AUFGABENSAMMLUNG

Übungen zur

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23

Roland Steinbauer
Universität Wien, Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien

Sonja Kramer
KPH Wien/Krems
Dr. Gschmeidlerstraße 28
A-3500 Krems

Blatt 1: Einleitung: Was soll und was will die (Schul-)Analysis

1 **Analysis' Top-Three[1].** Ziel dieser Aufgabe ist es, in den folgenden Kategorien Ranglisten (Platz 1–3) in Bezug auf die Inhalte Ihrer Fachausbildung in Analysis zu erstellen und zu begründen. Dabei können inhaltliche und ästhetische Argumente oder auch Argumente aus der individuellen Lerngeschichte gewählt werden.

a) Wichtige Begriffe/Definitionen
b) Wichtige Resultate/Beweise
c) Unsympathische Begriffe/Definitionen
d) Unsympathische Resultate/Beweise
e) Überraschungen

In den Übungen soll dann versucht werden in einer „Plenardiskussion" auf eine konsensuale Gesamtwertung zu kommen.

2 **Schulanalysis.** Reflektieren Sie Ihre schulischen Erfahrungen mit der Analysis und bereiten Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen vor:

a) Welche analytischen Begriffe standen im Zentrum?
b) Welche Ziele verfolgte Ihre Schulanalysis? Wurden diese transparent gemacht?

3 **Schulanalysis vs. Fachvorlesung.** Reflektieren Sie Ihre Schulerfahrungen und die aus Ihrer Fachausbildung in Analysis und bereiten Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen vor:

a) Welche begrifflichen Unterschiede haben Sie am stärksten erlebt?
b) Welche methodischen Unterschiede haben Sie am stärksten erlebt?

4 **Was ist Analysis?** Reflektieren Sie Ihre schulischen Erfahrungen und die aus Ihrer Fachausbildung in Analysis und bereiten Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen vor:

a) Wie hätten Sie nach der Matura auf die Frage „Was ist Analysis?" geantwortet?
b) Wie hätten Sie nach ihrer Fachvorlesung bzw. nach der Prüfungsvorbereitung auf die Frage „Was ist Analysis?" geantwortet?
c) Enthält die Diskussion in Kapitel 1.1 der Vorlesung für Sie neue bzw. überraschende Aspekte? Welche?

[1] In Anlehnung an Rob's Top-Five Split-Ups, ect. in „High Fidelity" von Nick Hornby, sihe `https://de.wikipedia.org/wiki/High_Fidelity_(Roman)`

Blatt 2: Fachdidaktischer Bezugsrahmen/Funktionsbegriff

5 **Zwischenwertsatz: nicht auf $\mathbb{Q}$!** In dieser Aufgabe soll genauer untersucht werden, warum der Nullstellen-/Zwischenwertsatz der Analysis gilt, welche Voraussetzungen wesentlich sind und was das mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen zu tun hat. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

a) Geben Sie eine exakte Formulierung des Nullstellensatzes, vgl. Thm. 2.2.3 der „Analysis für das Lehramt" vom Sommersemester.

b) Werden die Voraussetzungen (1) Stetigkeit der Funktion und (2) Vollständigkeit des Definitionsbereichs wirklich benötigt? Warum (nicht)? Wo im Beweis gehen diese Voraussetzungen evtl. ein?

c) Geben Sie eine schüler/innengerechte Erklärung des Sachverhalts, evtl. unter Verwendung des Beispiels 2.2.1 aus der Vorlesung.

6 **Stetigkeit in verschiedenen Gewändern.** Ziel dieser Aufgabe ist es den Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen zu reflektieren. Bearbeiten Sie die folgenden Punkte:

a) Formulieren Sie den Begriff der Umgebungsstetigkeit, d.h. formulieren Sie die ε-δ-Definition für die Stetigkeit.

b) Geben Sie eine verbale Formulierung dieser Definition.

c) Was stellen Sie sich unter einer stetigen Funktion vor? Was wäre eine adäquate Vorstellung für Schüler/innen etwa in der 7. Klasse?

d) Was ist an dieser Vorstellung problematisch: „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph keine Sprünge hat"?

e) Was ist an dieser Vorstellung problematisch: „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph ohne abzusetzen durchgezeichnet werden kann"?

7 **Was ist hier passiert?** Arbeiten sie Beispiel 2.2.4 aus der Vorlesung aus. Genauer, betrachten Sie die folgenden beiden Wege eine Stammfunktion für $\sin(2x)$ zu berechnen :

a) $\displaystyle\int \sin(2x)dx = \int \sin(z)\,\frac{1}{2}\,dz = -\frac{1}{2}\,\cos(2x)$, wobei $z = 2x$ substituiert wurde.

b) $\displaystyle\int \sin(2x)dx = \int 2\sin(x)\cos(x)dx = \int 2z\cos(x)\frac{dz}{\cos(x)} = \sin^2(x)$, wobei der Doppelwinkelsatz und die Substitution $z = \sin(x)$ verwendet wurde.

Was ist hier passiert? Stehen diese beiden Rechnungen im Widerspruch zueinander? Sind beide richtig? Wie müssen diese Ergebnisse richtig interpretiert werden?

8 **Weltbevölkerung und Getreideproduktion.** Die Entwicklung der Weltbevölkerung für den Zeitraum 1970 bis 2010 kann näherungsweise durch die Funktion

$$w(t) = 3691\,e^{0{,}0156985\,t} \qquad (w(t) \text{ in Millionen, } t \text{ in Jahren seit 1970})$$

beschrieben werden. Die Entwicklung der weltweiten Getreideproduktion in Millionen Tonnen kann im gleichen Zeitraum näherungsweise mit der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$g(t) = 0{,}004\,t^4 – 0{,}281\,t^3 + 6{,}04\,t^2 – 0{,}3\,t + 1193.$$

Formulieren sie je zwei Aufgabenstellungen für den Unterricht, die auf die Vorstellung von (a) Wertepaaren, (b) Änderungsverhalten und (c) das Verhalten der Funktionen im Ganzen fokussieren. Arbeiten Sie jeweils entsprechende Lösungserwartungen aus.

Blatt 3: Funktionsbegriff

9 Parametervariation bei Exponentialfunktionen. Untersuchen Sie (mithilfe von Technologie) wie sich bei den Funktionen

$$f_1(x) = e^{\lambda x}, \quad f_2(x) = e^{\lambda x} + c, \quad f_3(x) = e^{\lambda(x+c)} \quad \text{und} \quad f(x) = e^{\lambda c x}$$

die Variation der Parameter λ und c auf den Graphen der Funktion auswirken. Arbeiten Sie mit entsprechenden Wertetabellen und Graphen.

10 Definitions- und Zielbereich sind wichtig. Betrachten Sie die Zuordnungsvorschrift/Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4$$

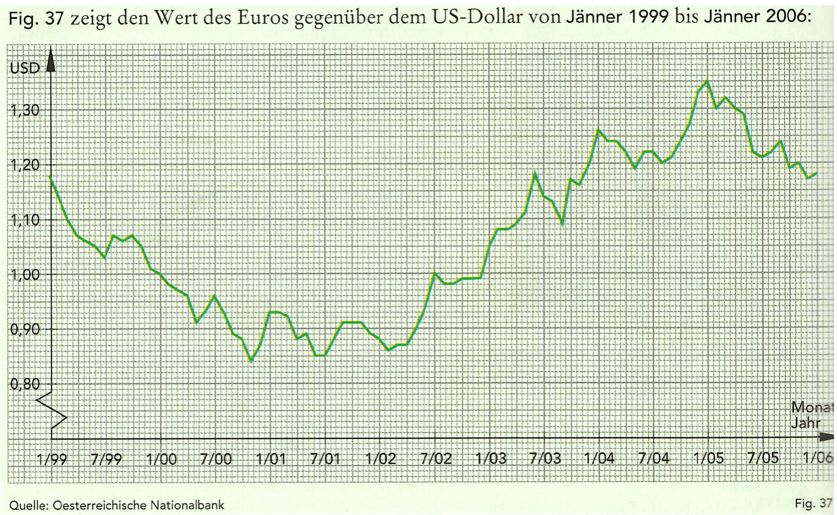
und finden Sie Intervalle I und J sodass die Funktion $f: I \to J$ die folgenden Eigenschaften hat: (a) injektiv, aber nicht bijektiv; (b) surjektiv, aber nicht bijektiv; (c) bijektiv.

11 Eine Schulaufgabe. Wir betrachten die folgende Schul(buch)aufgabe:

> Gegeben ist die Funktion $f = \dfrac{x}{x^2+1}$. Bestimme den Definitionsbereich.

(a) Diskutieren/kritisieren Sie diese Aufgabe.
(b) Formulieren Sie diese Aufgabe in einer fachlich korrekten Weise.

12 Funktionales Denken. Die nachstehende Grafik ist dem Schulbuch *Das ist Mathematik 4* (Reichel, 2006, 2. Auflage, öbvhpt-Verlag) entnommen:



Geben Sie zu jeder der drei Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff (Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung und Objektvorstellung) je eine Aufgabenstellung an, die dazu beitragen kann, die jeweilige Grundvorstellung aufzubauen. Arbeiten Sie außerdem eine ausführliche Lösungserwartung aus.

13 **Grundvorstellung zum Funktionsbegriff.** Eine Aufgabe aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung (20. Mai 2021, AHS) lautet:

> Lea trinkt eine Tasse Kaffee. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K dargestellt, die modellhaft die Konzentration $K(t)$ von Koffein in Leas Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Trinken des Kaffees beschreibt (t in h, $K(t)$ in mg/L).

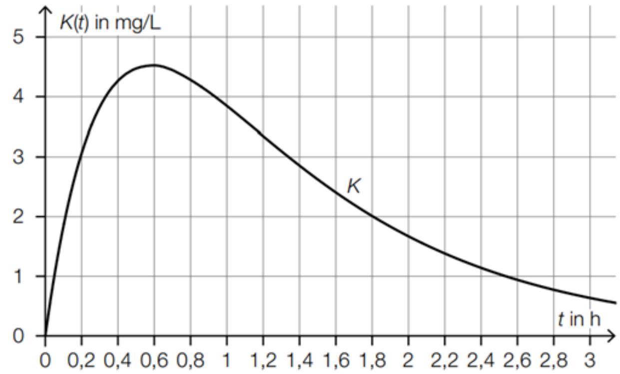


Abbildung 1: Quelle: https://www.matura.gv.at/

Betrachten Sie die folgende Beschreibung einer Grundvorstellung zum Funktionsbegriff:

> *Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.*

(a) Benennen Sie diese Grundvorstellung zum Funktionsbegriff und beschreiben Sie sie einmal aus der Perspektive der Definitionsmenge und einmal aus der Perspektive der Zielmenge. Veranschaulichen Sie Ihre Beschreibungen unter Einbeziehung graphischer Darstellungen. Verwenden Sie dazu das obige Beispiel.

(b) Finden Sie zur Angabe aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung drei Fragestellungen für (Ihre) Schüler*innen, die sich im Sinne der angegebenen Grundvorstellung anbieten. Arbeiten Sie auch eine Lösungserwartung aus.

Blatt 4: Folgen

14 **Zur Folgendefinition.** Suchen Sie aus zwei unterschiedlichen Schulbüchern Ihrer Wahl die Definition einer Folge heraus. Vergleichen Sie diese mit Definition 1.1.2. Welche Facetten werden betont? Arbeiten Sie wesentliche Unterschiede heraus. Können Sie schon Aspekte und Grundvorstellungen (im technischen Sinn von Kapitel 2.1) des Folgenbegriffs erkennen? Welche?

15 **Darstellung von Folgen, 1.** Erstellen Sie für die folgenden Folgen (mit Technologieeinsatz) eine Wertetabelle für $n = 0$ bis $n = 100$. Stellen Sie die Folgen (ebenfalls mit Technologieeinsatz) einmal durch ihr Bild (als „Spaziergang in $\mathbb{R}$“) und einmal durch ihren Graphen dar.

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine“)

(b) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.
Wie ändert sich das Aussehen der Folge in Abhängigkeit vom Wert von k?

(d) $d_n = \dfrac{n!}{2^n}$

(e) $e_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(f) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

16 **Darstellung von Folgen, 2.** Stellen Sie (wieder mit Technologieeinsatz) die folgenden Folgen durch ihren Graphen dar ($n \geq 1$):

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n}.$$

Gilt $a_n > b_n > c_n$ für alle $n \geq 1$?

17 **Folgen in der Sekundarstufe I.** Die folgende Aufgabe stammt aus der PISA-Untersuchung 2000 (wurde dort allerdings graphisch anders dargestellt).

Gegeben ist das folgende Gittermuster für die Schritte $k = 1$ bis $k = 4$.

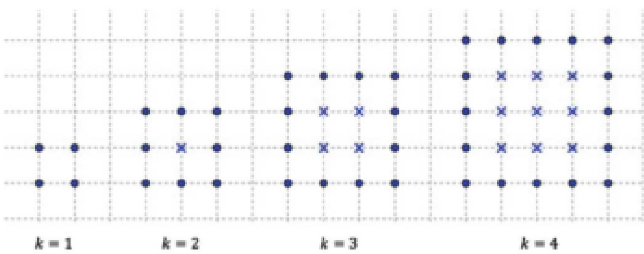


Abbildung 2: Gitterpunkte und -kreuze

Wie viele Gitterpunkte und Gitterkreuze sind es für $k = 5$, 10, $\ldots$, n?

$\boxed{18}$ **Schulbuchaufgabe zum Folgenbegriff.** Aufgaben dieser Art findet man in Schulbüchern, z. B. in Dimensionen der Mathematik 6 (E. Dorner, 2015)
Gegeben sind die folgenden Folgen(anfänge):

(1) $\langle 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle$
(2) $\langle -1, 2-3, \dots \rangle$
(3) $\langle 4, 5, 10, 11, 22, 23, \dots \rangle$
(4) $\langle 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots \rangle$

(a) Formulieren Sie ein mögliches Bildungsgesetz in Worten.
(b) Geben Sie für diese Bildungsgesetze das 9. und 10. Folgenglied an.
(c) Geben sie (wenn möglich) eine explizite Darstellung der Folge an.
(d) Stellen Sie die ersten 10 Folgenglieder auf der Zahlengeraden dar.

Blatt 5: Folgen im schulischen Kontext

$\boxed{19}$ **Dauertropfinfusion.** Einem Patienten wird durch eine Dauertropfinfusion eine gleichbleibende Menge eines Medikaments verabreicht, das bis dahin nicht in seinem Körper vorhanden war. Bei diesem Vorgang wird einerseits das Medikament im Blut angereichert, andererseits wird ein Teil wieder über die Nieren ausgeschieden. Pro Minute wird über die Infusion eine Menge von 3,8 mg des Medikaments zugeführt, während im gleichen Zeitraum 5 Prozent des zugeführten Medikaments wieder über die Nieren ausgeschieden werden. Wie entwickelt sich der Wirkstoffspiegel dieser Infusion innerhalb einer Stunde?

(a) Erstellen Sie eine mathematisch „knackige“ Lösung.
(b) Arbeiten Sie eine Lösungserwartung für den schulischen Kontext aus!

$\boxed{20}$ **Explizite und rekursive Darstellung — Kontext gesucht.** In der Vorlesung wurde im Zusammenhang mit dem Beispiel „Medikamentenspiegel im Körper“ aus einer rekursiv definierten Folge die explizite Darstellung (4.13) hergeleitet. Betrachten Sie nun eine solche explizite Darstellung mit

$$m_0 = 1240, \quad r = 0,6 \quad \text{und} \quad d = 20.$$

(a) Berechnen Sie die ersten sieben Folgenglieder und geben Sie eine rekursive Darstellung der Folge an!
(b) Entwickeln Sie aus der gegebenen Folge eine Aufgabenstellung für den Schulunterricht mit außermathematischen Bezug, die mindestens drei Fragestellungen enthält! Erarbeiten Sie eine entsprechende Lösungserwartung!

$\boxed{21}$ **Experimente zu Zahlenfolgen.** Arbeiten Sie für die nachstehende Aufgabenstellung eine Lösungserwartung aus und diskutieren Sie die Aufgabenstellung vor dem Hintergrund der Grunderfahrungen nach Winter sowie den Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff.

Aufgabenstellung: Immer kürzer – und doch kein Ende in Sicht. Beginnend mit einem Papierstreifen der Länge 100 cm werden Papierstreifen auf ein Plakat geklebt, die

(a) jeweils die halbe Länge des vorhergehenden Streifens haben, bzw.
(b) jeweils $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, usw. der Länge des ursprünglichen Streifens haben.

Beantworten Sie die folgenden Fragen für beide Fälle (a) und (b):

(1) Wie lange lässt sich dieses Experiment theoretisch fortsetzen?
(2) Wie entwickeln sich die Längen der Papierstreifen?
(3) Was lässt sich über die Gesamtlänge aller aufgeklebten Papierstreifen sagen, selbst wenn das Experiment sehr lange fortgesetzt wird?

$\boxed{22}$ **Arithmetische und geometrische Folge.** Wählen Sie aus zwei verschiedenen Schulbüchern die Definitionen für arithmetische und geometrische Folge sowie für deren rekursive und explizite Darstellung aus. Vergleichen Sie schulmathematische und hochschulmathematische Schreibweisen. Zeigen Sie Gemeinsamkeiten/Unterschiede auf.

$\boxed{23}$ **Geometrische Folge nach dem Prinzip der Variation.** In der Vorlesung wurde anhand einer Aufgabenstellung gezeigt, wie nach dem *Prinzip der Variation* arithmetische Folgen erarbeitet werden können. Arbeiten Sie in Analogie dazu eine Aufgabe zur Erarbeitung geometrischer Folgen sowie eine Lösungserwartung aus.

$\boxed{24}$ **Geometrische Folge nach dem Prinzip des Kontrasts.** Arbeiten Sie eine Aufgabenstellung zur Erarbeitung geometrischer Folgen aus, die auf dem *Prinzip des Kontrasts* beruht. Erstellen Sie weiters eine Lösungserwartung.

$\boxed{25}$ **Monotone Folgen 1.** Stellen Sie die Folgen in Beispiel 4.1.24, nämlich

$$a_n = n, \qquad b_n = c \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}, \qquad c_n = \frac{1}{n}\ (n \geq 1)$$
$$d_0 = 17,\ d_1 = 27,\ d_n = \frac{1}{n}\ (n \geq 2), \qquad e_n = (-1)^n$$

graphisch auf beide Arten (Spaziergang, d.h. Bild und Graph) dar und argumentieren Sie die behaupteten Monotonieeigenschaften.

$\boxed{26}$ **Monotone Folgen 2.** Finden Sie je eine reelle Folge, die monoton wachsend, monoton fallend ab $n = 5$, monoton wachsend aber nicht streng monoton wachsend, und weder monoton wachsend noch fallend ist.

Blatt 6: Folgen & Vermischtes

27 Zum Infimum.

(a) Formulieren Sie eine Definition des Infimums einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$.

(b) Geben Sie eine möglichst anschauliche Erklärung, was $\inf(M)$ ist.

(c) Kommentieren Sie die folgende Aussage und belegen Sie sie mit Beispielen: „Supremum und Infimum beschränkter Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ sind der immer verfügbare Ersatz für das nur allzu häufig fehlende Maximum und Minumum.“

28 Supremum, Maximum, Infimum, Minimum. Stellen Sie die Beispiele 4.1.29 und 4.1.31, graphisch dar, d.h. falls existent, stellen Sie Supremum, Maximum, Infimum bzw. Minimum von $\mathbb{N}$, $(0,1]$, $[0,1]$ und $(1/n)_{n\geq 1}$ graphisch dar. Erfinden Sie zwei weitere Aufgaben, eine (im Schulkontext) leichte und eine schwierige.

29 Umformungen: Stil und Fallen. Kommentieren Sie die folgenden Beweise. Sind sie korrekt? Sind die behaupteten Aussagen korrekt? Stellen Sie gegebenenfalls die Aussage richtig und beweisen Sie diese *in gutem Stil*.

(a) Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 - 3n - 4 > n^2 - 4n$.
Beweis:

$$\begin{aligned} n^2 - 3n - 4 &> n^2 - 4n \\ (n+1)(n-4) &> n(n-4) \\ n+1 &> n \qquad \text{w.A.} \end{aligned}$$

(b) Behauptung: Für $n \geq 1$ gilt $1 - n^2 \geq n(n-1)$
Beweis:

$$\begin{aligned} 1 - n^2 &\geq n(n-1) \qquad |^2 \\ \cancel{1} - 2n^2 + \cancel{n^4} &\geq n^2(n^2 - 2n + 1) \;=\; n^4 - 2n^3 + n^2 \geq \cancel{n^4} - 2n^3 + \cancel{1} \quad \text{weil } n^2 \geq 1 \\ -2n^2 &\geq -2n^3 \\ n^2 &\leq n^3 \\ 1 &\leq n \qquad \text{w.A.} \end{aligned}$$

30 Heron-Verfahren explizit. Berechnen Sie mittels des Heron-Verfahrens

(a) $\sqrt{30}$ und (b) $\sqrt{17}$

auf 20 Nachkommastellen genau. Verwenden Sie dazu Technologie!

31 Heron reloaded. Implementieren Sie das Heron-Verfahren z.B. mit Geogebra (oder einem Werkzeug Ihrer Wahl) und berechenen Sie für

(a) $\sqrt{99}$ und (b) $\sqrt{313}$ (c) $\sqrt{4711}$

für $n \leq 15$ nicht nur die Näherung x_n sondern auch explizit den Rest r_n und den Fehler z_n. Wie wirkt sich der gewählte Startwert x_1 auf den Approximationsprozess aus?

Blatt 7: Konvergenz & Grenzwert

32 Gute und schlechte Verbalisierungen der Grenzwertdefinition. Im Unterricht ist es von fundamentaler Bedeutung — mit der formalen Grenzwertdefinition im Kopf — gute von weniger guten Verbalisierungen unterscheiden und sich guter bedienen zu können. Beurteilen Sie vor diesem Hintergrund die folgenden Sprechweisen, die den Sachverhalt $\frac{1}{n} \to 0$ ausdrücken (sollen).

(1) $\frac{1}{n}$ strebt für n gegen ∞ gegen 0.

(2) $\frac{1}{n}$ ist schließlich beliebig nahe bei 0.

(3) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 beliebig nahe.

(4) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher.

(5) $\frac{1}{n}$ kommt mit wachsendem n der 0 immer näher, ohne sie je zu erreichen.

33 Und erreicht ihn nie. Es ist eine „beliebte" Fehlvorstellungen, dass eine konvergente Folge ihren Grenzwert nicht erreichen „darf". Bewerten Sie vor diesem Hintergrund die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils ein (Gegen-)Beispiel an:

(1) Eine konvergente Folge kann ihren Grenzwert annehmen (d.h. es gibt mindestens ein Folgenglied, das gleich dem Grenzwert ist).

(2) Jede konstante Folgen konvergiert, das ist aber langweilig.

(3) Wenn eine Folge (a_n) schließlich konstant ist (d.h. es gibt eine Zahl c und einen Index N sodass $a_n = c$ für alle $n \geq N$), dann divergiert sie.

(4) Konvergiert eine Folge, so kann sie ihren Grenzwert annehmen aber nicht überschreiten.

(5) Konvergiert eine Folge, so kann sie Ihren Grenzwert überschreiten aber nicht annehmen.

(6) Bei einer konvergenten Folge ist es egal, ob sie den Genzwert je erreicht. Interessanter ist es, wenn sie es nicht tut.

34 Grenzwertdefinitionen in Schulbüchern[2]. Die folgenden fünf Formulierungen zur Definition des Grenzwerts einer Folge wurden Schulbüchern entnommen.

(1) (STEINER und WEILHARTER 2006, S. 7):
Die Zahl α heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen: $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.

(2) (BÜRGER 2004, S. 152):
Ist $\langle a_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ eine reelle Zahlenfolge, dann heißt die reelle Zahl a Grenzwert der Zahlenfolge, wenn folgendes gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon$
Man schreibt: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

(3) (THORWARTL et al. 2005, S. 82):
Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung $U(a; \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fast alle Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Anders ausgedrückt: Die Folge $\langle a_n \rangle$ strebt mit wachsendem n dem Grenzwert (limes) a zu. Man schreibt: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.
Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt konvergente Folge.
Anmerkung: $\lim a_n = a$ bedeutet nicht, dass a tatsächlich „erreicht" wird, sondern nur, dass in jeder auch noch so kleinen ε-Umgebung um a fast alle Glieder der Folge liegen.

(4) (SCHÄRF 1971, S. 24):
Eine Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ heißt konvergent gegen den Grenzwert a, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (von ε abhängige) Nummer N, so daß für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Man schreibt: $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ und liest: a ist Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ für n gegen Unendlich.
Jede Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

(5) (BRAND et al. 2013, S. 62): Wenn für jeden (beliebig kleinen, positiven) Abstand ε ab einem (entsprechend großen) n der Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ bleibt, so heißt a Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$. Wir schreiben dann: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ (Sprich: „Der Limes von a_n für n gegen unendlich ist a.")
Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.

---

[2] Diese Aufgabe stammt aus der Diplomarbeit von Lukas Bäcker, `http://othes.univie.ac.at/55782/`.

Ihre Aufgabe ist nun die folgende:

(a) Definitionen analysieren und vergleichen.
Analysieren Sie die fünf gegebenen Definitionen einerseits nach deren mathematischen Exaktheit und andererseits danach, wie schülergerecht diese formuliert sind!

(b) Ranking erstellen.
Versetzen Sie sich in die Situation, eine Definition für Ihren Schulunterricht zum Grenzwertbegriff festlegen zu müssen. Erstellen Sie gemäß Ihrer in (1) gemachten Beobachtungen ein (subjektives) Ranking der fünf Formulierungen! Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

$\boxed{35}$ **Grenzwerte berechnen, 1.** Betrachten Sie nochmals die Folgen aus Aufgabe $\boxed{15}$:

(a) $a_n = (-1)^n$ („Vorzeichenmaschine“)

(b) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

(c) $c_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ für ein fixes $k \in \mathbb{N}$.

(d) $d_n = \dfrac{n!}{2^n}$

(e) $e_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(f) Die Fibonacci-Folge: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ $(n \geq 2)$

Welcher dieser Folgen sind konvergent, welche divergent? Im Falle der Konvergenz berechnen Sie den Limes (gerne mit Technologieeinsatz) und argumentieren/beweisen Sie analytisch die entsprechenden Konvergenzen.

$\boxed{36}$ **Formulierungen zum Grenzwert.** Die folgenden Formulierungen sind tatsächliche Äußerungen von Lernenden zu ihrer Vorstellung zum Grenzwert einer (konvergenten reellen) Folge.

(1) Der Grenzwert ist, wohin die Folge will, wenn man sie endlos weiterspinnt.

(2) Die Folge nähert sich dem Grenzwert mit wachsendem n an.

(3) Die Folge kommt dem Grenzwert unendlich nahe, aber kann ihn nicht überschreiten.

(4) In einer Umgebung des Grenzwerts liegen die meisten Folgenglieder.

(5) Die Folge nimmt den Grenzwert im Unendlichen an.

(6) In einer Epsilonumgebung um den Grenzwert liegen fast alle Folgenglieder.

(7) Die Folge konvergiert in der Unendlichkeit gegen den Grenzwert.

(8) Ab einem bestimmtem Index liegen alle weiteren Folgenglieder in einer beliebiger Epsilonumgebung um den Grenzwert.

(9) Der Abstand zwischen Folgengliedern und Grenzwert wird kleiner.

Ihre Aufgabe ist nun die folgende:

(a) Ordnen Sie jede Formulierung (mindestens) einer Grundvorstellung zu.

(b) Bewerten Sie die „Güte” jeder Vorstellung in Bezug auf ihre Übereinstimmung mit der jeweiligen (normativen) Grundvorstellung.

(c) Erklären Sie im Fall der Nichtübereinstimmung der/dem Lernenden, wie er/sie die entsprechende Vorstellung modifizieren muss, um zur entsprechenden (normativen) Grundvorstellung zu gelangen. Geben Sie dazu eine konkrete Formulierung in Form einer schriftlichen Rückmeldung und eines Hinweises an die/den Lernenden an.

Blatt 8: Konvergenz und das „Unendliche”

$\boxed{37}$ **Grenzwerte berechnen, 2.** Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Grenzwerte der Folgen aus Aufgabe $\boxed{16}$ (gerne mit Technologieeinsatz):

$$a_n = \sqrt{n + 10^3} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{10^3}} - \sqrt{n} \qquad (n \geq 1).$$

Was kann man aus dieser Aufgabe in Kombination mit Aufgabe $\boxed{16}$ lernen?

$\boxed{38}$ **Eine Frage der Grundvorstellung.** Diese Aufgabe widmet sich der folgenden Tatsache:

> Jede Permutation einer konvergenten Folge konvergiert gegen denselben Grenzwert.

Dabei versteht man unter einer Permutation einer Folge eine neue Folge, die aus der alten hervorgeht, indem man die Reihenfolge beliebig vieler (interessant ist natürlich unendlich vieler oder sogar fast aller!) Folgenglieder verändert, sprich die Folgenglieder beliebig durchmischt.

Argumentieren Sie, warum diese Aussage korrekt ist! Welche Aspekte/Grundvorstellungen zum Grenzwert sind hier hilfreich und welche nicht, bzw. welche sind sogar hinderlich?

Tipp: Wenn Sie die Sache „richtig anschauen”, ist sie sofort klar, vgl. Vorlesung Beispiel 2.1.1.

$\boxed{39}$ **Grenzübergang.** Wir formalisieren hier die Sprechweise vom „Grenzübergang” wie folgt: Unter dem „Limes-Operator” L verstehen wir die Abbildung, die einer konvergenten Folge (x_n) ihren Grenzwert $\lim x_n$ zuordnet, also formal (wobei $\mathcal{F}$ die Menge aller konvergenten Folgen bezeichnet)

$$L: \qquad \begin{aligned} \mathcal{F} &\to \mathbb{R} \\ (x_n) &\mapsto \lim x_n\,. \end{aligned}$$

(a) Welche Grundvorstellungen zum Folgen- bzw. zum Grenzwertbegriff hilft Ihnen diese abstrakte Darstellung zu verstehen?
(b) Geben Sie Wertetabelle von L für die folgenden Elemente im Definitionsbereich an: $x_n = 1/n$, $y_n = 1/n^2$, $z_n = n/(n+1)$, $a_n = \sqrt[n]{5}$, $b_n = 2 + 1/n$ und $c_n = 27$.
(c) Welchen Sätzen aus der Analysis entspricht die Aussage, dass L linear ist?
(d) Welchem Satz aus der Analysis entspricht die Monotonie von L?

$\boxed{40}$ **Der Grenzwert und das „Unendliche”.** Erklären Sie in eigenen Worten, welche Sichtweisen des „Unendlichen” mit welchen Aspekten und Grundvorstellungen des Grenzwerbegriffs korreliert sind.

$\boxed{41}$ **Achill und die Schildkröte.** Die Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea decken die Problematik von unendlich oft wiederholten Handlungen (hier Zurücklegen einer bestimmten Teilstrecke) auf, falls sie nur mit dem Begriff des potentiell, nicht aber mit dem des aktual Unendlichen analysiert werden.

> Achilleus[3] verfolgt eine Schildkröte, die allerdings einen Vorsprung von, sagen wir 100m hat. Bevor Achill die Schildkröte einholen kann, muss er erst ihren Startpunkt erreichen. In der Zeit, die er dafür benötigt, legt die Schildkröte aber auch wieder einen Weg zurück, sagen wir $1/10$ des ursprünglichen Vorsprungs von 100m. Um die Schildkröte zu erreichen, muss Achill (mindestens) diesen neuen Standpunkt der Schildkröte (der bei 110m gelegen ist) erreichen. Dieses Spiel wiederholt sich nun: Jedes Mal, wenn Achill den früheren Standpunkt der Schildkröte erreicht, hat diese wieder ein Stück Weg zurückgelegt und so kann Achill die Schildkröte niemals ereichen.

Klären Sie die Situation, d.h. die Frage, ob und wo Achill die Schildkröte einholt auf zwei Arten:

(a) Mittels „physikalischer" Argumentation: Benutzen Die dazu die Beschreibung des Wettlaufs mittels zweier gleichförmiger Bewegungen. (Achill legt bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ den Weg $a(t) = v\,t$ zurück, wobei v seine (konstante) Laufgeschwindigkeit ist. Die Schildkröte den Weg $s(t) = (v/10)\,t$, da Achill 10 mal so schnell läuft wie sie.)

(b) Mittels mathematischer Argumentation: Berechnen Sie dazu die von Achill bis zum Einholen der Schildkröte zurückgelegte Strecke unter Verwendung einer unendlichen Reihe.

Diskutieren Sie diese beiden Lösungen im Kontext der Begriffe des potentiell und des aktual Unendlichen.

$\boxed{42}$ **Fragen und Antworten.** Kehren Sie zu den Forenbeiträgen in Vorleunsung 4.2.35 zurück:

> *A:* Ich habe mal ne kleine und bescheidene frage:
>
> also in einem anderen forum wurde behauptet das 0,9(periode) das selbe wie 1 ist und das ein wert unendlich stark angenährt an 0 auch null sei. Da ist meine frage, stimmt das und wenn ja warum, weil mir der gedanke doch ein bisschen befremdend vorkommt, da man periodische zahlen ja auch als bruch schreiben kann.
>
> *B:* Also ich hab genau das Gleiche mal hier im Forum gelesen und da wurde sogar behauptet, dass es nen mathematischen Beweis dafür gibt. [...]
>
> *C:* $0,\bar{9}$ ist identisch zu 1.
> Beweis: $1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 0,\bar{3} + 0,\bar{3} + 0,\bar{3} = 0,\bar{9}$.

und bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen *unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Diskussion* in 4.2.F in der Vorlesung:

(a) Formulieren Sie in möglichst klarer Sprache, was die jeweiligen Poster fragen bzw. behaupten.

(b) Klären Sie die jeweilige Situation fachlich.

(c) Verfassen Sie jeweils Antwortpostings in denen Sie A, B und C die Situation erklären.

[3] In der griechischen Mythologie ist Achilleus der stärkste der griechischen Krieger im trojanischen Krieg. Die Ilias des Homer beginnt mit dem Vers „Singe den Zorn, o Göttin, des Peleiaden Achill". Man kann somit behaupten, dass der Zorn die älteste überlieferte Emotion des Abndlandes ist...

Blatt 9: Differentialrechnung (1): Kontext und Routine

$\boxed{43}$ **Pegelstand.** Starke Regenfälle haben Auswirkungen auf den Pegelstand eines Flusses. Die Funktion P mit $P(t) = \frac{1}{108}(t^3 - 18t^2 + 81t + 108)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Höhe des Pegelstandes. Dabei wir die Höhe des Pegelstandes in m und die Zeit t in Stunden gemessen.

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
(b) Untersuchen Sie die Veränderungen des Pegelstandes Zeitabschnitten $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,8]$.
(c) Untersuchen Sie die Veränderungen des Pegelstandes in den Abschnitten $[0,3]$, $[2,7]$ und $[0,1]$, $[3,5]$.
(d) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,8]$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
(e) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,3]$, $[2,7]$ und $[0,1]$, $[3,5]$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
(f) Berechnen Sie näherungsweise die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 3$ und $t = 5$. Nehmen Sie eine Annäherung von links und rechts vor.

$\boxed{44}$ **Differenzenquotient kontextbezogen.** Lösen Sie die Aufgabe und begründen Sie Ihre Wahl!

Im Rahmen eines Abfahrttrainings für den Teamwettbewerb wird besonderes Augenmerk auf einen Rennabschnitt gelegt, der rund 30 m lang ist. Am Beginn dieses Abschnitts, am Ende und an drei Zwischenpositionen werden Lichtschranken positioniert, um die jeweiligen Zwischenzeiten stoppen zu können. Der am Beginn des Rennabschnitts positionierte Lichtschranken wird mit L_0 bezeichnet. Es folgen der Reihe nach L_1, L_2, L_3 und L_4, wobei sich L_4 am Ende des Rennabschnitts befindet, also $\overline{L_0 L_4} = 30$ m (gemessen längs der Rennstrecke). $s(i)$, $0 \leq i \leq 4$, gibt die jeweilige Entfernung des Lichtschrankens mit der Nummer i vom Startpunkt der Rennstrecke an. $t(i)$, $0 \leq i \leq 4$, gibt die jeweilige Zwischenzeit an, die beim Durchfahren des Lichtschrankens mit der Nummer i ausgelöst wird. Aufgrund der Beschaffenheit des Rennabschnitts kann davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit während der Fahrt in diesem Abschnitt streng monoton abnimmt.

Aufgabenstellung:
Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

(1)	$\frac{s(2)-s(0)}{t(2)-t(0)}$ liefert einen besseren Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$ als $\frac{s(1)-s(0)}{t(1)-t(0)}$.	☐
(2)	Das arithmetische Mittel der vier Quotienten $\frac{s(1)-s(0)}{t(1)-t(0)}, \ldots, \frac{s(4)-s(0)}{t(4)-t(0)}$ liefert angesichts der vorliegenden Daten den bestmöglichen Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$.	☐
(3)	Als bestmöglicher Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(4)$ ist der Quotient $\frac{s(4)-s(3)}{t(4)-t(3)}$ anzusehen.	☐
(4)	Um einen genaueren Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$ ermitteln zu können, empfiehlt sich die Platzierung einer weiteren Lichtschranken zwischen L_0 und L_1.	☐
(5)	Je näher L_3 bei L_4 liegt, desto genauer kann die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(4)$ ermittelt werden.	☐

Abbildung 3: Quelle: Mayer, Süss-Stepancik, Huber - Dimensionen 7 Schularbeitentrainer

$\boxed{45}$ **Differenzierbarkeit & Ableitung 1.** Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?
Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$

(b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$

(c) $f_3(x) = \exp(x)\,\sin(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 + x^2}$

$\boxed{46}$ **Tangente explizit.** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in dem jeweils angegebenen Punkt P. Fertigen Sie eine Skizze an.
(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1, 1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0, 1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0, 0)$

$\boxed{47}$ **Näherungsweise Berechnungen mittels Ableitung.** Geben Sie unter Verwendung der Ableitung der Wurzelfunktion eine Näherung für $\sqrt{8.92}$ an. Wie gut ist diese Näherung?

Blatt 10: Differentialrechnung (2): Differenzierbarkeit & Puzzle

$\boxed{48}$ **Knicke und Sprünge.**

(a) Betrachten Sie die sog. Knick-Funktion

$$x_+ := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist x_+ stetig, in welchen differenzierbar? Begründen Sie.

(b) Betrachten Sie die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen, dann verifizieren & begründen Sie die folgenden Aussagen:

(i) H ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
(ii) H' ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
(iii) Trotzdem ist H in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
(iv) Die nicht-Differenzierbarkeit von H in $x = 0$ äußerst sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.

$\boxed{49}$ **Differenzierbarkeit & Ableitung 2.** Für welche reellen x sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?
Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = x^{-3} + \dfrac{x-1}{x-2}$
(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+2}$
(c) $f_3(x) = x\log(x) - x$
(d) $f_4(x) = e^{2x+3}$
(e) $f_5(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$
(f) $f_6(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

$\boxed{50}$ **Die Tangente als „beste" Gerade — warum $\frac{r(h)}{h} \to 0$?** Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der

$$\text{„verschärften Bedingung"} \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \text{ aus D§2.2 zu tun hat.}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen bzw. bearbeiten Sie nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ ist von der Form $g(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$.

(b) Geben Sie den Fehler

$$r(h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$$

der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und k an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in x_0 ist.

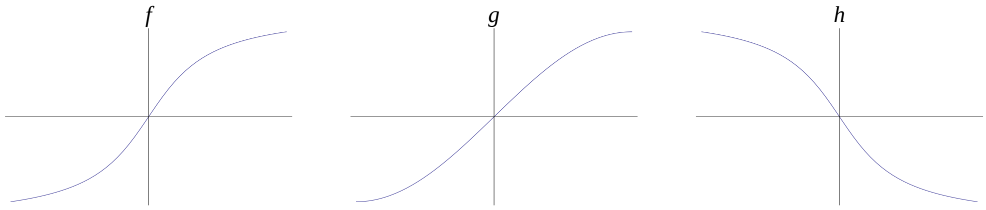
(d) Es gilt

$$\frac{r(h)}{h} \to 0 \ (h \to 0) \text{ genau dann, wenn } g \text{ die Tangente an } f \text{ in } x_0 \text{ ist,}$$

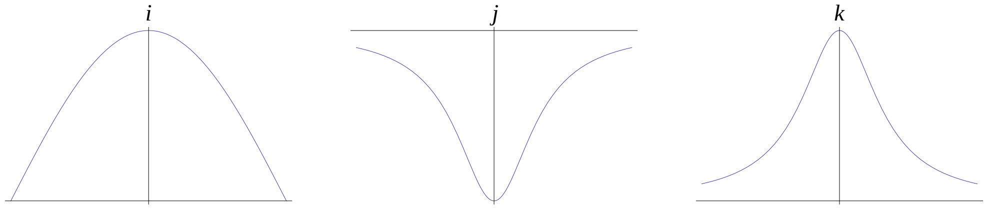
d.h. falls $k = f'(x_0)$ ist.

(e) Fertigen Sie eine Skizze an.

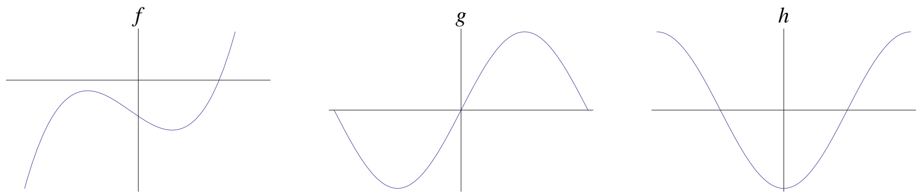
$\boxed{\textbf{51}}$ **Ableitungspuzzle 1.** Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h.



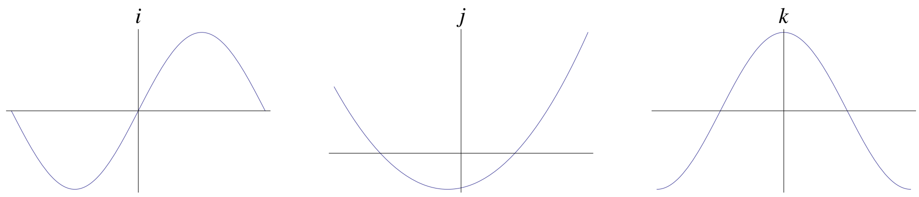
Welche der Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von f, g bzw. h? Begründen Sie Ihre Auswahl!



$\boxed{\textbf{52}}$ **Ableitungspuzzle 2.** Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g, h. Welche der



Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von f, g bzw. h? Begründen Sie Ihre Auswahl!



Blatt 11: Differentialrechnung (3) Kontext & Schule

53 Änderungsmaße. Als ein Gradmesser für die Entwicklung des Tourismus gilt die Anzahl der Gästenächtigungen. Die folgende Tabelle gibt die Daten für Österreich an (Quelle: Statistik Austria).

(a) Vergleichen Sie die absoluten Änderungen im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr. Wann war die absolute Änderung am kleinsten/größten? Welche Bedeutung hat der jeweilige Wert in Bezug auf die vorliegenden Daten?

(b) Vergleichen Sie die relativen Änderungen im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr. Wann war die relative Änderung am kleinsten/größten?

(c) Berechnen Sie für das Zeitintervall von 2000 bis 2007 die absoluten Änderung, die mittlere Änderung, die prozentuelle Änderung und den Änderungsfaktor. Welche Bedeutung hat der jeweilige Wert in Bezug auf die vorliegenden Daten?

Jahr	Nächtigungen in Millionen
2000	113,6
2001	115,1
2002	116,8
2003	117,9
2004	117,2
2005	119,2
2006	119,4
2007	121,4

54 Pegelstand eines Flusses.

Es sei $p : t \longmapsto p(t)$ die Funktion, die jedem Zeitpunkt t den zugehörigen Pegelstand eines Flusses während eines Unwetters zuordnet.

(a) Interpretieren Sie die Terme im Kontext.
(1) $p(t_2) - p(t_1)$; (2) $\frac{p(t_2)-p(t_1)}{t_2-t_1}$;
(3) $\frac{p(t_2)-p(t_1)}{p(t_1)}$ und (4) $\frac{p(t_2)-p(t_1)}{p(t_1)} \cdot 100$

(b) Zeichnen Sie in der Grafik (Abbildung 2) Δt und Δp im Intervall $[t_1; t_2]$ ein.

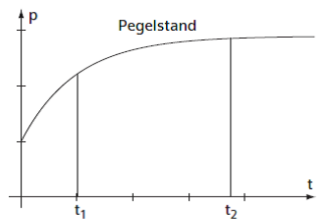


Abbildung 4: Pegelstand

55 Algenteppich. Der Graph von f zeigt, wie sich die Fläche (in m^2) eines Algenteppichs in einem kleinen Teich in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) ausdehnt.

(1) Ermitteln Sie grafisch (grafisches Differenzieren) die Ableitungsfunktion f'.

(2) Interpetrieren Sie den Verlauf von f und f' im Zusammenhang mit der Ausbreitung des Algenteppichs.

(3) Diskutieren Sie zu welcher der drei Grundkompetenzen die Aufgabenstellung am besten/wenigsten passt. Begründen Sie.

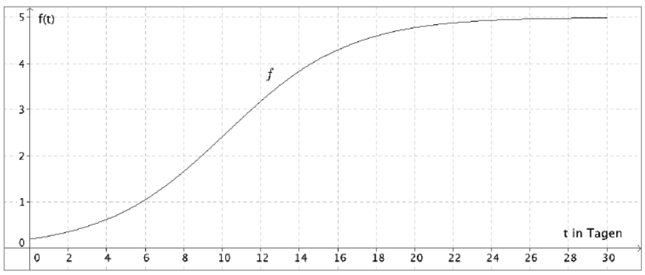


Abbildung 5: Algenteppich

(a) AN-R 3.1 Den Begriff Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können.

(b) AN-R 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können.

(c) AN-R 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen.

$\boxed{56}$ **Ableitungsregel für zusammengesetzte Funktionen im Unterricht erarbeiten.** Entwerfen Sie für die Summenregel einen konkreten Unterrichtsgang (inklusive Aufgabenstellung und exemplarischer Lösungserwartung) gemäß der Schrittfolge:

(1) **Erkunden des Phänomens:** Schülerinnen und Schüler lernen vor der Formulierung von Sätzen (Ableitungsregeln) konkrete Beispiele kennen und können an diesen das Phänomen entdecken.

(2) **Herausarbeiten einer Vermutung:** Ausgehend von den konkreten Beispielen formulieren die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Vermutung.

(3) **Beweis der Vermutung:** Gegebenenfalls muss für den Beweis der Vermutung noch weiteres Vorwissen zur Verfügung gestellt werden.

$\boxed{57}$ **Ableitung und Tangentensteigung — Vorstellungen und Fehlvorstellungen.** Welche der folgenden Vorstellungen zum Ableitungsbegriff sind zutreffend, bei welchen handelt es sich um Fehlvorstellungen? Begründen Sie ihre Einschätzungen!

(a) Die Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

(b) Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in x_0 differenzierbare Funktion ist, dann schneidet die Tangente an f in x_0 den Graphen von f nur im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn die Folge der Steigungen der Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ $(x \neq x_0)$ gegen einen endlichen Wert konvergiert.

(d) Die Tangente an die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 berührt den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ und hat dort die gleiche Richtung.

Blatt 12: Differentialrechnung (4) Kurvendiskussion

$\boxed{58}$ **Kurvendiskussion 1.** Arbeiten Sie ein ausführliche Lösung der Aufgabe 1 der standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung Mathematik AHS (Teil-2-Aufgaben, Mai 2018) aus.

KL18 PT1 Teil-2 - Aufgaben (09.05.2018).pdf

Aufgabe 1

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind.

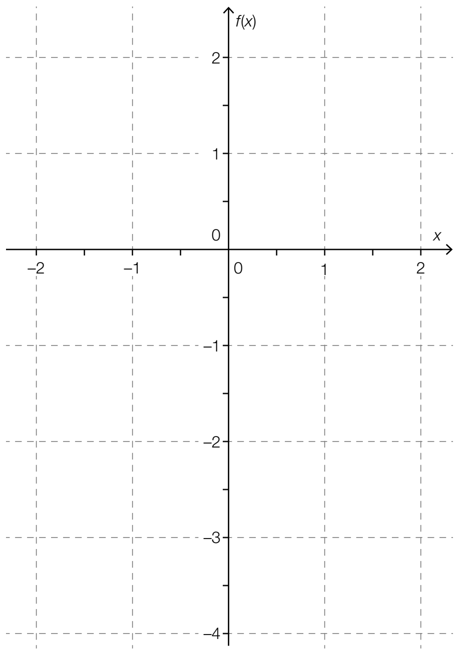
Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

$\boxed{A}$ Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall (0; 1) hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



5

$\boxed{59}$ **Kurvendiskussion 2.** Arbeiten Sie ein ausführliche Lösung der Aufgaben 4a und 4b der standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung Mathematik AHS (Teil-2-Aufgaben, Mai 2018).

Aufgabe 4

Bitcoin

Bitcoin (Währungskürzel: BTC) ist eine digitale Kunstwährung. Der Marktwert des Bitcoin ergibt sich aufgrund von Angebot und Nachfrage.

Nutzer/innen des Bitcoin werden in dieser Aufgabe als Bitcoin-User bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bitcoin-Euro-Kurs vom 11. März 2015 bis zum 11. März 2016. Die linke Skala zeigt dabei den absoluten Wert eines Bitcoins in Euro, die rechte Skala zeigt die Veränderung in Prozent bezogen auf den 11. März 2015.

Datenquelle: http://www.finanzen.net/devisen/bitcoin-euro-kurs [11.03.2017] (adaptiert).

KL18 PT1 Teil-2 - Aufgaben (09.05.2018).pdf

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, in welchem der Monate von April 2015 bis Dezember 2015 der Bitcoin-Euro-Kurs jeweils vom Monatsanfang bis zum Monatsende absolut am stärksten gefallen ist, und geben Sie diesen Kursverlust in Euro an!

Monat: ________________

Kursverlust: ________________

Es sei K_1 der Bitcoin-Euro-Kurs zum Beginn des betreffenden Monats, K_2 der Bitcoin-Euro-Kurs am Ende des betreffenden Monats sowie AT die Anzahl der Tage des betreffenden Monats.

Berechnen Sie den ungefähren Wert des Ausdrucks $\frac{K_2 - K_1}{AT}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

b) Anfang Jänner 2016 waren ca. 15 Millionen Bitcoins im Umlauf. Die t Jahre nach dem Jahr 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins ist annähernd $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}18 \cdot t}$. Damit ist $f(0)$ die zu Anfang Jänner 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins.

Bestimmen und interpretieren Sie die relative (prozentuelle) Änderung der im Umlauf befindlichen Menge an Bitcoins im Zeitintervall [7; 8]!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der derjenige Zeitpunkt berechnet werden kann, ab dem nur mehr eine Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

c) Eine Untersuchung der Demografie von Bitcoin-Usern hat ergeben, dass weltweit 88 % der Bitcoin-User männlich sind.
Es soll festgestellt werden, wie hoch dieser Prozentsatz in Österreich ist. Dazu wird eine große Anzahl an Personen befragt. Diese Befragung ergibt, dass 171 der befragten Personen Bitcoin-User sind, und von diesen 171 Personen sind 138 männlich.

$\boxed{\text{A}}$ Geben Sie aufgrund dieser Daten ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der männlichen Bitcoin-User unter allen Bitcoin-Usern in Österreich an!

Geben Sie an, welches Konfidenzniveau zur Berechnung eines solchen Intervalls mindestens angenommen werden muss, damit der weltweit ermittelte Anteil von 88 % in diesem Intervall enthalten ist!

11