Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt

für 04.05.2020

$\boxed{6}$ **Gleichmäßige Stetigkeit** Im Beispiel 2.2.22 wurde bereits gezeigt, dass die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$f = \sqrt{x}$$

stetig auf ihrem Definitionsbereich ist. Ist f auch gleichmäßig stetig auf $[0, 1)$? überlege dir außerdem vorab, welche Stelle im Intervall $[0, 1)$ Â– wenn überhaupt Â– am ehesten Schwierigkeiten in Bezug auf die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion f machen könnte und begründe deine Antwort.

Lösung:

Für diese Aufgabe rufen wir uns zunächst Theorem 2.2.17 in Erinnerung, das besagt, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen stetig sind.

Wäre die Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ zu untersuchen, dann wären wir schon fertig. Dann hätten wir nämlich eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall vorliegen. Und diese ist nach dem oben formulierten Satz gleichmäßig stetig auf dem kompakten Intervall.

Die Funktion ist allerdings auf [0, 1) zu untersuchen und dieses Intervall ist nicht kompakt. Wenn wir allerdings schon wissen, dass f auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, dann muss f erst recht auf $[0, 1)$ gleichmäßig stetig sein (was nämlich für alle Elemente $x, y \in [0, 1]$ gilt, muss erst recht für alle Elemente $x, y \in [0, 1)$ gelten). Damit sind wir fertig.

Die heikelste Stelle für die gleichmäßige Stetigkeit ist die Stelle $x = 0$. Dort ist die Funktion f nämlich am steilsten.