NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2020, 4. Termin, 9.2.2021

Roland Steinbauer

Teil 2: Offene Aufgaben

Die vorliegende Prüfung ist als „Open book exam” konzipiert, d.h. Sie sind explizit dazu eingeladen ihre Vorlesungsnotizen und vor allem das Skriptum zu verwenden. Einige der Aufgaben beziehen sich direkt auf die Notation im Skriptum!

Beim offenen Teil der Prüfung können Sie, wie schon beim Multiple Coice-Teil, maximal 24 Punkte erreichen. Die genauen Punktezahlen sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(24)	(11)	(8)	(5)	(24)	(48)	

1. *Folgen & Konvergenz.*

   (a) *(Größenvergleich konvergenter Folgen.)* Für zwei konvergente reelle Folgen (a_n), (b_n) mit $b_n \leq a_n$ für fast alle n, gilt auch für die Limiten

   $$\lim b_n \leq \lim a_n.$$

   (i) Beschreiben Sie ausführlich den Beweisverlauf für dieses Resultat und begründen Sie jeden Schritt in eigenen Worten. (3 Pkte)

   (ii) Gilt eine entsprechende Aussage auch für „$<$ " statt „$\leq$"? Begründen Sie ihre Antwort (Argument oder Gegenbeispiel)! (1 Pkt)

   (b) *(Intervallschachtelungsprinzip.)*

   (i) Im Intervallschachtelungsprinzip wird vorausgesetzt, dass die Intervalle I_n abgeschlossen sind. Stimmt der Satz auch, wenn alle Intervalle offen sind? Begründen Sie (Argument oder Gegenbeispiel)! (2 Pkte)

   (ii) Beschreiben sie die einzelnen Schritte im Beweis des Intervallschachtelungsprinzips in eigenen Worten. Geben sie genau an, wo die Voraussetzungen eingehen und wo die Vollständigkeit der reellen Zahlen. (5 Pkte)

2. *Funktionen & Stetigkeit.*

   (a) *(Nichtverschwinden auf einer Umgebung.)* Lemma 2.1.10 besagt, dass für eine im Punkt x_0 stetige Funktion mit $f(x_0) > 0$ gilt, dass sie auch auf einer ganzen Umgebung von x_0 positiv ist.

   Beschreiben Sie den Beweisverlauf ganz grob in eigenen Worten und fertigen Sie eine Skizze an. (3 Pkte)

   (b) *(Grundoperationen für Funktionen & ihre Verträglichkeit.)* Seien $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (i) Erklären Sie, wie die Funktionen $f \pm g$, $\lambda \cdot f$ und $f \cdot g$ definiert sind. Gehen Sie dabei auf die Rolle des Zielraumes ein! (2 Pkte)

   (ii) Erklären Sie, wie man beweist, dass die Funktion $f + g$ aus (i) stetig ist, falls f und g stetig sind. (2 Pkte)

3. *Differenzierbare Funktionen.*

   (a) *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung.)* Formulieren Sie in Worten die Aussage des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Fertigen Sie eine Skizze an! Wo geht im Beweis des Satzes die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein? (3 Pkte)

   (b) *(Taylorreihen.)* Was versteht man unter der Taylorreihe einer glatten Funktion f und was hat die Taylorreihe mit der ursprünglichen Funktion zu tun? (3 Pkte)