Lösungsvorschlag zur Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt

vom 24.03.2020

$\boxed{2}$ Konvergenz und Folgen

a) Sei für ein festes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, die Folge

$$a_n = \frac{r_0 + r_1 n + r_2 n^2 + ... + r_k n^k}{s_0 + s_1 n + s_2 n^2 + ... + s_k n^k}$$

definiert, mit $r_i,\ s_i \in \mathbb{R}$, wobei $0 \leq i \leq k$ und $s_k \neq 0$ ist. Weiters sei der Nenner für alle $n \in \mathbb{N}$ von 0 verschieden. Berechne den Grenzwert von (a_n).

Lösungsvorschlag:

Damit wir uns unter dem kompliziert aussehenden Ausdruck von a_n etwas vorstellen können, betrachten wir zunächst die Folge

$$\tilde{a}_n = \frac{3 - 4n + 2n^2}{-7 + n + 3n^2},$$

welche dieselbe Form wie a_n besitzt. Um den Grenzwert von $\tilde{a}_n$ zu berechnen, verwenden wir folgenden Trick: Wir dividieren Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz von n, in unserem Fall ist das n^2 für $\tilde{a}_n$. Das liefert Folgendes:

$$\tilde{a}_n = \frac{3 - 4n + 2n^2}{-7 + n + 3n^2} = \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{4n}{n^2} + \frac{2n^2}{n^2}}{\frac{-7}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{3n^2}{n^2}} = \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n} + 2}{\frac{-7}{n^2} + \frac{1}{n} + 3}.$$

Für den Grenzwert von $\tilde{a}_n$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n} + 2}{\frac{-7}{n^2} + \frac{1}{n} + 3} = \frac{0 - 0 + 2}{0 + 0 + 3} = \frac{2}{3}.$$

Kommen wir nun zur eigentlichen Folge a_n. Wir können dieselbe Idee für den Bruch in a_n verweden:

$$a_n = \frac{r_0 + r_1 n + r_2 n^2 + ... + r_k n^k}{s_0 + s_1 n + s_2 n^2 + ... + s_k n^k} = \frac{\frac{r_0}{n^k} + \frac{r_1 n}{n^k} + \frac{r_2 n^2}{n^k} + ... + \frac{r_k n^k}{n^k}}{\frac{s_0}{n^k} + \frac{s_1 n}{n^k} + \frac{s_2 n^2}{n^k} + ... + \frac{s_k n^k}{n^k}} =$$

$$= \frac{\frac{r_0}{n^k} + \frac{r_1}{n^{k-1}} + \frac{r_2}{n^{k-2}} + ... + r_k}{\frac{s_0}{n^k} + \frac{s_1}{n^{k-1}} + \frac{s_2}{n^{k-2}} + ... + s_k}.$$

Damit gilt für den Grenzwert von a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{r_0}{n^k} + \frac{r_1}{n^{k-1}} + \frac{r_2}{n^{k-2}} + ... + r_k}{\frac{s_0}{n^k} + \frac{s_1}{n^{k-1}} + \frac{s_2}{n^{k-2}} + ... + s_k} = \frac{0 + 0 + ... + r_k}{0 + 0 + ... + s_k} = \frac{r_k}{s_k}.$$

Bemerkung: Beachte, dass in der Definition der Folge a_n bereits $s_k \neq 0$ vorausgesetzt worden ist und deshalb der Ausdruck $\frac{r_k}{s_k}$ sinnvoll ist.

b) Bestimme den Grenzwert der Folge

$$b_n = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \frac{1}{5^n}}.$$

Lösungsvorschlag:
Wir bemerken, dass $b_n \geq 0$ gilt, da wir für n ja nur natürliche Zahlen einsetzen. Wir können 0 als konstante Nullfolge interpretieren, welche b_n nach unten abschätzt. Nun schätzen wir außerdem b_n nach oben ab durch:

$$b_n = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + \frac{1}{5^n}} \leq \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{2 \cdot \sqrt{n} + 1}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Aufgrund des *Sandwich-Lemmas 1.2.29* gilt mit

$$0 \leq b_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dass auch $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Bemerkung: Wichtig ist bei diesem Beispiel, die Folge b_n nicht nur nach oben, sondern auch nach unten abzuschätzen. Denn sonst können wir das Sandwich-Lemma nicht anwenden.