Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022, 3. Termin, 19.12.2022, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. *(Zum Begriff des Häufungswerts.)* Welche Aussagen sind korrekt?
   Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls
   (a) [true] a Grenzwert einer Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ ist.
   (b) [false] innerhalb einer ε-Umgebung von a unendlich viele a_n liegen.
   (c) [true] innerhalb jeder ε-Umgebung von a jedes zweite a_n liegt (also z.B. alle a_{2k} für $k \in \mathbb{N}$).
   (d) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N\colon \quad |a - a_n| < \varepsilon$.
2. *(Grenzwert vs. Häufungswert.)* Welche Aussagen sind korrekt?
   Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und sei $a \in \mathbb{R}$.
   (a) [true] Wenn a Grenzwert von (a_n) ist, dann auch Häufungswert.
   (b) [true] Hat (a_n) zwei verschiedene Häufunsgwerte dann divergiert sie.
   (c) [false] Hat (a_n) genau einen Häufungswert, dann konvergiert sie.
   (d) [false] Ist a Häufungswert und (a_n) beschränkt, dann ist a auch Grenzwert.
3. (*Absolute Konvergenz von Reihen.*) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
   (b) [false] Falls $|a_k| \to 0$ $(n \to \infty)$, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
   (c) [true] Falls $a_k \geq 0$ für alle k und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
   (d) [false] Falls unendlich viele a_k negativ sind, dann kann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergieren.
4. *(b-adische Entwicklung.)* Welche Aussagen sind korrekt? Bei einer b-adischen Entwicklung $a = \pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n b^{-n}$ einer beliebigen reellen Zahl a gilt:
   (a) [true] Die Ziffern a_n können alle Werte $0, 1, \ldots, b-1$ annehmen.
   (b) [false] Die Summe beginnt immer bei einem $N \in \mathbb{N}$ zu laufen.
   (c) [false] Als Basis kommen nur ganze Zahlen $b > 2$ in Frage.
   (d) [true] Bei der Dezimaldarstellung (d.h. $b = 10$) einer Zahl a mit $|a| > 10$ muss N negativ sein.
5. *((Un-)Stetigkeit.)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *nicht* stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls
   (a) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.
   (b) [true] es eine reelle Folge $a_n \to a$ gibt mit $f(a_n) \not\to f(a)$.
   (c) [true] falls f bei a eine Sprungstelle hat.
   (d) [true] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < \delta$ mit $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.
6. *(Gleichmäßige Stetigkeit.)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *gleichmäßig* stetig auf $\mathbb{R}$, falls
   (a) [true] in der ε-δ-Definition δ nicht von den betrachteten Punkten x, $x' \in \mathbb{R}$ abhängt.
   (b) [false] für jedes $x \in \mathbb{R}$ und für jede reeelle Folge $x_n \to x$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x)$.
   (c) [false] für jede Cauchyfolge x_n in $\mathbb{R}$ gilt, dass $f(x_n)$ ebenfalls Cauchyfolge ist.
   (d) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
7. (*Elementar transzendente Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Für die Exponentialfunktion gilt $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x!} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

(b) [false] Die Logarithmusfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert als die Umkehrfunktion von $\exp$.

(c) [true] Für die Cosinusfunktion gilt ($x \in \mathbb{R}$)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

(d) [false] Die allgemeine Exponentialfunktion ist definiert als ($a > 0$ $x \in \mathbb{R}$) $\exp_a(x) = a^x = \exp(a \log(x))$.

8. (*Stammfunktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) ist Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, falls

   (a) [true] F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

   (b) [true] f stetig ist und $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ (mit $a \in I$ beliebig).

   (c) [false] G Stammfunktion von f ist und $F = G \cdot c$ für eine Konstante c gilt.

   (d) [false] gilt, dass $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

2 Sätze & Resultate

9. *(Beschränktheit & Konvergenz von Folgen).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [true] Es gibt beschränkte Folgen die nicht konvergieren.

   (b) [false] Jede beschränkte Folge hat genau einen Häufungswert.

   (c) [false] Es gibt monoton wachsende nach oben beschränkte Folgen, die nicht beschränkt sind.

   (d) [true] Jede nach unten beschränkte, monoton fallende Folge konvergiert gegen ihr Infimum.

10. *(Grenzwertsätze strukturell).* Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen und deren Konvergenz sind korrekt?

    (a) [true] Der Grenzwert konvergenter Folgen respektiert die $\leq$-Beziehung.

    (b) [true] Eine Linearkombination konvergenter Folgen konvergiert gegen die Linearkombination der Grenzwerte.

    (c) [false] Der Quotient zweier konvergenter Folgen konvergiert nur dann gegen den Quotienten der Grenzwerte, falls die Folge (b_n) im Nenner niemals Null wird (d.h. $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

    (d) [false] Der Grenzwert konvergenter Folgen respektiert die $<$-Beziehung.

11. (*Zur Vollständigkeit.*) Welche der folgenden Aussagen beruhen auf der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (in dem Sinn, dass sie in ihren Beweis eingeht)?

    (a) [false] Jede konvergente (reelle) Folge ist eine Cauchyfolge.

    (b) [true] Jede absolut konvergente (reelle) Reihe konvergiert.

    (c) [true] Jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall, die am linken Randpunkt negativ und am rechten positiv ist, hat eine Nullstelle.

    (d) [false] Jede beschränkte (reelle) Folge konvergiert.

12. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen sind korrekt?

    (a) [false] Ist $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

    (b) [true] Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch beschränkt.

    (c) [false] Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.

    (d) [true] Ist f stetig und es gilt $f(0) < 0$, dann gibt es eine Umgebung $U = (-\delta, \delta)$ (mit einem $\delta > 0$) sodass $f(x) < 0$ für alle $x \in U$.

13. (*Differenzierbarkeit.*) Welche der folgenden Aussagen über Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) [true] Falls f und g in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind, dann auch $f + g$ und $f \cdot g$.

(b) [true] f ist differenzierbar in einem Punkt $\xi \in \mathbb{R}$, falls es eine Zahl a gibt und eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(\xi + h) - f(\xi) = ah + r(h) \quad \text{und} \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

(c) [true] Falls f stetig differenzierbar in $\xi \in \mathbb{R}$ ist, dann ist f dort auch differenzierbar.

(d) [false] Falls f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist mit auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetiger Ableitung f', dann ist f schon auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

14. (*Extremwerte.*) Welche Aussagen für eine 2-mal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $\xi \in (a, b)$ sind korrekt?

(a) [false] Falls $f'(\xi) = 0$, dann hat f in ξ eine Extremstelle.

(b) [false] Falls f an der Stelle ξ einen Hochpunkt hat, dann gilt $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$.

(c) [true] Falls f an der Stelle ξ ein Extremum hat, dann gilt $f'(\xi) = 0$.

(d) [true] Falls $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) \neq 0$, dann hat f in ξ eine Extremstelle.

15. (*Zur Integralrechnung.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Mit integrierbar ist immer Riemann-integrierbar gemeint.)

(a) [false] Der MWS der Integralrechnung besagt, dass für integrierbares $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein $\xi \in [a, b]$ existiert, sodass die Fläche unter dem Graphen von f zwischen a und b gleich der Rechtecksfläche $f(\xi)\,(b - a)$ ist.

(b) [true] Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch integrierbar.

(c) [false] Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist f auch integrierbar.

(d) [false] Für integrierbare $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt, dass das Integral von a nach b über den Betrag $|f|$ von f durch den Betrag des Integrals nach oben beschränkt ist.

16. (*Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Differenz zweier beliebiger Stammfunktionen von f ist konstant.

(b) [true] Für $F(x) := \displaystyle\int_b^x f(t)\,dt$ gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

(c) [false] Für jede Stammfunktion F von f gilt $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

(d) [false] Es gilt $\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

17. (*Konvergenz.*) Welche der Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) [true] Es gibt unbeschränkte Folgen mit genau einem Häufungswert.

(b) [false] Es gibt monotone beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

(c) [false] Jede Folge mit genau einem Häufungswert ist schon konvergent.

(d) [true] Es gibt konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k < 0$ für alle k.

18. (*Konvergenz, 2*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 1$ $(n \to \infty)$.

(b) [false] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut

(c) [false] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konv. absolut.

(d) [true] $(1/n)_{n>0}$ ist nach dem Archimedischen Axiom eine Nullfolge.

19. *(Exponential- und Logarithmusfunktion).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $f(x) = \exp(-x)$ ist nach oben beschränkt

(b) [true] $\log$ ist auf seinem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.

(c) [false] $f(x) = \exp(-x)$ ist monoton wachsend.

(d) [true] $\lim_{x \searrow 0} x \log(x) = 0$.

20. (*Polynomfunktion.*) Welche der Aussagen trifft auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^4 \quad \text{zu?}$$

(a) [true] f ist auf dem Intervall $[-5, 5]$ beschränkt.

(b) [false] f hat in $x = 0$ ein Minumum.

(c) [false] f hat in $x = 0$ ein Maximum, weil $f'(0) = 0$ und $f''(0) \geq 0$ gilt.

(d) [false] f hat in $x = 0$ einen Wendepunkt, weil $f''(0) = 0$ gilt.

21. (*Wurzelfunktion.*) Welche der Aussagen trifft auf die Wurzelfunktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{zu?}$$

(a) [true] f ist überall stetig.

(b) [true] f auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig.

(c) [false] f ist auf $[0, \infty)$ differenzierbar

(d) [true] $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(0) = \infty$.

22. (*Funktionsgrenzwerte.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan(x) = \pi/2$.

(b) [true] $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

(c) [true] $\lim\limits_{x \searrow 0} \log(x) = -\infty$.

(d) [false] $\lim\limits_{0 \neq x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

23. (*Monotonie und Ableitung.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$ ist streng monoton steigend, obwohl $f'(0) = 0$ gilt.

(b) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist auf $[-10, 0]$ streng monoton fallend, weil $f'(x) = -1 < 0$ für alle $-10 < x < 0$ gilt.

(c) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist auf $[-10, 0]$ streng monoton fallend und daher gilt $f'(x) = -1 < 0$ für alle $-10 \leq x \leq 0$.

(d) [false] Für die Funktion $f(x) = 1/x$ gilt auf ihrem ganzen (maximal möglichen) Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass $f'(x) = -1/x^2 < 0$ ist. Daher ist sie auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ monoton fallend.

24. (*Integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\sin$ und $\cos$ sind stetig und daher auf jedem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar

(b) [false] $\sin$ ist auf $[0, \pi]$ monoton wachsend und daher dort auch Riemann-integrierbar

(c) [false] Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar.

(d) [true] Es gilt $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < \infty$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Reihen und -konvergenz.*) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (relle) Folge. Definieren Sie (exakt) den Begriff der (unendlichen) Reihe mit Gliedern a_n sowie der Konvergenz von Reihen. (3 Pkte)

   (b) (*Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen.*) Beweisen Sie (exakt), dass jede konvergente (reelle) Folge eine Cauchyfolge ist. (3 Pkte)

   (c) (*Eindeutigkeit des Grenzwerts.*) Argumentieren Sie in eigenen Worten, warum jede konvergente (reelle) Folge genau einen Grenzwert hat. Fertigen Sie eine Skizze an. (3 Pkte)

2. *Stetige und differenzierbare Funktionen*

   (a) (*Sprünge machen unstetig.*) Argumentieren Sie, dass die Sprungfunktion

   $$H(x) \ := \ \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

   unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist. Verwenden Sie dabei entweder die ε-δ-Definition der Stetigkeit (Umgebungsstetigkeit) oder ihrer äquivalente Umformulierung mittels konvergenter Folgen (Folgenstetigkeit). Fertigen Sie eine Skizze an. (3 Pkte)

   (b) (*Ableitung der Umkehrfunktion.*) Sei $f : I \to J$ eine bijektive und differenzierbare Funktion von einem Intervall I in ein Intervall J. Unter der Annahme, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ (ebenfalls) differenzierbar ist, berechnen Sie die Ableitung $(f^{-1})'$. (3 Pkte)

3. *Differenzieren & Integrieren*

   (a) (*Mittelwertsatz der Differentialrechung*) Formulieren Sie exakt den Mittelwertsatz der Differentialrechung und erläutern Sie seine Aussage in eigenen Worten. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. (3 Pkte)

   (b) (*Monotonie via Ableitung*) Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechung, um zu zeigen, dass für Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllen, folgendes gilt: (3 Pkte)

   $$f'(x) > 0 \text{ auf } (a, b) \implies f \text{ streng monoton wachsend auf } [a, b]$$

   (c) (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — zweiter Teil.*) Formulieren Sie (exakt) den zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und erklären Sie, was dieses Resultat mit dem konkreten Berechnen von Integralen zu tun hat. (3 Pkte)

Teil 2: Offene Aufgaben

[1] (a) Die Reihe mit Gliedern a_n ist definiert als die Folge der Partialsummen $(s_m)_m$ mit $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ [und sie wird mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum a_n$ bezeichnet].

Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert, falls die Folge der Partialsummen $(s_m)_m$ konvergiert. [und wir bezeichnen diesen Limes, $\lim_{m\to\infty} s_m$, ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw $\sum a_n$].

(b) Sei (a_n) konvergent; z.z. (a_n) CF, d.h.

z.z. $\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n\ge N: |a_n-a_m|<\varepsilon$

Sei also $\underset{\sim}{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}$ und

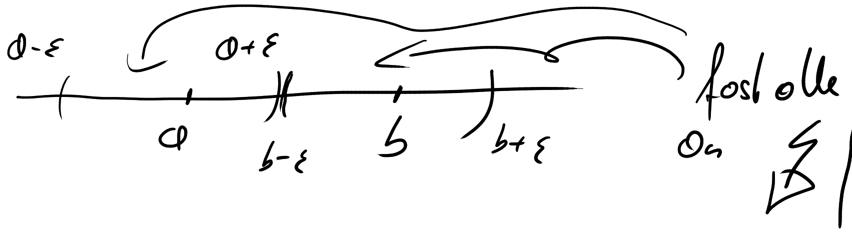
sei $a=\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{Konv.}}{\Longrightarrow} \exists N\in\mathbb{N}: |a_n-a|<\varepsilon/2 \quad \forall n\ge N$

Dann gilt $\forall m,n\ge N$

$$|a_n-a_m| = |a_n-a+a-a_m| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\le} |a_n-a|+|a_m-a| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad \square$$

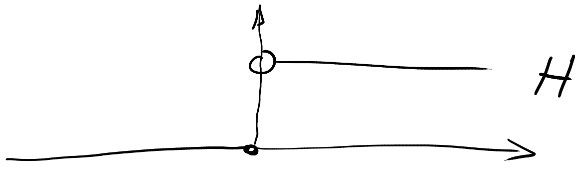
(c) Zu argumentieren: Falls $a_n\to a$, dann ist a eindeutig bestimmt.

Angenommen a_n habe zwei verschiedene Grenzwerte a und b. Dann liegen in jeder ε_1-Umgebung von a fast alle Folgenglieder. Ebenso liegen in jeder ε_2-Umgebung von b —— " ——. Wähle ich diese beiden Umgebungen disjunkt (das ist möglich, weil $a\neq b$; wähle z.B. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{|b-a|}{2}$), so ergibt das einen



Widerspruch, weil z.B. außerhalb von $U_{\varepsilon_1}(a)$, die insbes. in $U_{\varepsilon_2}(b)$ nur endlich viele a_n liegen können. $\square$

2 (a) $H(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$



zu argumentieren: H unstetig in $x_0 = 0$:

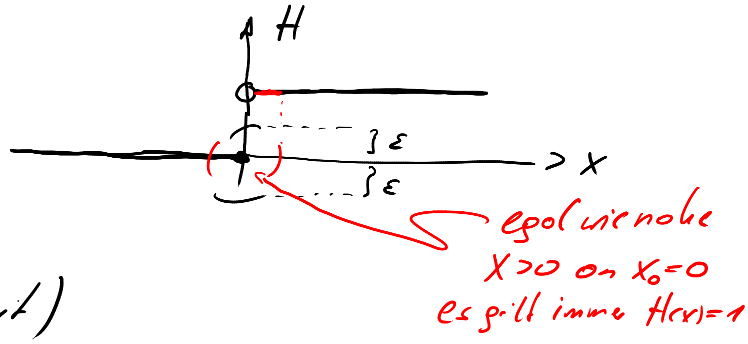
Variante 1 (mit Umgebungsstetigkeit)

Vorüberlegung: H stetig in $x_0 :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x: |x| < \delta \Rightarrow |H(x)| < \varepsilon$

also ist zz: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x: |x| < \delta$ aber $|H(x)| > \varepsilon$

Man muss also nur $\varepsilon < 1$ wählen, also z.B. $\varepsilon = 1/2$.

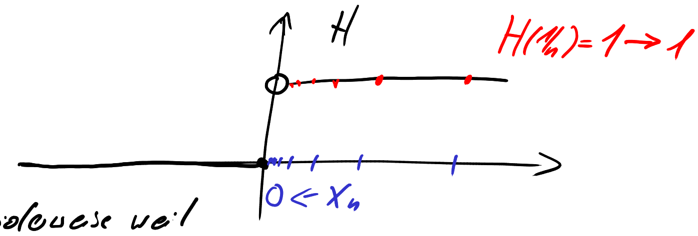
Dann ist, egal wie nahe x an $x_0 = 0$ liegt, wenn es nur positiv ist, um $H(x) = 1 > 1/2$ zu erreichen



Variante 2 (mit Folgenstetigkeit)

Vorüberlegung: H stetig in $x_0 = 0 \Longleftrightarrow \forall (x_n)$ mit $x_n \to 0 \Rightarrow H(x_n) \to H(0) = 0$

Also muß man nur eine Folge finden mit $x_n \to 0$ aber $H(x_n) \not\to 0$.
Da kann man jede Folge nehmen, die von oben gegen 0 konvergiert, z.B. $x_n = 1/n$, denn dann gilt $x_n \to 0$ aber



$H(x_n) = H(\underset{>0!}{1/n}) = 1 \to 1$ trivialerweise weil konstante Folge

(b) $f: I \to J$ bijektiv & diffbar, $f^{-1}: J \to I$ auch diffbar.

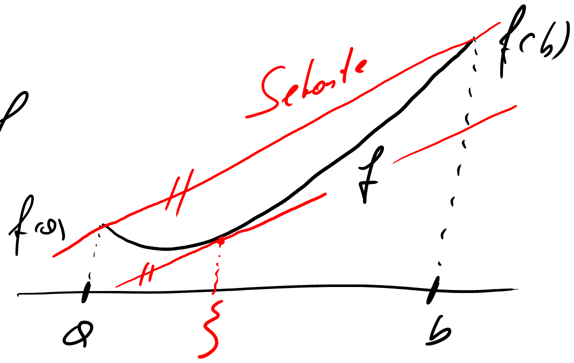
$$1 = id'(\xi) = (f^{-1} \circ f)'(\xi) = (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \Rightarrow (f^{-1})'(f(\xi)) = \frac{1}{f'(\xi)}$$

bzw mit $\eta = f(\xi)$: $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(f^{-1}(\eta))$.

[3] (a) MWS: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b).

Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Die Aussage des MWS ist es, dass es eine Stelle ξ gibt, an der der die Tangente an f genau den Anstieg der Sekante zw. den Endpunkten hat.



(b) Bz: f wie oben, dann gilt

$$f'(x)>0 \text{ auf } (a,b) \Rightarrow f \text{ str. mon. steigend auf } [a,b]$$

Beweis: Ang nicht, d.h. f nicht str. mon. steigend, d.h.

$\exists x_1,x_2\in[a,b]$ mit $x_1<x_2$ aber $f(x_1)\geq f(x_2)$

$$\overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists \xi\in(x_1,x_2) \text{ mit } f'(\xi)=\frac{\overbrace{f(x_2)-f(x_1)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}\leq 0 \quad ↯ \quad \square$$

(c) Der 2. Teil des HsDI lautet für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a), \text{ mit } F \text{ bel. Stammfkt von } f.$$

Die Bedeutung dieser Aussage ist sehr wichtig fürs explizite Integrieren – sie macht es zu großen Teilen erst möglich. Das Integral, das davor nur über Unter- bzw Oberintegrale/summen definiert war, kann berechnet werden, indem man die Differenz einer beliebigen Stammfunktion an den Integralgrenzen bildet. [Eine solche erhält man mittels Resultaten der Differentialrechnung ...]