Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2020, 2. Termin, 30.9.2020, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge (a_n) und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls
   (a) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
   (b) [true] in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.
   (c) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < 2\varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (d) [true] außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele Folgenglieder a_n liegen.

2. (*Uneigentliche Konvergenz.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine reelle Folge (a_n) ist bestimmt konvergent gegen $+\infty$, falls
   (a) [false] $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall K \in \mathbb{R} : \quad a_n > K \quad \forall n \geq N.$
   (b) [true] $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad a_n > K \quad \forall n \geq N.$
   (c) [false] $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n > K.$
   (d) [false] falls sie unbeschränkt ist.

3. *(Reihenkonvergenz.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls
   (a) [true] die Folge der Partialsummen konvergiert.
   (b) [false] $a_n \to 0.$
   (c) [false] $\Big(\sum_{n=0}^{m} a_n\Big)_m < \infty.$
   (d) [true] $\Big(\sum_{n=0}^{m} a_n\Big)_m$ konvergiert.

4. *(Konvergenz von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $f : D \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, a ein Berührpunkt von D und $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$. Es gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$, falls
   (a) [false] es eine Folge (x_n) in D gibt mit $x_n \to a$ und $f(x_n) \to c$.
   (b) [true] $\forall (x_n) \in D : \quad x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to c.$
   (c) [false] $\forall (x_n) \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \to a$ und $f(x_n) \to c.$
   (d) [true] für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt, dass $f(x_n) \to c$.

5. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Sei ξ ein Punkt im Intervall I und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist differenzierbar in ξ, falls
   (a) [false] $\lim\limits_{\substack{x\to\xi \\ x\neq\xi}} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ existiert.
   (b) [true] $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \to a \quad (x \to \xi,\ x \neq \xi)$, für ein $a \in \mathbb{R}$.
   (c) [true] $\lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist.
   (d) [true] $\lim\limits_{\substack{x\to\xi \\ x\neq\xi}} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{x - \xi}$ existiert und endlich ist.

6. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
($\mathfrak{T}[a,b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a,b]$)
   (a) [true] Ober- und Unterintegral übereinstimmen.
   (b) [true] f differenzierbar ist.
   (c) [false] $\inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b],\, f \leq \varphi \right\}$ und
   $\sup\left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a,b],\, \psi \leq f \right\}$ existieren.
   (d) [false] $\inf\left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \,\middle|\, \varphi \in \mathfrak{T}[a,b],\, f \leq \varphi \right\}$
   $\geq \sup\left\{ \int_a^b \psi(t)dt \,\middle|\, \psi \in \mathfrak{T}[a,b],\, \psi \leq f \right\}$.

2 Sätze & Resultate

7. *(Folgen & Konvergenz).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?
   (a) [false] Jede monotone Folge ist beschränkt.
   (b) [true] Jede monotone, beschränkte Folge hat einen Häufungswert.
   (c) [false] Es gibt unbeschränkte, konvergente Folgen.
   (d) [true] Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.
8. (*Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Eine reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls
   (a) [true] $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.
   (b) [false] $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq m \geq N : \ \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.
   (c) [true] $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq N : \ \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$.
   (d) [false] $\lim_{n\to\infty} |a_n| \ = \ 0$.
9. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Jede stetige Funktion ist monoton.
   (b) [true] Es gibt stetige Funktionen, die differenzierbar sind.
   (c) [false] Jede stetige Funktion hat ein Maximum und ein Minimum.
   (d) [true] Jede stetige Funktion bildet Intervalle wieder auf Intervalle ab.
10. (*Logarithmusfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] $\log(x + y) = \log(x)\ \log(y)$.
   (b) [false] $\log(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   (c) [true] $\log(x^\alpha) = \alpha \log(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
   (d) [true] $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{x^\alpha} \ = \ 0 \quad (\alpha > 0)$.
11. (*Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.*) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Hat f in $\xi \in [a,b]$ eine lokale Extremstelle, dann gilt $f'(\xi) = 0$.
   (b) [true] $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow f$ monoton wachsend auf $[a,b]$.
   (c) [true] $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow f$ streng mon. fallend auf $[a,b]$.
   (d) [true] f hat ein Maximum in $[a,b]$.
12. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind korrekt? Die zweite Aussage des HsDI kann geschrieben werden als

(a) [false] $\int_a^x F'(t)dt = F(b) - F(a)$.

(b) [false] $\int_a^b f'(t)dt = F(b) - F(a)$.

(c) [true] $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$.

(d) [true] $\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

    (a) [true] $\left(\frac{n}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

    (b) [true] $\dfrac{n^2+4n^n}{3+n+n^3}$ ist keine Nullfolge.

    (c) [false] Falls (a_n) und (b_n) konvergieren und $a_n < b_n$ für alle n gilt, dann gilt auch $\lim a_n < \lim b_n$.

    (d) [false] $(-1)^n n$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

14. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

    (b) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n^2}$ konvergiert.

    (c) [true] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

    (d) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut.

15. *(Sinus und Cosinus)*. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] $\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$.

    (b) [true] $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

    (c) [true] $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

    (d) [true] $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

16. (*Funktionseigenschaften.*) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion
    $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x| \quad \text{zu?}$$

    (a) [false] f ist monoton.

    (b) [true] f ist (überall) stetig.

    (c) [false] f ist (überall) differenzierbar.

    (d) [true] f ist auf $[-1, 1]$ integrierbar.

17. (*Stetige Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?

    (a) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x-3|$.

    (b) [true] $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$.

    (c) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (für $x \neq 0$), $f(0) = 0$.

    (d) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (für $x \neq 0$), $f(0) = 0$.

18. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Rationale Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar.

    (b) [false] Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (für $x \neq 0$), $f(0) = 0$ ist (überall) differenzierbar.

    (c) [true] Die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ x \in (0,\infty))$ ist (überall) differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

    (d) [false] Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = xe^{x-1}$.

4 Rechenaufgaben

19. *(Grenzwerte konkret).* Welche der folgenden Aussagen sind für $n \to \infty$ korrekt?

   (a) [false] $(-1)^n \sqrt[n]{3} \to 0$.

   (b) [false] $\dfrac{3n^2+2n+n^3}{2n^2+8n+4} \to \dfrac{3}{2}$.

   (c) [true] $\sqrt{n^2+2n} - n \to 1$.

   (d) [false] $\dfrac{3^n}{n!} \to \infty$.

20. *(Reihenkonvergenz konkret).* Welche der folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.

   (a) [true] $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{(n-2)(n+3)}$.

   (b) [true] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$.

   (c) [false] $a_n = \dfrac{1+n}{n}$.

   (d) [true] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

21. (*Differenzieren, konkret, 1.*) Berechne die Ableitung von

$$f(x) = e^x \sin(e^{x^2}).$$

   Welche Ergebnisse sind korrekt?

   (a) [false] $f'(x) = e^x \big(\cos(e^{x^2}) e^{x^2} + \sin(e^{x^2}) \big)$.

   (b) [true] $f'(x) = e^x \big(\sin(e^{x^2}) + 2x \cos(e^{x^2}) e^{x^2} \big)$.

   (c) [false] $f'(x) = e^x \sin(e^{x^2}) + 2xe^{x^3} \cos(e^{x^2})$.

   (d) [true] $f'(x) = e^x \sin(e^{x^2}) + 2xe^{x+x^2} \cos(e^{x^2})$.

22. (*Differenzieren, konkret, 2.*) Welche der Rechnungen sind korrekt (jeweils für x, sodass $f'(x)$ existiert) ?

   (a) [false] $f(x) = e^{\cos(x)} \quad f'(x) = \sin(x) e^{\cos(x)}$.

   (b) [true] $f(x) = x^x, \quad f'(x) = (1 + \log(x)) f(x)$.

   (c) [false] $f(x) = \cos(\log(x)), \quad f'(x) = \sin(\log(x)) \dfrac{1}{x}$.

   (d) [true] $\log \sqrt{1 + \sin^2(x)}, \quad f'(x) = \dfrac{\sin(x)\, \cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$.

23. (*Integrieren, explizit, 1.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x)$.

   (b) [true] $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$.

   (c) [true] $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x$.

   (d) [false] $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

24. (*Integrieren, explizit, 2.*) Berechne $\displaystyle\int_1^2 x^2 \log(x)\, dx$. Welche Ergebnisse sind korrekt?

   (a) [false] $\dfrac{1}{9}\Big(8\log(2) - 7\Big)$.

   (b) [true] $\dfrac{8}{3}\log(2) - \dfrac{7}{9}$.

   (c) [true] $\dfrac{1}{9}\Big(8\log(8) - 7\Big)$.

   (d) [false] $\dfrac{7}{3}\log(2) - \dfrac{7}{9}$.

Teil 2: OFFENE AUFGABEN

$\boxed{1}$ (a) Eine reelle Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N: \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Das Wesen einer CF ist, dass späte Glieder nahe beieinander liegen, die Folge also immer weniger weit „fortschreitet" oder „versandet".

(b) Jede konvergente Folge ist eine CF. Das ist einfach zu sehen [Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N$

$\Rightarrow \forall m,n \geq N: \ |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$]

und gilt auch für Folgen in $\mathbb{Q}$.

Die umgekehrte Richtung, also (a_n) reelle Folge, dann gilt (a_n) CF $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert ist schwieriger und äquivalent zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

(c) zz: $\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

Wir verwenden das Cauchy-Prinzip für Reihen:

$$\sum a_n < \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m \geq N: \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \infty$$

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq m \geq N: \ \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \infty$,

$\sum |a_n| < \infty$, CP

$$\text{d.h. } \varepsilon > \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \geq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \overset{CP}{\Longrightarrow} \sum a_k < \infty$$

Δ-Ungl.

$\square$

$\boxed{2}$ (a) $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
$\forall$ Folgen $(x_n) \in D$ mit $x_n \to a$ gilt: $f(x_n) \to f(a)$

(b) Die Summe zweier in $a \in D$ stetiger Funktionen $f, g: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist wieder stetig in a, weil nach dem Folgenkriterium zu zeigen ist, dass $\forall (x_n) \in D$ mit $x_n \to a$ gilt: $(f+g)(x_n) \longrightarrow (f+g)(a)$.
Das ist aber aufgrund der Definition der Summe und der Grenzwertsätze der Fall:

$$\underbrace{(f+g)(x_n) = f(x_n)+g(x_n)}_{\text{Def }+} \xrightarrow[\text{Grenzwertsatz}]{} f(a)+g(a) = (f+g)(a).$$

$f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(x)$

(c) $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $a \in I \Rightarrow f$ stetig in a

Beweis. Sei $a \neq x \in I$, dann gilt

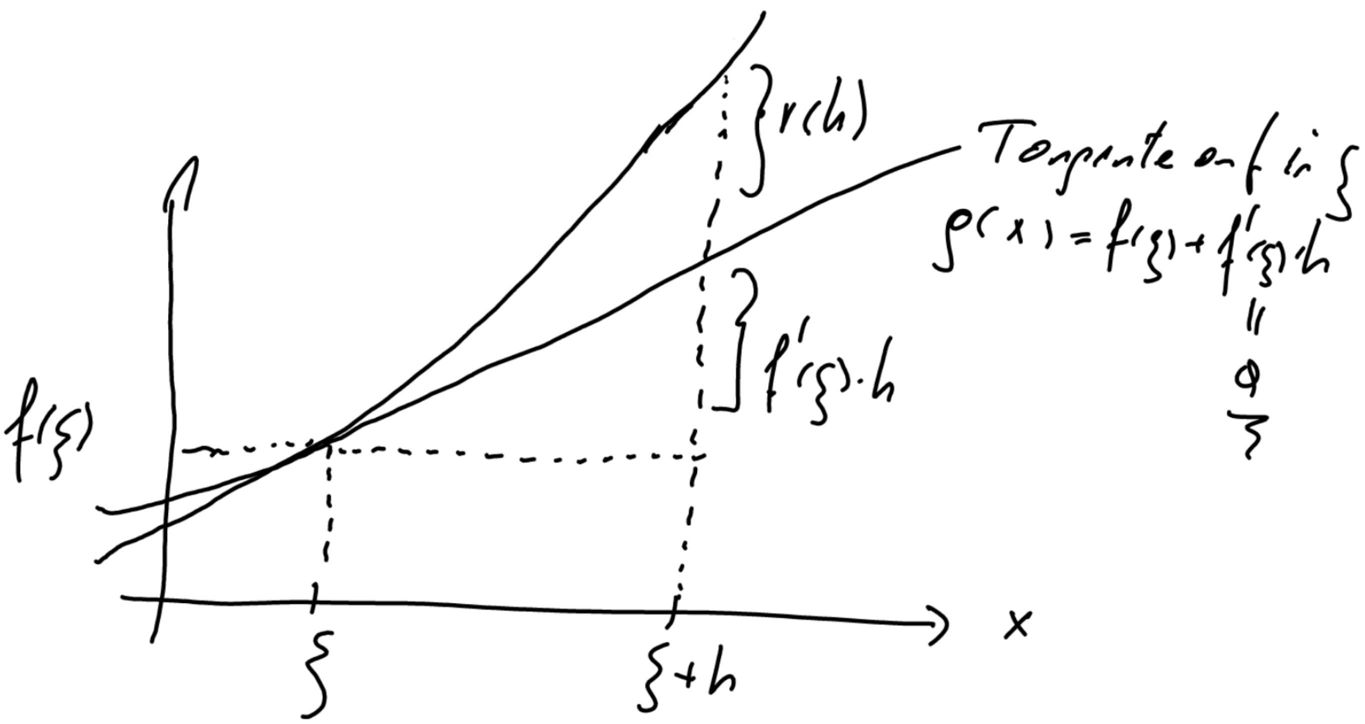
$$f(x)-f(a) \underset{\text{Trick}}{=} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \xrightarrow[\substack{\text{Gw-Satz}\\ (x\to\xi)}]{f \text{ diffb. in } a} f'(a)\cdot 0 = 0$$

Also gilt $f(x) \to f(a)$ für $(x \to a)$ $\underset{\text{Gw-Bed f. Stetigkeit}}{\Rightarrow}$ f stetig in a

$\square$

$\boxed{2}$ (d) $f: I \to \mathbb{R}$ und ξ ein Pkt im Intervall I. Es gilt

$$f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, r: I \to \mathbb{R} \text{ mit}$$
$$f(\xi+h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h)$$
$$\text{und } \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$



$\boxed{3}$ (a) Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

(b)
$$\int \log(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log(x)}_{g}\, dx = x \log(x) - \int x \frac{1}{x}\, dx$$
$$= x \log(x) - x$$

3 (c) Das ist eine verbale Formulierung des HsDI, die aber 2 Ungenauigkeiten enthält

1. Wenn man zuerst differenziert und dann integriert, landet man nicht genau bei der Ausgangsfkt sondern es entsteht eine zusätzliche Konstante:

$$C^1 \ni f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{I} \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0)$$

2. Die Operatoren D & I haben verschiedene Definitionsbereiche:

$$D: C^1 \to C^0, \quad I: C^0 \to C^1$$

Daher ergibt sich schematisch das folgende Bild: