Blatt 7: Stetigkeit & Grenzwerte von Funktionen

1 *Stetigkeit — Da Capo.*
An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig? Begründe deine Aussagen (keine Beweise!).

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(x+1)$

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 1)/(x+1)$

(c) Inwiefern unterscheiden sich f und g nahe $x_0 = -1$?

(d) $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(x) := x/|x|$ $x \neq 0$ und $\mathrm{sgn}(0) := 0$.

Hinweis: Das Anfertigen von Skizzen ist explizit erwünscht!

2 *Grenzwerte explizit.*
Untersuche, ob die Grenzwerte existieren und wenn ja, berechne sie! Zeichne auch die Graphen der jeweiligen Funktion.

(a) $\lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{1+x}{1-x}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 5x^2 - 1}{1 - x^3}$ (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \exp\left(\dfrac{x^2 - 131x - 97}{(x+17)(x+1)}\right)$

3 *Verständnisaufgabe: Grenzwerte von Funktionen.*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$f(\frac{1}{n}) = 0 \quad \text{für alle } n \geq 1\,,$$

d.h. $0 = f(1) = f(1/2) = f(1/3) = f(1/4) = \dots$.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe.

(1) Es gilt $f(0) = 0$.

(2) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(3) Man kann beides folgern und daher ist f stetig in 0.

(4) man kann keine der beiden Aussagen (1) und (2) folgern.

4 *Einseitige Grenzwerte & Grenzwert*
Sei $c \in (a,b)$, sei $f : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\lim_{x \searrow c} f(x) = \alpha = \lim_{x \nearrow c} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to c} f(x) = \alpha$$

gilt. (Insbesondere existiert der Limes.)

$\boxed{5}$ *Schnittstellenaufgabe: Verhalten von Funktionen.*
Im Schulkontext ist es wichtig, ein Gefühl dafür zu entwickeln, welches Verhalten von Funktionen möglich ist und welches nicht[1]. Gesucht sind also Beispiele von Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften bzw. Argumente warum es solche Funktionen nicht geben kann. Dabei kannst du explizit Funktionen/Argumente angeben oder auch entsprechende Graphen/Argumente skizzieren.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und unbeschränkt.
(c) $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, unbeschränkt.
(d) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt, unstetig.
(e) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die kein Maximum besitzt.
(f) $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig, die kein Minimum besitzt.
(g) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ ohne Nullstelle.
(h) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig und schneidet die 1. Mediane nicht.

$\boxed{6}$ *Verständnisaufgabe: Annehmen des Maximums.*
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1) hat ein Maximum, wenn sie stetig ist,
(2) hat ein Maximum, wenn sie stetig und beschränkt ist,
(3) hat kein Maximum, wenn sie unstetig ist.
(4) Keine der Aussagen stimmt.

$\boxed{7}$ *Stetig? Stetig fortsetzbar?*
Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

(a) Bewerte die Aussage „f ist unstetig im Punkt $x_0 = 0$“.
(b) Zeige, dass f nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Mache dir zuerst klar, was diese Aussage genau bedeutet, vgl. Vo. 2.1.28.

$\boxed{8}$ *Noch ein Aspekt der Stetigkeit.*
Zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig im Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist, falls sie in a im folgenden Sinn *„gut durch eine konstante Funktion approximiert“* werden kann: Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass der „Restterm“ $R(x) := |f(x) - c|$

$$\lim_{x \to a} R(x) = 0 \quad \text{erfüllt.}$$

Hinweis: Fertige eine Skizze an um die Aussage zu verstehen, dann setzte die resp. Definitionen zusammen und beherzige für die schwierigere Rückrichtung Vo. 2.1.22(ii).

[1] Vgl. Grundkompetenzkatalog zur SRDP AHS, Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ FA 1.5 (Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen [...] können) & FA 1.9 (Einen Überblick über die wichtigsten Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können).