Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23, 1. Termin, 6.2.2023
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Unter einer Grundvorstellung eines mathematischen Begriffs versteht man eine sinnstiftende inhaltliche Deutung dieses Begriffs.
   (b) [true] Individuelle Grundvorstellungen können Ausgangspunkt der Unterrichtsgestaltung bzw. von Interventionen sein..
   (c) [false] Grundvorstellungen eines mathematischen Begriffs werden durch eine rein fachmathematische Analyse gewonnen.
   (d) [false] Sekundäre Grundvorstellungen sind immer individuell und daher nicht normativ.
2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen, f und g Funktionen von A nach B.
   (a) [false] Die Objektvorstellung beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.
   (b) [true] Der Zuordnungsaspekt beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.
   (c) [true] Eine gut ausgeprägte Objektvorstellung befördert ein gutes Verständnis der Definition der Summe zweier Funktionen gemäß
   $$(f + g)(a) := f(a) + g(a).$$
   (d) [false] Die Zuordnungsvorstellung korreliert besonders stark mit dem Paarmengenaspekt.
3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) [true] Wenn x Grenzwert von (x_n) ist, dann ist x auch Häufungswert von (x_n).
   (b) [false] (x_n) ist beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, sodass für alle Folgenglieder x_n gilt: $x_n \leq C$.
   (c) [false] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann hat (x_n) auch einen Limes.
   (d) [true] Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) schon beschränkt.
4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Grenzwertdefinition ist eine überwiegend statische Formulierung.

(b) [true] Die Annäherungsvorstellung ermöglicht es besonders gut/schnell zu verstehen, warum Permutationen konvergenter Folgen wieder konvergieren — und zwar gegen denselben Grenzwert.

(c) [true] Die Annäherungsvorstellung zum Grenzwert ist eine vorwiegend dynamische Vorstellung.

(d) [false] Die Vorstellung vom potentiell Unendlichen korreliert besonders stark mit der ε-N-Definition des Grenzwerts.

5. (*Eigenschaften von Funktionen anschaulich.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Falls (der Graph von) f keine Knicke hat, dann ist f differenzierbar.

   (b) [true] Ist f stetig, so hat (der Graph von) f keinen Sprung.

   (c) [false] Ist f beschränkt, dann ist f auch schon stetig.

   (d) [true] Wenn (der Graph von) f einen Sprung hat, dann ist f nicht differenzierbar.

6. (*Differenzierbarkeit.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Der Differenzenquotient $[f(x)-f(x_0)]/(x-x_0)$ von f in x_0 ist genau die relative Änderung von f im Intervall $[x, x_0]$ (bzw. $[x_0, x]$).

   (b) [true] Konvergiert der Differenzenquotient von f in x_0 gegen einen endlichen Wert, so ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) [false] Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann ist die Ableitung $f'(x_0)$ der Limes des Differenzenquotienten von f bei x_0 für $x_0 \to x$.

   (d) [false] Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist die Tangente an f in x_0 die globale Stützgerade von f.

2 Sätze & Resultate

7. *(Zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert für abgeschlossene und offene Intervalle gleichermaßen.

   (b) [true] Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert.

   (c) [true] Das Monotonieprinzip beruht auf der Vollständigkeit.

   (d) [false] Im axiomatischen Zugang wird $\mathbb{R}$ aus den (ZFC)-Axiomen der Mengenlehre konstruiert.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] (x_n) hat höchstens einen Grenzwert.

(b) [false] Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n < y_n$ für alle n, dann auch $x < y$.

(c) [false] Ist (x_n) unbeschränkt, so kann (x_n) trotzdem konvergieren.

(d) [false] Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y, dann auch $\frac{x_n}{y_n}$ und zwar gegen $\frac{x}{y}$.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) [false] Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann divergiert die Reihe.

   (b) [true] Falls die Reihenglieder die Bedingung $x_n \geq 1$ für alle n erfüllen, dann divergiert die Reihe.

   (c) [true] Falls die Reihe konvergiert, dann muss auch die Folge der Reihenglieder x_n konvergieren.

   (d) [false] Falls die Glieder eine Nullfolge bilden (d.h. $x_n \to 0$ gilt), dann konvergiert die Reihe.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [false] Ist f in x_0 stetig, so ist f in x_0 auch differenzierbar.

   (b) [false] Ist f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und gilt $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} f'(x)$, dann ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar.

   (c) [true] Gilt für den Differenzenquotienten von f bei $x_0 = 0$, dass

   $$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{x} \neq \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{x}$$

   dann ist f in x_0 nicht differenzierbar.

   (d) [false] Ist f monoton steigend, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Hat f hat in x_0 ein Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

   (b) [true] Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x, dann ist f monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.

   (c) [true] Hat f in x_0 keine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 auch keine Extremstelle.

   (d) [false] Ist f streng monoton wachsend, dann ist f' überall positiv ist.

12. *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen über den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung sind korrekt? Der Haupsatz besagt (für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$):

   (a) [true] $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$

   (b) [false] $F(x) := \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ ist eine Stammfunktion von f.

(c) [true] Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion und diese ist dann automatisch stetig differenzierbar.

(d) [true] Falls F (beliebige) Stammfunktion von f ist, gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Konvergente Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

    (a) [false] $\frac{x^n}{n!} \to e$ für $n \to \infty$.

    (b) [true] $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 2$.

    (c) [true] $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^k = 0$.

    (d) [false] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \to 1$ $(a > 0)$.

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] Für $|q| \leq 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^k$.

    (b) [true] Die periodische Dezimalzahl $0.\bar{3}$ ist durch die geometrische Reihe

    $$0.3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

    gegeben.

    (c) [true] Das Konvergenzprinzip für monotone beschränkte Folgen garantiert, dass alle Dezimalzahldarstellungen (d.h. Reihen der Form

    $$\sum_k (a_k)(10)^{-k}$$

    mit $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$) konvergieren.

    (d) [false] $0.\bar{3} < 1/3$.

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ist beschränkt.

    (b) [false] Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist beschränkt.

    (c) [false] Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ist unstetig in $x_0 = 0$.

    (d) [true] Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1/x^2$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

16. *(Kurvendiskussion.)* Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen (jeweils mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$) sind korrekt?

    (a) [true] $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ kein Extremum, obwohl dort die Tangente waagrecht ist.

(b) [false] $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minumum, weil $f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$ gilt.

(c) [true] Weil $f(x) = x^4$ in $x = 0$ ein Minimum hat, gilt $f'(0) = 0$.

(d) [false] $f(x) = x^5$ ist streng monoton steigend und daher gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x

17. *(Funktionseigenschaften explizit.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $f(x) = 5x^4+2x^3-7x+5$ ist als Polynomfunktion auf ihrem gesamten maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ stetig.

(b) [true] $g(x) = \frac{3x^3+x^2+6}{7x^2+5}$ ist als rationale Funktion auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(c) [false] $h(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist als Polynomfunktion differenzierbar.

(d) [false] $j(x) = e^{3x^2}$ ist nach der Kettenregel differenzierbar mit Ableitung $j'(x) = e^{3x^2}$.

18. *(Ableitung explizit.)* Wir betrachten die die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, \infty))$ und die Rechnung

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (h \to 0).$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Rechnung zeigt, dass f in jedem $x > 0$ differenzierbar ist.

(b) [true] Die Rechnung, gemeinsam mit der Tatsache $\lim_{x \searrow 0} 1/\sqrt{x} = \infty$ zeigt, dass $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \infty$ gilt.

(c) [false] Die Überlegung in (18b) zeigt, dass f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

(d) [true] Setzt man in obiger Rechnung $x = 0$ (und notwendiger Weise $h > 0$), dann zeigt sie, dass f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

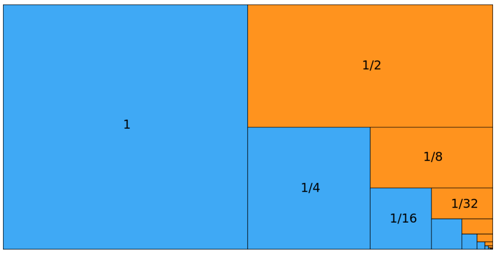
1. *Geometrische Reihe.*

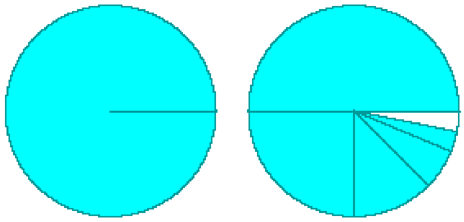
(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2$

$$(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \langle 1,\ 1+1/2 = 3/2,\ 3/2+1/4 = 7/4,\ 7/4+1/8 = 15/8,$$
$$15/8 + 1/16 = 31/16\ \ldots\rangle$$

Also gilt $|2 - s_3| = 1/8$ und $|2 - s_4| = 1/16 < 1/8$. Da alle Reihenglieder positiv sind, ist (s_n) monoton wachsend und daher ab $n = 4$ näher am Limes 2 als 1/8. (1 P)

(b) Veranschaulichung etwa durch Rechtecksflächen oder ein „Tortendiagramm”. (1P)





(c) Die Summe der Flächenstücke (entspricht der Partialsummenfolge) kommt der doppelten Fläche des Einheitsquadrats (bzw. des Kreises) beliebig nahe (in dem Sinn, dass jede beliebig kleine Fehlerschranke schließlich dauerhaft unterschritten wird). (2 P)

2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Zum Ableitungsbegriff.*
   Der Ableitungsbegriff wird über das Tangentenproblem eingeführt. (1 P)

   Schwierigkeiten: (1–2 P)

   - Paradigmenwechsel vom geometrischen Tangentenbegriff (Tangente als globale Stützgerade) zum analytischen Tangentenbegriff (Tangente als lokale Schmiegegerade)
   - Dass die Grenzlage von Sekanten eine Tangente ist, ist keine gedankliche Weiterführung, sondern muss einfach akzeptiert werden.
   - Die Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert ist erkenntnistheoretisch schwierig (man setzt für die Berechnung des Differenzenquotienten $p \neq 0$ um es dann scheinbar doch wieder einzusetzen) und algebraisch aufwendig.

   Wie wird mit diesen Schwierigkeiten umgegangen:
   Im Anschluss an die klassische Herleitung wird betont, dass erst mit der Definition $k_t = \lim_{n\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ der Begriff der Tangente definiert wird. Dabei wird an die Anschauung appelliert, was wegen der oben erwähnten „Dualität” des Tangentenbegriffs problematisch erscheint. Ebenso ist diese ex-post Rechtfertigung wenig motivierend. Allerdings wurde für die geometrische Deutung die Funktion f so gewählt, dass die lokale Sicht gut besprochen werden kann: Ein Weiterzeichnen der Tangente führt sehr bald zu einem weiteren Schnittpunkt von t und dem Graphen von f. (1–2 P)

2. *Grenzwert von Folgen.*

   (a) Vorwiegend wird die Annäherungsvorstellung bedient, die sich primär auf die Vorstellung vom potentiell Unendlichen bezieht. (1 P)

   (b) Formulierungsprobleme (die ersten beiden Punkte sollten genannt werden): (1–2 P)

   - Die Formulierung *entgegenstrebt* ist zu ungenau, um den tatsächlichen Gehalt des Grenzwertbegriffs zu fassen und daher als Definition nicht akzeptabel. Es geht um eine „beliebig genaue“ Annäherung im Sinne, dass jeder positive Abstand zum Grenzwert ab einem Folgenglied (dauerhaft) unterschritten wird, und das wird mit „entgegenstrebt“ nicht klar genug ausgedrückt. Zum Beispiel strebt die Folge $(x_n) = \frac{1}{n}$ jeder negativen Zahl entgegen.

- Dass der Grenzwert nie erreicht wird, ist ebenfalls nicht korrekt. Das einfachste Gegenbeispiel ist der Grenzwert einer konstanten Folge.
- Der Zusatz (unter der Definition) ist belanglos bzw. unverständlich.
- In der Einleitung steht, dass der Grenzwert „vorkommen kann“. Das sollte durch „Funktionen, Reihen und Folgen können einen Grenzwert haben und dieser wird wie folgt definiert.“ ersetzt werden.

Mögliche Umformulierung:
Eine Zahl ist Grenzwert einer Folge, falls sie dieser schließlich beliebig nahe kommt, d.h. jede beliebig kleine „Fehlerschranke” (um den Grenzwert) ab einem Folgenindex (dauerhaft) unterschreitet. (1–2 P)

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

1. *Integralbegriff.*

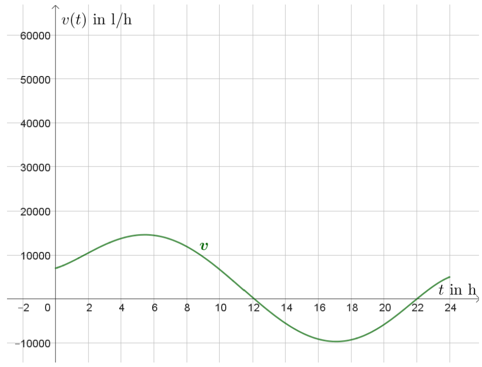
(a) Lösung der angeführten Aufgabe: -2, absolute Änderung. (1 P)
Vorrangig wird die Rekonstruktionsgrundvorstellung angesprochen, da die Lösung -2 aus der Funktion F leichter ablesbar ist, als aus der Funktion f. Sieht man die Funktion F als Rekonstruktion des Wasserstands aus den gegebenen Änderungsraten, ist die Lösung mit $F(7) - F(0) = 4 - 6 = -2$ gut ablesbar und als absolute Änderung erkennbar. (1 P)

(Je nach Sichtweise kann auch die Flächeninhaltsgrundvorstellung als vorrangig angesprochen argumentiert werden: Schätzt man die Summe der orientierten Flächeninhalte ab, erkennt man, dass das Ergebnis negativ sein muss. Da es nur eine negative Lösung zur Auswahl gibt, ist dieser Zugang möglich. Für das Erkennen der Lösung als absolute Änderung braucht es dann aber die Rekonstruktionsvorstellung.)

(b) Mögliche Hilfestellung: Die Funktion F wird aus den Änderungsraten, also aus den Werten von f rekonstruiert. Dabei ist die Funktion f die erste Ableitung der Funktion F bzw. F Stammfunktion von f. Hat f positive Funktionswerte, dann steigt F und der Wasserstand nimmt zu. In den Intervallen, in denen der Graph von f unterhalb der t-Achse liegt, sinkt der Wasserstand. Die Flächeninhalte, die die Funktion f mit der t-Achse einschließt, geben an, um wieviel der Wasserstand steigt oder fällt. Die Summe, der orientierten Flächeninhalte gibt dann die jeweilige absolute Änderung des Wasserstands an. Zum Beispiel sieht man, dass nach ca. 2,6 Tagen der Wasserstand seinen höchsten Wert erreicht. Ab dem Zeitpunkt $t = 2,6$ sinkt der Wasserstand kontinuierlich.
$F(4) = F(0)$ und das bedeutet, dass der Wasserstand seinen ursprünglichen Wert von $t = 0$ wieder erreicht hat. Die Funktion F ist eine *beliebige* Stammfunktion von f, aus der wir nur das Änderungsverhalten des Wasserstandes, jedoch keine Information über die Höhe des Wasserstands des Gartenteichs ablesen können. (2 P)

(c) Mögliche Übungsaufgabe:

In einem Staubecken fließt Wasser zu und ab. Nebenstehend ist der zeitliche Verlauf der Zuflussgeschwindigkeit als Funktion v mit $v(t)$ in l/h und t in h an einem bestimmten Tag dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ waren 20000 Liter in dem Becken.



(d) Diskutiert folgende Fragen:

i. Schätzt ab, wie viel Liter Wasser in den ersten 4 Stunden des Tages in das Becken flossen.

ii. Wann ungefähr war die Wassermenge im Becken am größten?

iii. Was bedeuten die Nullstellen der Funktion v im Kontext?

iv. Was bedeuten negative Funktionswerte von v im Kontext?

Stelle die Wassermenge W als Funktion der Zeit t dar. (2 P)