Blatt 4: Folgen & Konvergenzprinzipien

1 *Verständnisaufgabe: Eigenschaften von Folgen*
Kann eine (reelle) Folge (a_n) die folgenden Eigenschaften haben? Wenn ja, gib ein Beispiel, wenn nein, argumentiere.

(a) beschränkt und divergent.

(b) unbeschränkt und konvergent.

(c) bestimmt divergent und beschränkt.

(d) bestimmt divergent und nach oben beschränkt.

(e) unbeschränkt und nicht bestimmt divergent.

2 *Kehrwerte von Nullfolgen divergieren.*
Beweise Vo. Prop. 1.2.47. Genauer, sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle n, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

3 *Teilfolgen.*
Betrachte die Folge $a_n = (-1)^n \left(\frac{-1}{n}\right)$ $(n \geq 1)$. Welche der angegeben Folgen sind Teilfolgen von (a_n)? Begründe!
Tipp: Schreibe jeweils die ersten Folgenglieder explizit an und plotte evtl. die (Teil-)Folgen.

(a) $a_{n_k} = \dfrac{1}{2k+1}$ $\quad (k \geq 1)$

(b) $a_{n_l} = (-1)^l \dfrac{1}{2l+1}$ $\quad (l \geq 1)$

(c) $a_{n_m} = \left(-\dfrac{1}{2m}\right)^m$ $\quad (m \geq 1)$

(d) $a_{n_r} = (-1)^{2r} \dfrac{1}{2r}$ $\quad (r \geq 1)$

(e) $a_{n_s} = \dfrac{1}{2k+1}$ $\quad$ (für ein $k \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$)

4 *Häufungswerte.*
Bestimme jeweils alle Häufungswerte der Folge (a_n). Bestimme weiters Limes inferior und superior von (a_n) und vergleiche diese mit Infimum und Supremum der Menge der Folgenglieder $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Tipp: Plotte die (Teil-)Folgen.*

(a) $a_n = (-1)^n \sqrt{2}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

(b) $a_{3n-2} = 3 + \dfrac{1}{n},\ a_{3n-1} = \dfrac{2}{n},\ a_{3n} = -\dfrac{1}{n^2}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3 + 2n + n^2}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Heron-Verfahren zur Approximation von Wurzeln.*
Das Heron-Verfahren ist auch in der Schulmathematik ein Thema. Es dient zur (schnellen) Approximation von Wurzeln und hat eine eindringliche graphische Interpretation, siehe z.B. `https://www.geogebra.org/m/ve2PFcJE`. Hier vertiefen wir in Analogie zu Vo. Bsp. 1.3.24 seinen theoretischen Hintergrund.

Betrachte folgende Approximation für die Wurzel von a: Sei $a > 0$ und $x_0 > 0$.

(a) Zeige, dass die durch die Rekursion ($n \in \mathbb{N}$)

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

definierte Folge (x_n) nach unten beschränkt ist.

(b) Zeige, dass (x_n) ab $n = 1$ monoton fallend ist.

(c) Argumentiere, dass (x_n) konvergiert. Welches Konvergenzprinzip hilft dir hier?

(d) Zeige, dass $x_n \to \sqrt{a}$.

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe zu Cauchy-Folgen.* (Achtung kniffelig!)
Einer deiner Kollegen betrachtet die Folge $a_n := \sqrt{n}$ und beweist die beiden Tasachen (Anmerkung: Diese sind korrekt!)

$$\text{(i) } a_n \to \infty \qquad \text{und} \qquad \text{(ii) } |a_{n+1} - a_n| \to 0.$$

Jetzt sieht er folgendes „Problem“ und postet im Forum:

> „Die Folge $a_n = \sqrt{n}$ ist wegen (i) nicht konvergent und wegen (ii) ist sie eine Cauchy-Folge. Das steht doch im Widerspruch zum Cauchy-Prinzip (Vo. Theorem 1.3.18). Was soll das bitte?“

Löse diesen Widerspruch auf. Die richtige Antwort versteckt sich unten in den folgenden vier. Argumentiere!

(1) Die Folge ist doch konvergent.

(2) Die Folge erfüllt die Bedingung der bestimmten Divergenz/uneigentlichen Konvergenz (Vo., Definition 1.2.42) und ist daher auch „irgendwie konvergent“.

(3) Die Folge ist doch *keine* Cauchy-Folge.

(4) Es gibt *doch* Cauchy-Folgen, die nicht konvergent sind.

$\boxed{7}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Benachbarte Folgenglieder bei Cauchyfolgen.*
Diese Aufgabe greift das oben thematisierte und verbreitete Mißverständnis bzgl. Cauchy-Folgen auf: Es genügt nicht, dass die Differenz benachbarter später Folenglieder klein wird, es muss die Differenz *beliebig weit entfernter* später Folgenglieder klein werden!

Die folgende Aufgabe liefert eine hinreichende Bedingung für die Cauchy-Eigenschaft an *benachbarte* späte Folgenglieder. Sie verlangt allerdings ein „schnelles“ Kleiner-Werden ihrer Differenzen.

(a) Sei (a_n) eine reelle Folge mit der Eigenschaft

$$|a_n - a_{n+1}| \;\le\; \frac{1}{2^n}.$$

Zeige, dass (a_n) eine Cauchfolge ist.
Tipp. Für $m \geq n$ ist $a_n - a_m = a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots - a_m$. Dann verwende die geometrische Reihe!

(b) Betrachte konkret die durch folgende Rekursion gegebene Folge (a_n)

$$a_0 = 0,\; a_1 = 1,\; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Zeige, dass a_n eine Cauchyfolge ist.
Tipp: Weise induktiv die Formel $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ nach. Das erlaubt es Teil (a) zu verwenden.

(c) Berechne den Grenzwert von a_n aus (b).
Tipp. Es gilt $a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$ und dann geometrische Reihe—was sonst?