Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022, 1. Termin, 4.7.2022, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Für eine reelle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls
   (a) [true] in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.
   (b) [**true**] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (c) [false] fast alle Folgenglieder a_n liegen in einer ε-Umgebung von a.
   (d) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. (*Zum Begriff des Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von $(a_n)_n$, falls
   (a) [true] außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen.
   (b) [true] innerhalb jeder ε-Umgebung von a unendlich viele a_n liegen.
   (c) [true] es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n) gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
   (d) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N\colon \quad |a - a_n| < \varepsilon$.

3. (*Cauchy-Folge.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine reelle Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, falls
   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N: \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon$.
   (b) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.
   (c) [true] jede Teilfoge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ konvergiert
   (d) [true] $\forall k > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N: \quad |a_m - a_n| < 1/k$.

4. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
   (a) [false] $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   (b) [false] es eine reelle Folge (x_n) mit $x_n \to a$ gibt, für die schon $f(x_n) \to f(a)$ gilt.
   (c) [false] $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   (d) [true] es zu jeder (noch so kleinen) „Toleranz“ ε ein „Sicherheitsintervall“ $U_\delta(a)$ gibt, sodass alle $x \in U_\delta(a)$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden (d.h. $f(x)$ in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt).

5. (*Stetige Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist in $x = 0$ unstetig.
   (b) [true] Die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
   (c) [false] Die Funktion $f: [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$
   $$f(x) = \begin{cases} -1 & (-2 \leq x \leq -1) \\ 1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$
   ist unstetig.
   (d) [false] Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ ist stetig in $x = 0$, weil $\lim_{x\to 0+} 1/x^2 = \infty = \lim_{x\to 0-} 1/x^2$

6. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist im Punkt ξ im Intervall I differenzierbar, falls
   (a) [true] der Differenzenquotient von f bei ξ einen endlichen Limes für $x \to \xi$ besitzt.

(b) [true] $\lim\limits_{\xi\neq x\to\xi}\dfrac{f(\xi)-f(x)}{x-\xi}$ existiert und endlich ist.

(c) [true] $\lim\limits_{0\neq h\to 0}\dfrac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist.

(d) [false] f auf $I\setminus\{\xi\}$ differenzierbar ist und $\lim_{x\searrow\xi} f'(x)=\lim_{x\nearrow\xi} f'(x)$ gilt.

7. (*Differenzierbarkeit, strukturell.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Potenzfunktionen der Form $f(x)=x^k$ für $k\in\mathbb{N}$ sind (überall) nach der Produktregel differenzierbar, weil sie ein $k-$faches Produkt der differenzierbaren Funktion $x\mapsto x$ sind.

   (b) [false] Potenzfunktionen der Form $f(x)=x^\alpha$ für $x>0$ und $\alpha\in\mathbb{R}$ sind (überall) nach der Produktregel differenzierbar, weil sie ein iteriertes Produkt der differenzierbaren Funktion $x\mapsto x$ sind.

   (c) [true] Potenzfunktionen der Form $f(x)=x^\alpha$ für $x>0$ und $\alpha\in\mathbb{R}$ sind wegen $x^\alpha=e^{\alpha\log(x)}$ (überall) nach Ketten- und Produktregel differenzierbar weil $\exp$ und $\log$ differenzierbar sind.

   (d) [true] Die Ableitung der Wurzelfunktion $f(x)=\sqrt{x}$ kann für alle $x>0$ wie folgt mit der Produktregel berechnet werden

$$1=x'=(\sqrt{x}\,\sqrt{x})'=2\sqrt{x}\,(\sqrt{x})' \quad\Rightarrow (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

8. (*Stammfunktion.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $F:I\to\mathbb{R}$ (mit I einem Intervall) ist Stammfunktion einer Funktion $f:I\to\mathbb{R}$, falls

   (a) [false] F differenzierbar und $f'=F$ auf ganz I gilt.

   (b) [**false**] F gegeben ist durch $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ mit $a\in I$ beliebig.

   (c) [false] $F'=f+c$ gilt, für ein $c\in\mathbb{R}$.

   (d) [true] $G=F+7$ auch eine Stammfunktion von f ist.

2 Sätze & Resultate

1. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

   (b) [true] Jede streng monotone und beschränkte Folge konvergiert.

   (c) [true] Es gibt beschränkte nicht monotone Folgen, die konvergieren.

   (d) [false] Es gibt unbeschränkte, nicht monotone Folgen, die konvergieren.

2. (*Zur Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ sind korrekt?

   (a) [true] Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

   (b) [true] Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n$, dann ist a_n eine Nullfolge.

   (c) [false] $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $s_m=\sum_{n=0}^m a_n$ beschränkt ist.

   (d) [true] $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $s_m=\sum_{n=0}^m a_n$ beschränkt und monoton ist.

3. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert wortwörtlich auch für Folgen *offener*, beschränkter Intervalle.

   (b) [true] Jede reelle Zahl der Form $\sqrt{a}$ für $a>0$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

   (c) [true] Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

   (d) [true] Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ konvergiert (als Folge in $\mathbb{R}$) aber ihr Limes muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

4. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Stetige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen sind beschränkt

(b) [false] Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.

(c) [true] Ist f stetig auf $[a, b]$, so ist $f([a, b])$ wieder ein Intervall oder besteht nur aus einem Punkt.

(d) [**false**] Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) > 0$ so gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) > 1/2$ für alle $x \in U_\delta(0)$.

5. (*Winkelfunktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$.

   (b) [true] $|e^{ix}| = 1$ und daher $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

   (c) [false] $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$.

   (d) [true] $\lim_{0 \neq x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

6. (*Mittelwertsatz.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

   (a) [false] Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ sodass f in ξ differenzierbar ist und $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ gilt.

   (b) [true] Ist f zusätzlich auf $[a, b]$ differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

   (c) [true] Ist f zusätzlich auf (a, b) differenzierbar, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

   (d) [false] Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt in (a, b), in dem die Ableitung von f verschwindet.

7. (*Extrema.*) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   (a) [false] f hat ein globales Maximum und ein globales Minimum.

   (b) [true] Hat f im Punkt ξ ein lokales Minimum, dann gilt schon $f'(\xi) = 0$.

   (c) [**false**] Gibt es einen Punkt ξ mit $f(\xi) = 0$ und ist f in ξ zweimal differenzierbar mit $f''(\xi) > 0$ dann hat f in ξ ein lokales Minimum.

   (d) [true] Falls f im Punkt ξ ein striktes lokales Minimum hat, dann gibt es ein $\delta > 0$ sodass f streng monoton fallend auf $(\xi - \delta, \xi)$ und streng monoton steigend auf $(\xi, \xi + \delta)$ ist.

8. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Die erste Aussage des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung kann geschrieben werden als

   (a) [false] $\frac{d}{dt} \int_a^b f(t)dt = f(x)$.

   (b) [true] $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dx = f(t)$.

   (c) [true] $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

   (d) [false] $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x)dx = f(x)$.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

1. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

   (a) [false] $\left(\frac{n}{n!}\right)_{n \geq 1}$ ist unbeschränkt.

   (b) [false] $\frac{(-1)^n\ n}{n^2}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

   (c) [true] $\frac{2n^2 + n}{n^2 + 7}$ ist eine Cauchy-Folge.

   (d) [false] Falls für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ gilt, dass $a_n \leq b_n$ für alle n und $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, dann ist auch (a_n) eine Nullfolge.

2. (*Konvergenz & absolute Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut.

   (b) [false] Absolut konvergente Reihen haben nur positive Glieder.

   (c) [true] Eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 10^6$ konvergiert absolut.

   (d) [true] Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann ist $|a_n|$ eine Nullfolge.

3. (*Stetigkeit & Differenzierbarkeit*). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $f(x) = |x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar in $x = 0$

   (b) [true] Hat der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen Knick, so ist f nicht differenzierbar.

   (c) [true] Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat ihr Graph keinen Sprung.

   (d) [**true**] Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ unstetig, so ist sie dort auch nicht differenzierbar.

4. (*Monotonie.*) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\,x^3.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] f ist überall monoton steigend.

   (b) [false] f ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend, nicht aber auf ganz $\mathbb{R}$.

   (c) [false] $f'(x)$ ist überall positiv.

   (d) [true] f ist überall streng monoton steigend.

5. (*Folgengrenzwerte konkret.*) Welche der folgenden Rechnungen sind korrekt und korrekt aufgeschrieben?

   (a) [false] $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n^2} = 0.$

   (b) [false] $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0.$

   (c) [true] $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$

   (d) [true] $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$, also $\frac{1}{n^2} \to 0$ $(n \to \infty)$.

6. (*Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Argumente begründet korrekt die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad ?$$

   (a) [false] Der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergiert gegen $1/2 < 1$ und daher konvergiert die Reihe nach dem Quotiententest absolut.

   (b) [false] Es gilt für die Glieder der Reihe $2^n/n! \to 0$ und daher konvergiert die Reihe.

   (c) [true] Es gilt $\frac{2}{n+1} \to 0$ und daher konvergiert die Reihe nach dem Quotiententest absolut.

   (d) [false] Es gilt $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{n^n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n$ und die Reihe $\sum \left(\frac{2}{n}\right)^n$ konvergiert absolut nach dem Wurzeltest.

7. (*Funktionsgrenzwerte konkret.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$

   (b) [true] $\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty.$

   (c) [true] $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0.$

(d) [false] $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

8. (*Differenzieren, konkret.*) Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \log(\sin(x^2)) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^{\alpha x} \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Welche der folgenden Berechnungen von f' bzw. g' sind korrekt?

(a) [true] $f'(x)) = \dfrac{1}{\sin(x^2)} \cos(x^2)\, 2x = \dfrac{2x}{\tan(x^2)}$.

(b) [false] $f'(x)) = \log'(x) \sin(x^2) + \log(x) \cos(x^2) 2x = \dfrac{\sin(x^2)}{x} + 2x \log(x) \cos(x^2)$.

(c) [false] $g'(x) = \alpha x^{\alpha x - 1}$.

(d) [false] $g'(x) = \left(e^{\alpha x \log(x)}\right)' = \left(e^{\alpha x}\, e^{\log(x)}\right)' = \alpha e^{\alpha x} x + e^{\alpha x}\, e^{\log(x)} \dfrac{1}{x} = e^{\alpha x}(\alpha x + 1)$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 (a) Sei $(a_n)_n$ reelle Folge und $(n_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n_k < n_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$, dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_k = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

Teilfolge der Folge $(a_n)_n$.

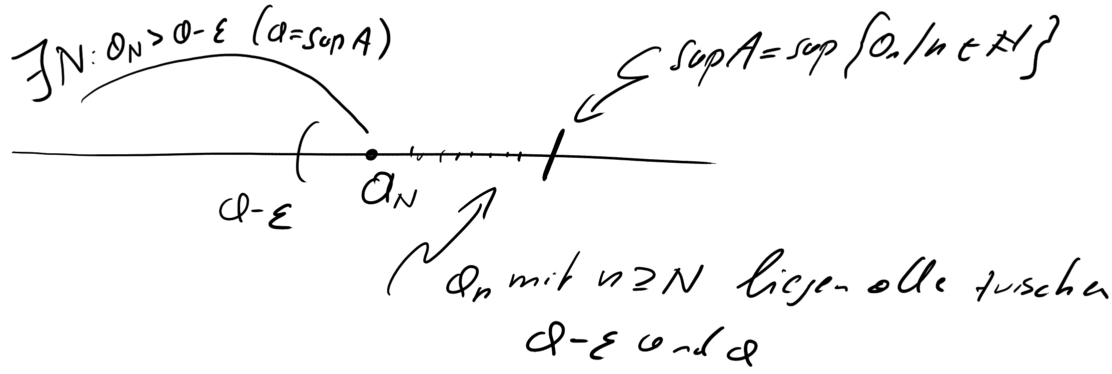
$b_n = (3n)_n = (0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots)$

Teilfolge $\quad c_n = (6n)_n = (0, 6, 12, 18, \dots)$ [d.h. $n_k = 2k$]

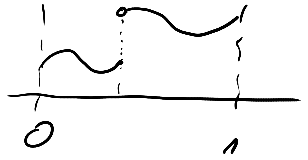
keine TF $\quad d_n = (0, 3, 9, 6, 15, 12, \dots)$ [Reihenfolge stimmt nicht]

(b) Per definitionem ist jeder Häufungspunkt einer Folge Grenzwert einer Teilfolge. Daher ist der Satz von Bolzano-Weierstraß in seiner „Originalformulierung" (Jede beschränkte reelle Folge hat einen HW) äquivalent zur angegebenen Formulierung.

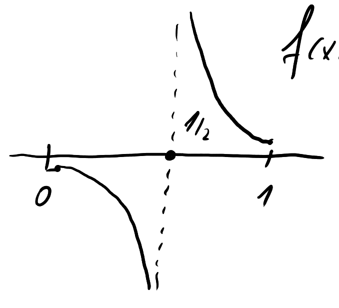
(c) Die Monotonie quetscht die Folgenglieder gegen das Supremum.



2 (a) (i)

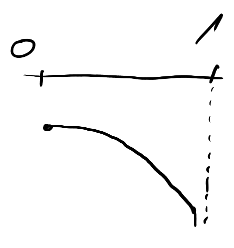


(ii)

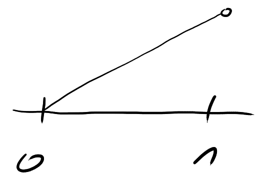


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 1/2} & x \neq 1/2 \\ 0 & x = 1/2 \end{cases}$$

(b) (i) Nein, denn z.B. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ist stetig auf $[0,1)$ aber unbeschränkt.



[2] (b) (ii) Nein, $f(x) = x$ auf $[0,1)$ ist beschränkt, hat aber kein Maximum



[2] (c) zz: $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I \Rightarrow f$ stetig in ξ

Sei $x \neq \xi$, $x \in I$. Wir zeigen dass $f(x) \to f(\xi)$ gilt.
Daraus folgt dann schon, dass f stetig in ξ ist.
Es gilt

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} (x - \xi) \longrightarrow f'(\xi) \cdot 0 = 0$$

Trick 17

Differenzenquotient

f diffbar in ξ: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \to f'(\xi)$

GW des Produkts ist Produkt der GW

$\square$

[3] (a) <u>Produktregel</u>: Das Produkt zweier (in einem Pkt) differenzierbaren Funktionen ist (dort) ebenfalls differenzierbar. Die Ableitung des Produkts erhält man als Summe von 2 Termen in denen jeweils ein Faktor des Produkts differenziert ist und der andere nicht.

[3] (b) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $\xi \in I$ ein <u>innerer</u> Punkt. Falls f in ξ ein lokales Extremum hat, dann gilt $f'(\xi) = 0$

<u>Erläuterung</u>: Hat f in ξ ein lokales Maximum (Min analog), dann gilt für alle x nahe ξ, dass $f(x) \leq f(\xi)$.
Betrachten wir für solche x den Differenzenquotienten von f bei ξ
So gilt

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(\xi)}^{\leq 0}}{x - \xi} \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } x < \xi \\ \leq 0 & \text{falls } x > \xi \end{cases} \qquad (*)$$

Weil f in ξ diffbar ist hat der Differenzenquotient einen Limes und der muß daher gleich 0 sein! D
Wäre ξ <u>nicht innerer</u> Punkt, kann man so nicht schließen, weil dann in $(*)$ nur eine Zeile auftritt.

$\boxed{3}$ (c) HS DI – Teil 1: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$ beliebig.

Dann ist die Funktion
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in I)$$
stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$. (D.h. F ist Stammfkt von f)

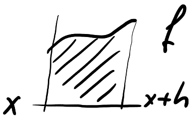
Beweisverlauf: Wir berechnen den Differenzenquotienten von F bei x und sehen, dass er gegen $f(x)$ konvergiert bzw. in der Beweisskizze, dass er nahe $f(x)$ ist.

Beweisskizze:

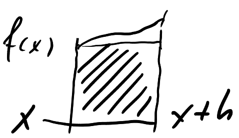
Eigenschaft des Integrals

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \overset{\text{Def } F}{=} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

$=$



$/\,h \approx$



$/\,h = \dfrac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$

Für kleine h entspricht die Fläche unter f c.a. der Rechtecksfläche $f(x)\cdot h$

Dieses Argument kann mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung exakt gemacht werden.

Also ergibt sich $F'(x) \approx f(x)$.