Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt für den 25.5. 2020

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit alle Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen differenzierbar sind! Berechnen Sie die Ableitungsfunktion dort wo sie existiert.

   (a) $f(x) = x \cdot |x|$

   (b) $g(x) = \frac{2x+1}{(2x-1)^2}$

Lösung: (a) Betrachten wir zunächst die Funktion f. Um diese Funktion zu differenzieren betrachten wir zunächst einmal den Differentialquotienten. Unsere Aufgabe ist es zu untersuchen ob der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Diesen Ausdruck können wir auch auf die etwas praktischere Form

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

umschreiben.
Zunächst einmal können wir sehen, dass für alle $x > 0$ unsere Funktion $x \to x^2$ ist und für alle $x < 0$ unsere Funktion $x \to -x^2$ ist. Diese beiden Funktion sind ihren jeweiligen Bereichen differenzierbar. Wir müssen jetzt noch überprüfen ob unsere Funktion auch an dem Punkt $x = 0$ differenzierbar ist. Dies können wir mit dem Differentialquotienten untersuchen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot |h|}{h} = \lim_{h \to 0} |h| \to 0$$

Da dieser Ausdruck gegen 0 geht können wir schließen, dass unsere Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.
(b) Betrachten wir nun unsere zweite Funktion g. Zunächst einmal sehen wir, dass bei unserer Funktion an der Stelle $x = 1/2$ der Nenner Null wird, sodass unsere Funktion nur auf dem Bereich $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ definiert ist. Um diese Funktion effizient abzuleiten können wir die Produktregel oder die Quotientenregel anwenden. Betrachten wir zunächst die allgemeine Quotientenregel:

$$\left(\frac{g_1}{g_2}\right)'(\zeta) = \frac{g_1'(\zeta) \cdot g_2(\zeta) - g_1(\zeta) \cdot g_2'(\zeta)}{g_2(\zeta)^2}$$

Damit wir diese anwenden können müssen wir noch schauen ob unsere Funktionen $g_1(x) = 2x + 1$ und $g_2(x) = (2x - 1)^2$ differenzierbar sind und $g(\zeta) \neq 0$. Unsere Funktion erfüllt diese Eigenschaften und somit dürfen wir einsetzen und ableiten.

$$g'(x) = \left(\frac{2x+1}{(2x-1)^2}\right)' = \frac{(2x+1)' \cdot (2x-1)^2 - (2x+1) \cdot ((2x-1)^2)'}{((2x-1)^2)^2} =$$

$$\frac{2 \cdot (2x-1)^2 - (2x+1) \cdot 4 \cdot (2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{2 \cdot (2x-1) - 4 \cdot (2x+1)}{(2x-1)^3}$$

Diesen Ausdruck könnte man noch weiter umformen aber die Ableitung bleibt dieselbe. Somit sind wir fertig.