NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022, 1. Termin, 4.7.2022

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkt pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(24)	(6)	(8)	(10)	(24)	(48)	

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Für eine reelle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls

   (a) in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) fast alle Folgenglieder a_n in einer ε-Umgebung von a liegen

   (d) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. (*Zum Begriff des Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von $(a_n)_n$, falls

   (a) außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen.

   (b) innerhalb jeder ε-Umgebung von a unendlich viele a_n liegen.

   (c) es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

   (d) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N\colon \quad |a - a_n| < \varepsilon$.

3. (*Cauchy-Folge.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine reelle Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, falls

   (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

   (c) jede Teilfoge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ konvergiert

   (d) $\forall k > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : \quad |a_m - a_n| < 1/k$.

4. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls

   (a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   (b) es eine reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ gibt, für die schon $f(x_n) \to f(a)$ gilt.

   (c) $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   (d) es zu jeder (noch so kleinen) „Toleranz“ ε ein „Sicherheitsintervall“ $U_\delta(a)$ gibt, sodass alle $x \in U_\delta(a)$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden (d.h. $f(x)$ in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt).

5. (*Stetige Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

(a) Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist in $x = 0$ unstetig.

(b) Die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(c) Die Funktion $f : [-2,-1] \cup [1,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-2 \leq x \leq -1) \\ 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

ist unstetig.

(d) Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ ist stetig in $x = 0$, weil $\lim_{x\to 0+} 1/x^2 = \infty = \lim_{x\to 0-} 1/x^2$

6. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist im Punkt ξ im Intervall I differenzierbar, falls

   (a) der Differenzenquotient von f bei ξ einen endlichen Limes für $x \to \xi$ besitzt.

   (b) $\displaystyle\lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f(\xi) - f(x)}{x - \xi}$ existiert und endlich ist.

   (c) $\displaystyle\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist.

   (d) f auf $I \setminus \{\xi\}$ differenzierbar ist und $\lim_{x \searrow \xi} f'(x) = \lim_{x \nearrow \xi} f'(x)$ gilt.

7. (*Differenzierbarkeit, strukturell.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^k$ für $k \in \mathbb{N}$ sind (überall) nach der Produktregel differenzierbar, weil sie ein $k-$faches Produkt der differenzierbaren Funktion $x \mapsto x$ sind.

   (b) Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^\alpha$ für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind (überall) nach der Produktregel differenzierbar, weil sie ein iteriertes Produkt der differenzierbaren Funktion $x \mapsto x$ sind.

   (c) Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^\alpha$ für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind wegen $x^\alpha = e^{\alpha \log(x)}$ (überall) nach Ketten- und Produktregel differenzierbar weil $\exp$ und $\log$ differenzierbar sind.

   (d) Die Ableitung der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ kann für alle $x > 0$ wie folgt mit der Produktregel berechnet werden

$$1 = x' = (\sqrt{x}\,\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}\,(\sqrt{x})' \quad \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

8. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (mit I einem Intervall) ist Stammfunktion einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls

(a) F differenzierbar und $f' = F$ auf ganz I gilt.

(b) F gegeben ist durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ mit $a \in I$ beliebig.

(c) $F' = f + c$ gilt, für ein $c \in \mathbb{R}$.

(d) $G = F + 7$ auch eine Stammfunktion von f ist.

2 Sätze & Resultate

1. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

   (b) Jede streng monotone und beschränkte Folge konvergiert.

   (c) Es gibt beschränkte nicht monotone Folgen, die konvergieren.

   (d) Es gibt unbeschränkte, nicht monotone Folgen, die konvergieren.

2. (*Zur Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sind korrekt?

   (a) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

   (b) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, dann ist a_n eine Nullfolge.

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ beschränkt ist.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ beschränkt und monoton ist.

3. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert wortwörtlich auch für Folgen *offener*, beschränkter Intervalle.

   (b) Jede reelle Zahl der Form $\sqrt{a}$ für $a > 0$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

   (c) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

   (d) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert (als Folge in $\mathbb{R}$) aber ihr Limes muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

4. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen sind beschränkt

(b) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.

(c) Ist f stetig auf $[a,b]$, so ist $f([a,b])$ wieder ein Intervall oder besteht nur aus einem Punkt.

(d) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) > 0$ so gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) > 1/2$ für alle $x \in U_\delta(0)$.

5. (*Winkelfunktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$.

   (b) $|e^{\mathrm{i}x}| = 1$ und daher $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

   (c) $\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.

   (d) $\lim\limits_{0 \neq x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

6. (*Mittelwertsatz.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

   (a) Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ sodass f in ξ differenzierbar ist und $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ gilt.

   (b) Ist f zusätzlich auf $[a,b]$ differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

   (c) Ist f zusätzlich auf (a,b) differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

   (d) Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt in (a,b), in dem die Ableitung von f verschwindet.

7. (*Extrema.*) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   (a) f hat ein globales Maximum und ein globales Minimum.

   (b) Hat f im Punkt ξ ein lokales Minimum, dann gilt schon $f'(\xi) = 0$.

   (c) Gibt es einen Punkt ξ mit $f(\xi) = 0$ und ist f in ξ zweimal differenzierbar mit $f''(\xi) > 0$ dann hat f in ξ ein lokales Minimum.

   (d) Falls f im Punkt ξ ein striktes lokales Minimum hat, dann gibt es ein $\delta > 0$ sodass f streng monoton fallend auf $(\xi - \delta, \xi)$ und streng monoton steigend auf $(\xi, \xi + \delta)$ ist.

8. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Die erste Aussage des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung kann geschrieben werden als

   (a) $\frac{d}{dt}\int_a^b f(t)dt = f(x).$
   (b) $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t).$
   (c) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$
   (d) $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(x).$

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

1. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?
   (a) $\left(\frac{n}{n!}\right)_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt.
   (b) $\frac{(-1)^n\, n}{n^2}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.
   (c) $\frac{2n^2+n}{n^2+7}$ ist eine Cauchy-Folge.
   (d) Falls für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gilt, dass $a_n \leq b_n$ für alle n und $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, dann ist auch (a_n) eine Nullfolge.

2. (*Konvergenz & absolute Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut.
   (b) Absolut konvergente Reihen haben nur positive Glieder.
   (c) Eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 10^6$ konvergiert absolut.
   (d) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann ist $|a_n|$ eine Nullfolge.

3. (*Stetigkeit & Differenzierbarkeit*). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $f(x) = |x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar in $x = 0$

   (b) Hat der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen Knick, so ist f nicht differenzierbar.

   (c) Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat ihr Graph keinen Sprung.

   (d) Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ unstetig, so ist sie dort auch nicht differenzierbar.

4. (*Monotonie.*) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\,x^3.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) f ist überall monoton steigend.

   (b) f ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend, nicht aber auf ganz $\mathbb{R}$.

   (c) $f'(x)$ ist überall positiv.

   (d) f ist überall streng monoton steigend.

5. (*Folgengrenzwerte konkret.*) Welche der folgenden Rechnungen sind korrekt und korrekt aufgeschrieben?

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n^2} = 0.$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \to 0.$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$

   (d) $0 < \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$, also $\dfrac{1}{n^2} \to 0\ (n \to \infty)$.

6. (*Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Argumente begründet korrekt die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad ?$$

(a) Der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergiert gegen $1/2 < 1$ und daher konvergiert die Reihe nach dem Quotiententest absolut.

(b) Es gilt für die Glieder der Reihe $2^n/n! \to 0$ und daher konvergiert die Reihe.

(c) Es gilt $\frac{2}{n+1} \to 0$ und daher konvergiert die Reihe nach dem Quotiententest absolut.

(d) Es gilt $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{n^n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n$ und die Reihe $\sum \left(\frac{2}{n}\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzeltest.

7. (*Funktionsgrenzwerte konkret.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$

   (b) $\lim\limits_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty.$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0.$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$

8. (*Differenzieren, konkret.*) Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \log(\sin(x^2)) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^{\alpha x} \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

   Welche der folgenden Berechnungen von f' bzw. g' sind korrekt?

   (a) $f'(x)) = \frac{1}{\sin(x^2)} \cos(x^2)\, 2x = \frac{2x}{\tan(x^2)}.$

   (b) $f'(x)) = \log'(x)\ \sin(x^2) + \log(x)\ \cos(x^2) 2x = \frac{\sin(x^2)}{x} + 2x\ \log(x) \cos(x^2).$

   (c) $g'(x) = \alpha x^{\alpha x - 1}.$

   (d) $g'(x) = \left(e^{\alpha x \log(x)}\right)' = \left(e^{\alpha x}\, e^{\log(x)}\right)' = \alpha e^{\alpha x} x + e^{\alpha x}\, e^{\log(x)} \frac{1}{x} = e^{\alpha x}(\alpha x + 1).$

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Teilfolge.*) Definieren Sie (exakt) den Begriff einer *Teilfolge* einer reellen Folge $(a_n)_n$ und geben Sie für die Folge

   $$(b_n)_n = (3n)_n = (0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots)$$

   eine Teilfolge an und eine Folge, die *nicht* Teilfoge von $(b_n)_n$ ist. (2 Pkte)

   (b) (*Bolzano-Weierstraß.*) Warum ist die Aussage

   > Jede beschränkte reelle Folge hat eine konvergente Teilfolge

   eine äquivalente Umformulierung des *Satzes von Bolzano-Weierstraß*? (1 Pkt)

   (c) (*Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen.*) Das Konvergenzprinzip für monotone und beschränkte Folgen besagt:

   > Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende reelle Folge konvergiert.

   Formulieren Sie knapp und in eigenen Worten, warum dieses Resultat gilt. Dann erklären Sie den Beweis(verlauf) anhand einer Skizze. (3 Pkte)

2. *Funktionen, Stetigkeit & Differenzierbarkeit*

   (a) (*Stetige und unstetige Funktionen.*) Geben Sie explizit (formal oder durch Zeichnen des Graphen) jeweils eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften auf dem Intervall $[0, 1]$ an (je 1 Pkt):

   (i) Eine unstetige Funktion, die keine Treppenfunktion ist.

   (ii) Eine Funkion, die überall außer im Punkt $x = 1/2$ stetig ist und sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt.

   (b) (*Satz vom Maximum.*) Der Satz vom Maximum besagt:

   > Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt Maximum u. Minimum an.

   Bleibt diese Aussage richtig, wenn $[a, b]$ durch $[a, b)$ ersetzt wird? Genauer, ist in diesem Fall

   (i) f beschränkt, bzw.

   (ii) falls f beschränkt ist, nimmt es dann Maximum und Minimum an?

   Geben Sie entweder ein Argument oder ein Gegenbeispiel an. (je 1 Pkt)

   (c) (*Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.*) Beweisen Sie, dass wenn eine Funktion in einem Punkt differenzierbar ist, sie dort auch schon stetig ist. Erläutern/begründen Sie alle Beweisschritte genau! (4 Pkte)

3. *Differenzieren & Integrieren*

   (a) (*Produktregel.*) Formulieren Sie die Produktregel der Differentialrechnung, *ohne* Verwendung mathematischer Symbole.[1] (2 Pkte)

   (b) (*Waagrechte Tangente.*) Formulieren Sie die notwendige Bedingung für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen. (1 Pkt)

   Erläutern Sie, warum diese Aussage stimmt — und zwar nur für innere Punkte. (3 Pkte)

   (c) (*Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnunng.*) Formulieren Sie (exakt!) den ersten Teil des Hauptsatzes. (1 Pkt)

   Beschreiben Sie den Beweisverlauf mit einem Satz und geben Sie dann eine Beweisskizze (3 Pkte).

[1] Also insbesondere *ohne* für die beteiligten Funktionen eine Bezeichnung, wie etwa f und g zu verwenden.