

Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt

für 18.05.2020

8 Exponential- und Winkelfunktionen. Zeige, dass die Formel

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad (*)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Verwende nun die Formel (*) um die Aussage

$$\cos(2n\varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} \cos^{2(n-k)}(\varphi) \sin^{2k}(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

Hinweis: Verwende für den ersten Teil der Aufgabe die Euler'sche Formel und im zweiten Teil den binomischen Lehrsatz, sowie die Tatsache, dass der Cosinus als Realteil der komplexen Exponentialfunktion definiert ist.