Lösung zur Aufgabe der Woche

zur Analysis in einer Variable für das Lehramt für den 15.6. 2020

1. Berechnen Sie folgende Integrale.

   (a) $\int_1^4 (5 \cdot x^2 - \frac{x}{2} + 1)dx$

   (b) $\int_{-2}^2 \sqrt[3]{x^2}dx$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(y)}{5}dy$

   Lösung: Bei diesem Beispiel geht es darum den Hauptsatz der Integralrechnung richtig anzuwenden. Alle drei Beispiel sind Integralle die zwischen zwei Grenzen berechnet werden sollen. Um diese Aufgaben berechnen zu können schauen wir uns zunächst die allgemeine Formel an. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in I$, und sei weiters F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

   Wir werden diese Formel nun auf unsere einzelnen Beispiele übertragen.

   (a) $\int_1^4 (5 \cdot x^2 - \frac{x}{2} + 1)dx = \left[5 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1}\right]_1^4 = \left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + x\right]_1^4$
   $= \left[\frac{5 \cdot 4^3}{3} - \frac{4^2}{4} + 4\right] - \left[\frac{5 \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{4} + 1\right] = \frac{320}{3} - \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{4} + 1\right) = 104,25$

   (b) $\int_{-2}^2 \sqrt[3]{x^2}dx = \int_{-2}^2 x^{\frac{2}{3}}dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_{-2}^2 = \left[\frac{3 \cdot x^{\frac{5}{3}}}{5}\right]_{-2}^2 = \left[\frac{3 \cdot (2)^{\frac{5}{3}}}{5}\right] - \left[\frac{3 \cdot (-2)^{\frac{5}{3}}}{5}\right]$
   $= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2^5}}{5} - \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(-2)^5}}{5} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{5} + \frac{6 \cdot \sqrt[3]{(-2)^2}}{5} = 2 \cdot \frac{6\sqrt[3]{4}}{5}$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(y)}{5}dy = \left[\frac{\sin(y)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5}\right] - \left[\frac{\sin(0)}{5}\right] = \frac{1}{5}$