} 3 - \epsilon_0 &< \frac{3x_0}{x_0+2} \\ \Leftrightarrow (3-\epsilon_0)(x_0+2) &< 3x_0 \\ \Leftrightarrow 3x_0 - \epsilon_0 x_0 + 6 - 2\epsilon_0 &< 3x_0 \\ \Leftrightarrow 6 - 2\epsilon_0 &< \epsilon_0 x_0 \\ \Leftrightarrow \frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0} &< x_0 \end{aligned}$$

Wir haben jetzt zwei Ungleichungen die unser x_0 erfüllen muss. Nämlich $\frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0} < x_0$ und $x_0 > 0$. Abhängig von ϵ_0 ist eine der beiden Bedingungen erfüllt. Somit machen wir eine Fallunterscheidung nach ϵ_0.
1.Fall: $\epsilon_0 > 3$. Dann ist $\frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0}$ negativ und $x_0 > \frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0}$ wird durch jedes positive x_0 erfüllt. Zum Beispiel $x_0 = 1$
2.Fall: $\epsilon_0 \leq 3$. Dann ist $\frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0} \geq 0$ und für $x_0 > \frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0}$ somit die Bedingung $x_0 > 0$ automatisch erfüllt. Wir können also $x_0 = \frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0} + 1$ setzen.
Wir können diese beiden Fälle wieder zusammenführen, indem wir x_0 als das Maximum der beiden Werte definieren. Insgesamt können wir sagen, dass für jedes beliebige $\epsilon_0 > 0$ der Wert

$$x_0 = max\{1, \frac{6-2\epsilon_0}{\epsilon_0} + 1\}$$

eine Zahl $\frac{3x_0}{x_0+2}$ erzeugt die größer als $3 - \epsilon_0$.
Somit ist 3 wirklich das Supremum von M.
Auch die Aussage, dass 0 das Infimum der Menge M ist, kann wieder in zwei Teilaussagen umgeschrieben werden:
0 ist eine untere Schranke von M und 0 ist die *größte* untere Schranke von M.

Um zu zeigen, dass 0 eine untere Schranke ist, müssen wir zeigen, dass alle Werte vom M größer als 0 sind:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{3x}{x+2} \quad für \quad alle \quad x > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 3x \quad für \quad alle \quad x > 0 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x \quad für \quad alle \quad x > 0 \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist trivialerweise erfüllt.
Wenn für jedes $m \in M$ mit $m > 0$ gilt, dass m keine untere Schranke von M ist, so ist 0 die größte untere Schranke und somit das Infimum von M.
Wir zeigen also, dass für alle $\epsilon > 0$ die Zahl $0 + \epsilon$ keine untere Schranke von M ist. Wir wählen wie oben ein beliebiges aber fixes $\epsilon_0 > 0$ und zeigen, dass wir eine Zahl $x_0 > 0$ finden können sodass Folgendes gilt:

$$0 + \epsilon_0 > \frac{3x_0}{x_0 + 2}$$

Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen können wir x_0 isolieren.

$$\begin{aligned} 0 + \epsilon_0 &> \frac{3x_0}{x_0 + 2} \\ \Leftrightarrow \epsilon_0(x_0 + 2) &> 3x_0 \\ \Leftrightarrow \epsilon_0 x_0 + 2\epsilon_0 &> 3x_0 \\ \Leftrightarrow 2\epsilon_0 &> x_0(3 - \epsilon_0) \end{aligned}$$

Um nun durch $3 - \epsilon_0$ zu dividieren müssen wir eine Fallunterscheidung machen:
1.Fall: $\epsilon_0 < 3$. Dann folgt $x_0 < \frac{2\epsilon_0}{3-\epsilon_0}$. In diesem Fall können wir einfach $x_0 = \frac{\epsilon_0}{3-\epsilon_0}$ wählen und sind fertig.
2.Fall: $\epsilon_0 > 3$. Dann folgt $x_0 > \frac{2\epsilon_0}{3-\epsilon_0}$. Da auf der rechten Seite eine negative Zahl steht, wird diese Ungleichung von jedem $x_0 > 0$ erfüllt.
3.Fall: $\epsilon_0 = 3$. Dann ist die letzte Ungleichung äquivalent zu $\epsilon_0 > 0$, welches ebenso durch jedes $x_0 > 0$ erfüllt wird.
Wir haben alle Teilbehauptungen bewiesen und somit gezeigt, dass 0 das Infimum vom M ist.