Blatt 5: Folgen & Reihen

$\boxed{1}$ *Verständnisaufgabe: Eigenschaften von Folgen, 2.*
Kann eine (reelle) Folge (a_n) die folgenden Eigenschaften haben? Wenn ja, gib ein Beispiel, wenn nein, argumentiere.

(a) Hat zwei verschiedene Limiten.

(b) Hat zwei verschieden Häufungswerte.

(c) Hat einen Limes und einen Häufungswert.

(d) Hat einen Limes und zwei verschiedene Häufungswerte.

(e) Hat einen Häufungswert, ist aber nach oben unbeschränkt.

(f) Ist beschränkt aber hat keinen Häufungswert.

$\boxed{2}$ *Berührpunkte und Häufungspunkte konkret.*
Bestimme jeweils alle Berührpunkte und Häufungspunkte der angegebene Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(a) $A = \{\dfrac{1}{n^2} :\ 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$ (b) $B = [a, b) \cup (b, c]$ für $a < b < c \in \mathbb{R}$

(c) $C = (1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ (d) $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige endliche Teilmenge.

$\boxed{3}$ *Berührpunkte und Häufungspunkte theoretisch.*
Beweise Vo. Prop. 1.3.30(ii), genauer zeige für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ die folgende Aussage gilt:

$$a \text{ ist Häufungspunkt von } A \iff a \text{ ist Berührpunkt von } A \setminus \{a\}$$

Hinweis. Die schwierigere Richtung ist die Rückrichtung: Mit einer Konstruktion analog zu Vo. 1.3.30(i) „$\Rightarrow$" findest du entsprechende Punkte oder, falls dir das sympathischer ist, eine Folge...

$\boxed{4}$ *Verständnisaufgabe: Reihenkonvergenz.*
Betrachte die folgenden Aussagen. Welche stimmt, welche nicht? Begründe!

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(1) ist konvergent, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

(2) ist konvergent, denn es gilt $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \,/\, \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$

(3) ist divergent, denn $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

(4) ist divergent, denn $\sum \frac{1}{n}$ divergiert und $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum \frac{1}{n}}$.

$\boxed{5}$ *Konvergenz von Reihen.*
Untersuche ob die angegeben Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{(n+2)(n+1)}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ (c) $a_n = \dfrac{1+n}{n}$

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Geometrische Reihe.*

(a) Finde den Fehler!
Eine deiner Kolleginnen verwendet die Summenformel der geometrischen Reihe in der Rechnung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{k}{10}} = \frac{10}{10-k} \qquad (*)$$

und berechnet damit für die konkreten Werte $k=5$ und $k=15$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{15}{10}\right)^n = -2 \qquad (**).$$

Jetzt sieht sie folgendes Problem und postet im Forum:

> „Das Ergebnis in $(**)$ kann nicht stimmen, denn alle Summanden auf der linken Seite sind positiv, also kann keine negative Zahl rauskommen, oder? Ich seh aber nicht, wo ich einen Fehler gemacht hab. Hilfe!“

Löse das Problem auf. Die richtige Antwort versteckt sich unter den folgenden vier. Argumentiere!

(1) Die Aussage $(*)$ gilt nicht für alle $k \in \mathbb{N}$.
(2) Bei $(**)$ ist ein Rechenfehler passiert.
(3) In $(*)$ wurde die Summenformel für die geometrische Reihe nicht richtig eingesetzt.
(4) Das Ergebnis in $(**)$ stimmt schon, denn der Reihenwert kann negativ sein, auch wenn alle Reihenglieder positiv sind.

(b) Was stimmt? Argumentiere!
Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$$

(1) hat den Wert $\frac{11}{4}$.
(2) hat den Wert $\frac{9}{4}$.
(3) ist gar nicht konvergent.
(4) hat den Wert $\frac{7}{4}$.

$\boxed{7}$ *Absolute Konvergenz von Reihen.*
Sind die folgenden Reihen absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

$\boxed{8}$ *Schnittstellen- und Verständnisaufgabe: Dezimaldarstellung.*
Die Dezimaldarstellung bzw. allgemeiner die Darstellung von Zahlen bzgl. beliebiger Basen $b \geq 2$ (b-adische Entwicklung, vgl. Vo. 1.4.26ff) ist ein relevantes Thema der Schulmathematik. Hier beleuchten wir etwas den analytischen Hintergrund.

Wir betrachten die Dezimalzahl

$$a = 0,12112211122211112222\ldots$$

(a) Bestimme die durch a gegebene Bruchzahl (Dezimalbruchdarstellung).

(b) Bestimme die Größen b, N und a_n in der b-adischen Darstellung

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$$

von a, vgl. Vo. Def. 1.4.27.

(c) Welche Aussage stimmt? Begründe!
Die Dezimaldarstellung von a

(1) konvergiert, weil sie periodisch ist.
(2) konvergiert, weil das bei jeder Dezimaldarstellung so ist.
(3) divergiert, weil sie nicht periodisch ist.
(4) divergiert, weil sie unendlich viele Nachkommastellen hat, also nicht abbricht.

(d) Was bedeutet hier eigentlich, dass die Dezimaldarstellung konvergiert?