Blatt 13: Integration

1 *Treppenfunktionen explizit.*

(a) Gib auf $[0, 1]$ zwei Treppenfunktionen an und zwei unstetige Funktionen, die keine Treppenfunktionen sind.

(b) Betracht die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Gib explizit Treppenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ an, sodass

$$\psi_1 < \psi_2 \leq f \leq \varphi_2 < \varphi_1.$$

(c) Laut Vo. Thm. 4.1.11 gibt es ja Treppenfunktionen φ, ψ auf $[0, 1]$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$ und $\int_0^1 \varphi(t)\, dt - \int_0^1 \psi(t)\, dt \leq \frac{5}{16}$. Finde explizit ein solches Paar ψ, φ.

2 *Positiver und negativer Teil.*

(a) Wiederhole die Definitionen von f^+, f_- und veranschauliche sie in einer Skizze.

(b) Weise die folgenden Formeln aus Vo. Bem. 4.1.18(ii) nach:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_- = -\min(f(x), 0), \quad f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_-$$

(c) Beweise (ebenfalls Vo. Bem. 4.1.18(ii): $f \leq g \implies f^+ \leq g^+$ und $g_- \leq f_-$ und fertige eine Skizze an.

3 *Verständnisaufgabe: Riemannintegrierbarkeit.*
Gegeben ist die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 1/2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizziere den Graphen und betrachte die folgenden Aussagen. Welche sind richtig, welche falsch? Begründe!

Die Funktion f

(1) ist nicht integrierbar, weil sie weder stetig noch monoton ist.

(2) ist integrierbar, weil Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen.

(3) ist nicht integrierbar, weil das Unterintegral gleich 0 ist und das Oberintegral gleich 1 ist.

(4) ist integrierbar, weil es Treppenfunktionen $\psi \leq f \leq \varphi$ gibt, deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

$\boxed{4}$ *Der Mittelwertsatz der Integralrechnung als Werkzeug.*
Verwende den Mittelwertsatz der Integralrechnung, um die folgenden Integrale nach oben abzuschätzen, vgl. Vo. 4.1.21(ii):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx, \quad \int_0^1 4x^2 + 7\,dx, \quad \int_{-1}^{1} x\sin(1/x)^*\,dx, \quad \int_0^L \arctan(x)\,dx \ (L > 0)$$

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Grundintegrale.*
Bestimme (ohne auf die jeweiligen Gültigkeitsbereiche Rücksicht zu nehmen)

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(x)}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Der Witz beim Integrieren.*
In einem Schulbuch findet sich die Rechnung:

$$\int_0^1 x^2\,dx \;=\; \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

Was ist die wesentliche Information, die in diese Rechnung eingeht?

(1) Das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ ist der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $x \mapsto x^2$ im Intervall $[0, 1]$.
(2) $x \mapsto x^3$ ist eine Stammfunktion von $x \mapsto x^2$.
(3) Die Integralfunktion $x \mapsto \int_0^x t^2 dt$ ist eine Stammfunktion ihres Integranden.
(4) Alle diese Aussagen gehen in die Rechnung ein.

$\boxed{7}$ *Integration, explizit.*
Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\log(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos(x)\,dx$ *Tipp:* Setze $x = t + \pi$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$ *Tipp:* Setze $x = t + \pi/2$.

---

*Hier ist natürlich die stetige Fortsetzung von $x\sin(1/x)$ durch 0 in $x = 0$ gemeint, vgl. Blatt 9 $\boxed{7}$(b).

$\boxed{8}$ *Verständnisaufgabe: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*
Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, vgl. Vo. Thm. 4.2.7, besagt für ein stetiges $f : I \to \mathbb{R}$ und $a < b \in I$, dass

(i) $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ stetig differenzierbar ist und $F' = f$ gilt,

(ii) $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ für jede Stammfunktion G von f gilt.

Welche der folgenden Aussagen über die Bedeutung des Hauptsatzes sind richtig, welche ungenau oder falsch? Begründe!

Der Hauptsatz besagt,

(1) dass Integrieren die Umkehrfunktion zum Differenzieren ist,

(2) dass Differenzieren und Integrieren im wesentlichen Inverse Operationen sind,

(3) wie das (bestimmte) Integral $\int_a^b f(t)dt$ explizit ausgerechnet werden kann; nämlich als Differenz einer (beliebigen) Stammfunktion an den Punkten b und a,

(4) dass das (bestimmte) Integral $\int_a^b f(t)dt$ am besten über F ausgerechnet werden kann,

(5) die Funktion F eine Stammfunktion von f ist,

(6) die Funktion F die einzige Stammfunktion von f ist,

$\boxed{9}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Summe von Treppenfunktionen.*
Führe den Beweis von Vo. Lemma 4.1.3(i) im Detail aus, d.h. beweise, dass die Summe zweier Treppenfunktionen auf $[a, b]$ wieder eine Treppenfunktion ist.