Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt für den 26.4. 2020

1. **Stetigkeit** Zeigen Sie mit einem direkten ϵ - δ-Beweis, dass die Abbildung

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

2. Man kann Grenzwerte von Funktionen (analog zur Stetigkeit von Funktionen) auch über ein ε-δ-Kriterium charakterisieren: Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x\to a} f(x) = b$ genau dann, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Nun wollen wir mit diesem Kriterium die Aussage

$$\lim_{x\to 3} 2x = 6$$

übungshalber mit dem $\epsilon\delta$-Kriterium beweisen.

Welches Argument ist dafür geeignet?

   (a) Zu gegebenem δ können wir $\epsilon = \delta/2$ wählen.
   (b) Zu gegebenem δ können wir $\epsilon = 2\delta$ wählen.
   (c) Zu gegebenem ϵ können wir $\delta := \epsilon/2$ wählen.
   (d) Zu gegebenem ϵ können wir $\delta := 2\epsilon$ wählen.

3. Es sei f eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$. Aus welcher Aussage kann man schließen, dass f eine Nullstelle haben muss?

   (a) f ist stetig und $f(10) = -1$.
   (b) f ist streng monoton fallend und $f(10) = -1$.
   (c) Aus jeder von beiden.
   (d) Aus keiner von beiden.