1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge (a_n) und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls

   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

   (b) [true] in jeder ε-Umgebung von a alle Folgenglieder a_n liegen.

   (c) [false] in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder a_n liegen.

   (d) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

2. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Der Audruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet

   (a) [true] die Folge der Partialsummen.

   (b) [true] den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$, falls er existiert.

   (c) [false] die n-te Partialsumme $\sum_{m=0}^{n} a_m$.

   (d) [true] den Reihenwert im Fall der Konvergenz.

3. *(Stetigkeit.)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls

   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ $\implies \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

   (b) [true] für jede reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ auch $f(x_n) \to f(a)$ gilt.

   (c) [false] $\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ $\implies \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

   (d) [false] es zu jedem „Sicherheitsintervall“ $U_\delta(a)$ eine „Toleranz“ ε gibt, sodass für alle $x \in U_\delta(a)$ gilt, dass $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

4. (*Potenzen.*) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $x^q = \sqrt[n]{x^m} \quad$ für $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

   (b) [false] $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}} \quad$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) [true] $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) [false] $x^\alpha = \exp(x \log(\alpha))$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (*Lokale Maxima.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $\xi \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum von f, falls

   (a) [true] es eine Umgebung U von ξ gibt, sodass $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in U$ gilt.

   (b) [false] $f'(\xi) = 0$ gilt.

   (c) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \geq f(x)$.

   (d) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(\xi) \leq f(x)$.

6. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
   ($\mathfrak{T}[a, b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$)

   (a) [false] Ober- und Unterintegral existieren.

   (b) [true] f eine Treppenfunktion ist.

   (c) [true] $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \;\middle|\; \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\ f \leq \varphi \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \;\middle|\; \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\ \psi \leq f \right\}$

   (d) [false] $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \;\middle|\; \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\ f \leq \varphi \right\} > \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \;\middle|\; \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\ \psi \leq f \right\}$

2 Sätze & Resultate

1. *(Folgen & Konvergenz).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Jede konvergente Folge ist beschränkt.

   (b) [true] Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

   (c) [true] Es gibt monotone nicht konvergente Folgen.

   (d) [false] Jede Folge hat genau einen Grenzwert.

2. (*Zur Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$.) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur (Ordnungs-)Vollständigkeit der reellen Zahlen?

   (a) [true] Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

   (b) [false] Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

   (c) [true] Das Intervallschachtelungsprinzip.

(d) [false] Jede beschränkte Folge konvergiert

3. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Jede stetige Funktion ist beschränkt.

   (b) [false] Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

   (c) [true] Jede auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion hat ein Maximum und ein Minimum.

   (d) [true] Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(x_0) > 0$, dann gibt es ein Intervall $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (mit einem $\delta > 0$) sodass $f(x) > 0$ für alle $x \in U$.

4. (*Exponentialfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\exp(x + y) = \exp(x) + \exp(y)$.

   (b) [true] $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   (c) [true] $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$.

   (d) [false] $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

5. (*Eigenschaften von differenzierbaren Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

   (b) [true] Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

   (c) [false] Jede differenzierbare Funktion ist beschränkt.

   (d) [false] Treppenfunktionen sind differenzierbar.

6. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Welche Aussagen sind korrekt? Die erste Aussage des HsDI kann geschrieben werden als

   (a) [false] $\frac{d}{dx} \int_a^b f(t)dt = f(x)$.

   (b) [false] $\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

   (c) [true] $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

   (d) [false] $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dt = f(x)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

   (a) [true] $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

   (b) [false] $\frac{n^2+4n}{n^2+3}$ ist eine Nullfolge.

   (c) [true] Falls $a_n \to a$, dann ist $a_n - a$ eine Nullfolge.

   (d) [false] $\frac{(-1)^n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

2. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

   (b) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} < \infty$

   (c) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

   (d) [true] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$.

3. *(Die Euler'sche Zahl).* Welche der Gleichungen stimmen?

   (a) [true] $e = \exp(1)$.

   (b) [false] $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

   (c) [false] $e = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$

   (d) [false] $e = 2.713$

4. (*Funktionseigenschaften.*) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion

   $$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{zu?}$$

   (a) [false] f ist beschränkt.

   (b) [true] f ist (überall) stetig.

(c) [false] f ist (überall) differenzierbar.

(d) [true] f ist auf $[0, 1]$ integrierbar.

5. (*Funktionsgrenzwerte.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (b) [true] $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$

   (c) [false] $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = 1$

   (d) [true] $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

6. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar?

   (a) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 6x - 7.$

   (b) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$

   (c) [true] $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}.$

   (d) [true] $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$

4 Rechenaufgaben

1. *(Grenzwerte konkret).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\frac{2^n}{n^2} \;\to\; 0.$

   (b) [false] $\frac{n!}{(n-1)!} \;\to\; 0.$

   (c) [true] $\frac{n!}{n^n} \;\to\; 0.$

   (d) [false] $\frac{n^2 + 3n + 2}{2n^2 + 8n + 4} \;\to\; \frac{3}{8}.$

2. *(Funktionsgrenzwerte konkret).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = \infty.$

(b) [true] $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

(c) [false] $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$.

(d) [true] $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x^2|} = \infty$.

3. (*Differenzieren, konkret, 1.*) Berechne die Ableitung von

$$f(x) = e^{x^2}\cos(e^x).$$

Welche Ergebnisse sind korrekt?

(a) [false] $f'(x) = e^{x^2}\big(e^x \sin(e^x) - 2x\cos(e^x)\big)$.

(b) [false] $f'(x) = 2xe^{x^2}\big(\cos(e^x) - \sin(e^x)\big)$.

(c) [true] $f'(x) = e^{x^2}\big(2x\cos(e^x) - e^x \sin(e^x)\big)$.

(d) [false] $f'(x) = 2xe^{x^2}\big(\sin(x) - \cos(e^x)\big)$.

4. (*Differenzieren, konkret, 2.*) Welche der Rechnungen sind (für $x > 0$) korrekt ?

(a) [true] $f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

(b) [false] $f(x) = x^x, \quad f'(x) = x \cdot x^{x-1}$.

(c) [false] $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{2}{x^3}$.

(d) [true] $f(x) = |x^2|, \quad f'(x) = 2x$.

5. (*Integrieren, explizit, 1.*) Welche Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

(b) [false] $\int \sin(x)\,dx = \cos(x)$.

(c) [false] $\int e^x\,dx = \frac{e^{x-1}}{x-1}$.

(d) [true] $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

6. (*Integrieren, explizit, 2.*) Berechne

$$\int_1^3 x\log(x)\,dx.$$

Welche Ergebnisse sind korrekt?

(a) [false] $\frac{9}{4}\log(3) - 2.$

(b) [true] $\frac{9}{2}\log(3) - 2.$

(c) [false] $\frac{9}{2}\log(3) - \frac{9}{4}.$

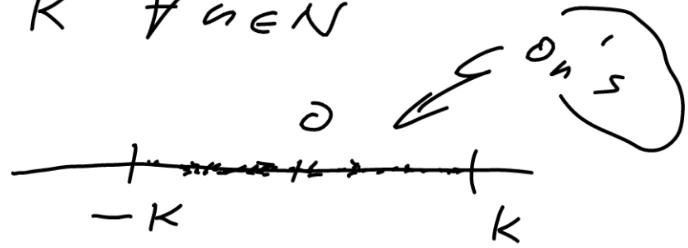
(d) [true] $9\log(\sqrt{3}) - 2.$

TEIL 2: OFFENE AUFGABEN

$\boxed{1}$ (a) Eine reelle Folge (a_n) heißt beschränkt, falls

$\exists K>0: \ |a_n| \le K \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

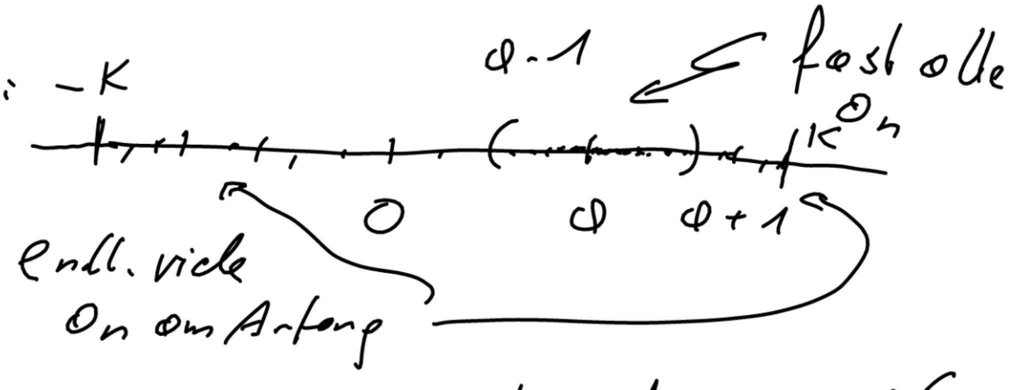
Skizze:



(b) Bei einer konv. Folge (a_n) sind die späten, alle bis auf endlich viele Glieder z.B. in der $\varepsilon=1$-Umgebung um den Limes a, also beschränkt durch $|a|+1$. Die endlich vielen Glieder am Folgenanfang sind betragsmäßig beschränkt durch ihr Maximum $\max(|a_n|) =: C$. Daher gilt für alle n

$$|a_n| \le K := \max(|a|+1, C).$$

Skizze:

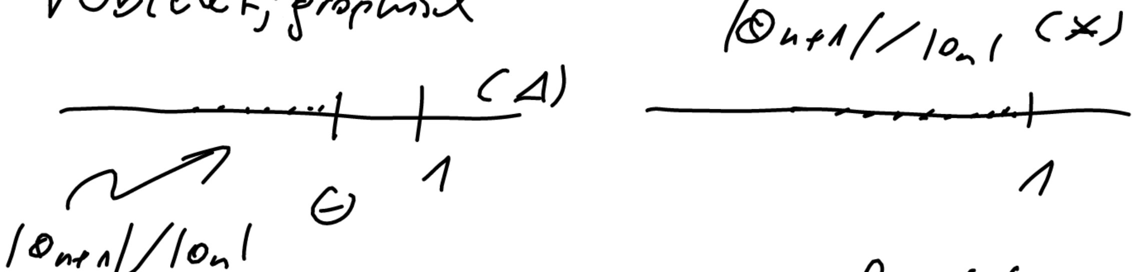


(c) QT: Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0 \ \forall n$, dann konvergiert $\sum a_n$ absolut, falls $\exists \Theta < 1$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \Theta \ \ \forall n \ge n_0 \quad (\Delta)$$

Der Unterschied zwischen (Δ) und $(*)$ ist, dass bei (Δ) der Ausdruck $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

für alle n einen positiven Abstand zu 1 haben muß, was bei $(*)$ nicht der Fall sein muß. Insbesondere erlaubt $(*)$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, was (Δ) verbietet; graphisch



Das QT würde mit $(*)$ <u>nicht</u> funktionieren, denn $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \leq 1$ (aber $\frac{n}{n+1} \to 1$, also (Δ) <u>nicht</u> gilt).

$\boxed{2}$ (a) Eine Fkt $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt <u>glm. stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Die Stetigkeit von f auf D lautet hingegen

$$\forall x \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Im 2. Fall hängt δ i.A. von ε <u>und x</u> ab, im 1. Fall <u>nur</u> von ε, kann also gleichmäßig im x gewählt werden.

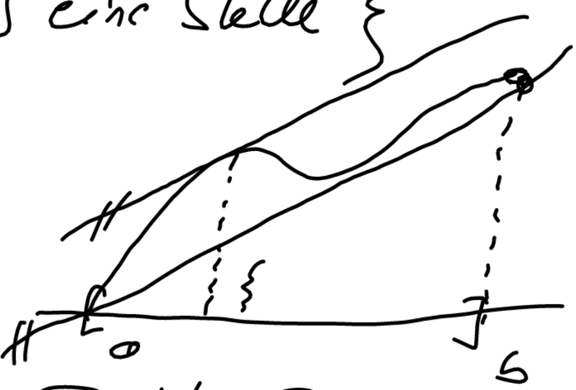
(b) $$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \frac{\frac{1}{\xi+h} - \frac{1}{\xi}}{h} = \frac{1}{h} \frac{\xi - (\xi+h)}{(\xi+h)\xi} =$$

$$= \frac{1 \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}(\xi+h)\xi} \longrightarrow -\frac{1}{\xi^2} \Longrightarrow f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}$$

(c) Der MWS besagt, dass ein hinreichend schönes $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ [genauer stetig & diffbar im Innern] eine Stelle ξ besitzt, wo die Tangentensteigung $f'(\xi)$ gleich der Sekantensteigung

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ist.



(d) <u>S.v. Rolle</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b) mit $f(a)=f(b)$. Dann

$$\exists \xi\in(a,b) \text{ mit } f'(\xi)=0.$$

f konst $\Rightarrow f'=0$

<u>Beweisschritte</u>:

(1) Falls f konstant ist $\Longrightarrow f'(\xi)=0 \;\forall \xi\in(a,b)$

(2) Wenn f <u>nicht</u> konstant $\Longrightarrow \exists x\in(a,b): f(x)>f(a) = f(b)$

OBdA

(3) f stetig auf $[a,b]$ $\Longrightarrow$ f hat ein Maximum, d.h. $\exists \xi\in[a,b]: f(\xi)\geq f(x) \;\forall x\in[a,b]$

Satz vom Max.

(4) Wegen (2) <u>muss</u> ξ im Innern liegen

$$\Longrightarrow f'(\xi)=0$$

$\square$

Notw. Bed für Extrema

[3] <u>HsDI, Teil 1</u>: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und a beliebig im Intervall I. Dann ist die Fkt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

stetig diffbar und es gilt $F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$ (d.h. F ist Stammfkt von f).

<u>Beweisskizze</u>.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{h} f(\xi) \cdot h = f(\xi)$$

mit $\xi \in [x, x+h]$

$$\longrightarrow f(x) \quad (h \to 0).$$

- <u>Beweisverlauf</u>: Es wird F' über den Limes des Differenzenquotienten berechnet.
- An der entscheidenden Stelle $(*)$ wird der MWS der Integralrechnung verwendet.
- Die Stetigkeit von f liefert die Integrierbarkeit und nur so ist F überhaupt definiert.