Blatt 9: Differenzierbarkeit und Ableitung, Teil 1

$\boxed{1}$ *Differenzierbarkeit—direkt aus der Definition.*
Zeige—direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass die folgenden Funktionen (überall, d.h. auf ihrem gesamten Definitionsbereich) differenzierbar sind und berechne ihre Ableitung.

(a) (Die Identität als Aufwärmübung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

(b) (Cosinus, vgl. Vo. 3.1.10(v)) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x)$

(c) (Inverse Potenzen) $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-n}$ für $\mathbb{N} \ni n \geq 1$
Tipp: $(y^n - x^n) = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^2 + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})$

$\boxed{2}$ *Differenzierbarkeit der Wurzel.*
Wir betrachten die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Zeige—direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

(b) Zeige—wiederum direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit—dass f in $x = 0$ *nicht* differenzierbar ist. Fertige auch eine Skizze an.

$\boxed{3}$ *Schnittstellenaufgabe: Differenzierbarkeit 1.*
Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = \exp(x)\,\sin(x)$

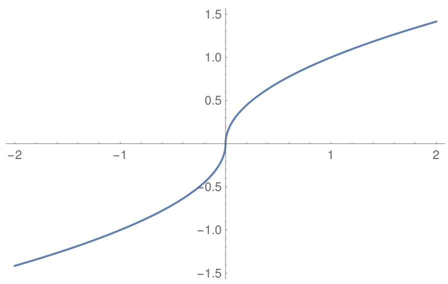
(b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$

(c) $f_3(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$

(d) (Polynom, allgemein) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (n \in \mathbb{N},\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$

$\boxed{4}$ *Verständnisaufgabe: Differenzierbarkeit der Wurzel, zum Zweiten.*
Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$



die jedenfalls nach Aufgabe 2 auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Begründe!

(1) f ist im Nullpunkt differenzierbar *und* die Tangnte im Nullpunkt ist die x-Achse.

(2) f ist im Nullpunkt differenzierbar *und* die Tangnte im Nullpunkt ist die y-Achse.

(3) f ist im Nullpunkt nicht differenzierbar *und* es gilt $\lim_{0\neq x\to 0} f'(x)' = 0$.

(4) f ist im Nullpunkt nicht differenzierbar *und* es gilt $\lim_{0\neq x\to 0} f'(x)' = \infty$.

$\boxed{5}$ $\exp' = \exp$—*über Wald und Wiese.*
In Vo. 3.1.10(iv) haben wir gezeigt, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, dass $\exp' = \exp$ gilt.

Zeige, dass dieses Resultat auch hergeleitet werden kann, indem man die Exponentialreihe gliedweise (d.h. Term für Term) differenziert.

Hinweis. Wir werden später in der Vorlesung einen Satz kennenlernen, der diese Vorgehensweise „legalisiert". Genauer, eine konvergente Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n =: f(x)$ darf gliedweise differenziert werden, d.h. es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1} = f'(x)$.

$\boxed{6}$ *Schnittstellenaufgabe: Differenzierbarkeit 2.*
Für welche x sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1)$

(c) $f_3(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ (d) $f_4(x) = x^{-3} + \dfrac{x-1}{x-2}$

$\boxed{7}$ *Nützliche Ableitungsregeln.*
Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion. Für welche x sind die Funktionen (a) $f_1(x) = \sqrt{f(x)}$ und (b) $f_2(x) = \log(f(x))$ differenzierbar? Berechne f_i'.

$\boxed{8}$ *Differenzierbarkeit 3.*
Für welche x sind die folgenden Funktionen definiert, für welche x sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung. Skizziere auch die Funktionsgraphen.

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+2}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$

(c) $f_3(x) = x\log(x) - x$ (d) $f_4(x) = e^{2x+3}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$ (f) $f_6(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

$\boxed{9}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Produktregel kreativ anwenden.*
Die reellen Funktionen $f, g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Weiters gelte, dass $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in (-a, a)$ und $f(0) = 0$. Zeige, dass dann $g(0) \neq 0$ gelten muss.