Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23, 2. Termin, 13.4.2023
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] Sekundäre Grundvorstellungen stellen eine Verbindung zu anderen (schon bestehenden) mathematischen Begriffen her.
   (b) [false] Individuelle Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff sind normativ und Ziel des Unterrichts.
   (c) [false] Eine Grundvorstellung beleuchtet einen mathematischen Begriff aus allen fachlich relevanten Perspektiven.
   (d) [false] Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man seine umfassende mathematische Beschreibung.

2. (*Wintersche Grunderfahrungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] In den drei Winterschen Grunderfahrungen manifestiert sich der allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts.
   (b) [false] Die 2. Wintersche Grunderfahrung („Mathematische Welt") kann vor allem im Zusammenhang mit Anwendungen vermittelt werden.
   (c) [true] Durch intuitives Arbeiten mit Grenzwerten kann die 3. Wintersche Grunderfahrung („Heuristische Fähigkeiten") im Kontext der Analysis gut vermittelt werden.
   (d) [true] Im Kontext der Winterschen Grunderfahrungen (G1) („Mathematischer Blick") und (G3) wird Mathematik als Prozess erlebbar.

3. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist
   (a) [true] die Menge aller geordneten Paare $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.
   (b) [true] eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
   (c) [false] das Produkt aus Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und Bildmenge $f(\mathbb{R})$.
   (d) [false] die Menge $G(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\}$.

4. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition des Folgenbegriffs (Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Diese Definition
   (a) [true] stützt sich vor allem auf den Zuordnungsaspekt.
   (b) [true] bedient den Iterationsaspekt gar nicht.

(c) [true] kann gut mit dem Aufzählungsaspekt in Verbindung gebracht werden.

(d) [false] erleichtert den Aufbau der Kovariationsvorstellung.

5. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] Nur weil (x_n) divergiert, muss (x_n) nicht unbeschränkt sein.

   (b) [true] Wenn (x_n) keinen Häufungswert hat, dann divergiert (x_n).

   (c) [false] Wenn (x_n) einen Häufungswert hat, dann ist (x_n) unbeschränkt.

   (d) [false] Wenn (x_n) unbeschränkt ist, dann ist (x_n) sicherlich uneigentlich konvergent (bestimmt divergent).

6. (*Grundvorstellungen und Aspekte des Ableitungsbegriffs.*) Welche der folgenden Aussagen zu Grundvorstellungen und Aspekten des Ableitungsbegriffs sind korrekt?

   (a) [false] Der (fach)mathematisch wichtigste Aspekt ist der der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten.

   (b) [true] Zur Grundvorstellung der Tangentensteigung gehört die Entwicklung der Vorstellung von Tangenten als Schmieggeraden.

   (c) [true] Zur Grundvorstellung der Tangentensteigung gehört die Entwicklung der Vorstellung, dass die Tangente lokal die Richtung einer Kurve angibt.

   (d) [false] Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate ist hauptsächlich mit dem Aspekt der lokalen linearen Approximation verbunden.

2 Sätze & Resultate

7. *(Rund um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Ordnungsvollständigkeit kann ohne Bezugnahme auf den Folgenbegriff formuliert werden.

   (b) [false] Das Monotonieprinzip besagt, dass jede beschränkte reelle Folge konvergiert.

   (c) [false] Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert für offene und abgeschlossene Intervalle gleichermaßen.

   (d) [true] Der axiomatische Zugang zu den reellen Zahlen umgeht die Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus den ZFC-Axiomen der Mengenlehre indem der Satz von Dedekind zur Definition gemacht wird.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] Eine konvergente Folge (x_n) hat genau einen Grenzwert.

   (b) [true] Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n < y_n$ für alle n, dann auch $x \leq y$.

   (c) [false] Ist (x_n) beschränkt, so hat (x_n) einen Limes.

(d) [true] Der Grenzwert von reellen Folgen respektiert Linearkombinationen.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) [true] Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann kann die Reihe trotzdem konvergieren.

   (b) [false] Falls $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, dann konvergiert die Reihe.

   (c) [true] Falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass alle Reihenglieder x_n die Bedingung $x_n \geq C$ erfüllen, dann divergiert die Reihe.

   (d) [true] Falls die Reihe konvergiert, dann muss die Folge der Reihenglieder x_n eine Nullfolge sein.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) [false] Ist f stetig, so ist f auch beschränkt.

    (b) [false] Ist f stetig, dann gilt $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1)$.

    (c) [true] Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

    (d) [true] Ist f differenzierbar und hat in $x = \frac{1}{2}$ ein lokales Minimum, dann gilt $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Am Vorzeichen von f' lässt sich die Monotonie von f ablesen.

    (b) [false] Jede Nullstelle von f'' ist ein Wendepunkte von f.

    (c) [false] Hat f in x_0 eine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 eine Extremstelle.

    (d) [true] Ist f streng monoton wachsend, dann ist f' überall nicht-negativ.

12. *(Zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion.

    (b) [true] Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

    $$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' \equiv \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

    (c) [false] Für jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann mittels der Formel

    $$F(x) = \int_a^b f(t)dt$$

    eine Stammfunktion gewonnen werden.

    (d) [false] Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

    $$\int_a^x f'(t)dt = f(x).$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Nullfolge.)* Klarerweise konvergiert die Folge

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1)$$

gegen 0. Aber welche der folgenden Argumente dafür sind schlüssig?

(a) [true] Für beliebiges $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $N = 1/\varepsilon^2$ zu wählen, denn dann gilt für alle $n > N$, dass $x_n < \varepsilon$ ist.

(b) [false] Für beliebiges $\varepsilon > 0$ brauchen wir nur $N = 1/\sqrt{\varepsilon}$ zu wählen, denn dann gilt für alle $n > N$, dass $x_n < \varepsilon$ ist.

(c) [true] Weil die Wurzelfunktion stetig ist und $1/n$ eine Nullfolge, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 0.$$

(d) [false] Es gilt

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

und daher mit dem Sandwich-Lemma $1/\sqrt{n} \to 0$.

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$

(b) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ divergiert.

(c) [false] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$

(d) [false] $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}.$

15. *(Konvergente Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

(a) [true] $\displaystyle\frac{2^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty).$

(b) [true] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$

(c) [false] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \to 0.$

(d) [false] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1.$

16. *(Maxima und Minima von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein globales Maximum.

(b) [true] Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat ein lokales Maximum.

(c) [false] Die Funktion $f : (0, 1]$, $f(x) = 1/x$ hat ein lokales Maximum.

(d) [true] Die Funktion $f : (0, 1]$, $f(x) = 1/x$ hat ein lokales Minimum.

17. *(Wurzelfunktion & Ableitung.)* Wir betrachten die folgende Rechnung

$$\sqrt{28} = \sqrt{25+3} \approx \sqrt{25} + \frac{3}{2\sqrt{25}} = 5 + \frac{3}{10} = 5.3$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Überlegung ist korrekt, sie verwendet folgende Tatsache über differenzierbare Funktionen und kleine h:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

(b) [false] Die Überlegung wäre korrekt, wenn nicht beim vorletzten Gleichheitszeichen ein Rechenfehler passiert wäre.

(c) [false] Die Überlegung ist nicht korrekt. Das sieht man auch an der relativ großen Differenz zwischen der Näherung $\sqrt{28} \approx 5.3$ und dem auf 8 Nachkommastellen genauen Wert[1] 5.29150262.

(d) [true] Die Überlegung ist korrekt. Sie verwendet die Tatsache, dass die Wurzelfunktion als (in $x = 25$) differenzierbare Funktion (nahe $x_0 = 25$) gut durch ihre Tangente approximiert wird.

18. *(Gestückelte Funktion.)* Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

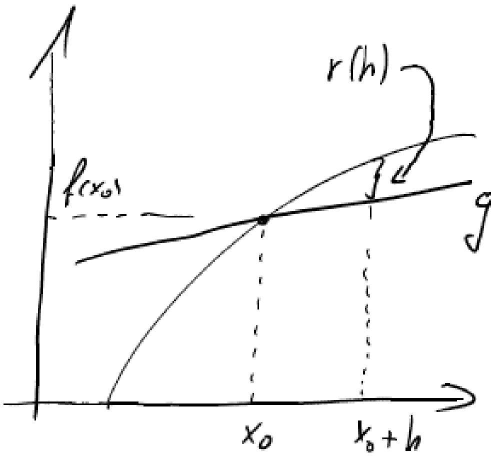
(b) [true] f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) [false] f ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, aber f' ist unstetig in $x_0 = 0$.

(d) [true] f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, weil der Graph dort einen Knick hat.

[1] Dieser Wert ist korrekt!

Teil 2: OFFENE AUFGABEN



[1] (1a) Wir bezeichnen mit r den Fehler zwischen einer Geraden g durch den Pkt $(x_0, f(x_0))$ und der Fkt f, also $r(h) = f(x_0+h) - g(x_0+h)$ siehe Skizze.

Dann gilt ganz klar $r(0) = 0$, weil ja $f(x_0) = g(x_0)$ gilt.

Die charakterisierende Eigenschaft der Tangente ist es nun, dass unter all diesen Geraden nur sie die Eigenschaft besitzt, dass der relative Fehler $\frac{r(h)}{h} \to 0 \; (h \to 0)$.

1(b) Thm: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) eine reelle Fkt, $x_0 \in I$. f ist in x_0 genau dann diff'bar, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt und eine Funktion $r: I \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a \cdot h + r(h) \quad \text{und} \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \; (h \to 0).$$

[2]

1(a) Eine Folge – wie auch eine Funktion – benötigt kein „Bildungsgesetz". Wesentlich ist nur, dass die Glieder der Folge fortlaufend nummeriert sind.

Zum Beispiel bilden die Nachkommastellen von π eine Folge, bei der das n-te Folgenglied die Ziffer der n-ten Nachkommastelle von π ist.

2

1(b) Aufzählungsaspekt: Eine Folge ist eine sukzessive Auflistung, Anordnung von Zahlen oder Objekten. Durch die Erklärung von n als (Zähl-)index, schwingt dieser Aspekt in der angeführten Definition mit.

Zuordnungsaspekt: Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl einen Funktionswert zuordnet. Dieser Aspekt steht im Fokus der gegebenen Def., die in der Bem. 1) präzisiert wird.

Rekursionsaspekt: Jedes Folgenglied a_n $(n>1)$ wird sukzessive aus seinem/n Vorgänger/n konstruiert. Dieser Aspekt findet in der angeführten Def. keine Beachtung.

2(a) Die Antwort ist mathematisch nicht korrekt: Hat die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f eine Nullstelle in x_0, so bedeutet das nicht automatisch, dass f eine Extremstelle in x_0 hat. Beispiel: $f(x)=x^3$ hat in $x=0$ die Ableitung $f'(0)=0$ aber dort keine Extremstelle.
Die NEW-Regel ist nur „von oben nach unten" gelesen korrekt.

Vorteile: Diese Merkregel kann eine Stütze sein, sofern die Leserichtung klar ist. Sie hilft auch beim graphischen Differenzieren.

Nachteil: Ohne dahinterliegendes Verständnis kann das bloße Anwenden solcher Merkhilfen zu Fehlvorstellungen führen (wie die „Expertenantwort" zeigt).

2(b) mögliche Formulierung einer Antwort:

Die NEW-Regel gilt nur im Inneren des Definitionsbereichs oder für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und wird von oben nach unten gelesen. Das heißt: Hat eine Funktion f eine lokale Extremstelle in x_E, dann hat die Ableitungsfunktion f' eine Nullstelle in x_E, da die Tangente in einer lokalen Extremstelle im Inneren des Definitionsbereichs waagrecht ist und die Steigung der Funktion an dieser Stelle null ist. An der Wendestelle x_W einer Funktion f gilt, dass die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert. Die Steigung von f nimmt in x_W ihren (lokal) größten/kleinsten Wert an. Somit ändert sich in x_W das Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion. f' hat in x_W also eine lokale Extremstelle, was wiederum bedeutet, dass f'' in x_W eine Nullstelle hat.

3

1 (a) Der Ausdruck V gibt den für diese 10 km lange Fahrt durchschnittlichen Benzinverbrauch in L/km an.
Vorrangig wird die Mittelwertsgrundvorstellung angesprochen, da mit dem Integral über einem Intervall dividiert durch die Intervalllänge ein Mittelwert berechnet wird.

1 (b) Dividiert man das Integral einer Funktion f über einem Intervall mit der Intervalllänge c durch die Intervalllänge, erhält man einen Mittelwert m:

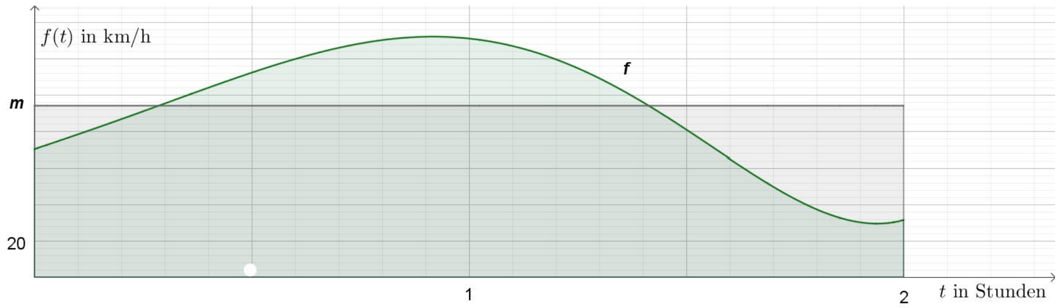
$$m = \frac{1}{c} \cdot \int_{x_1}^{x_1+c} f(x)\,dx$$

Dieser Mittelwert m ist grafisch interpretiert jener Wert, für den das Rechteck mit den Seitenlängen m und c flächeninhaltsgleich mit der Fläche, die die Funktion in diesem Intervall mit der x-Achse einschließt.
In entsprechenden Sachsituationen wird damit ein Durchschnittswert berechnet.

Mögliches Beispiel:

Die Geschwindigkeit eines Autos während eines zweistündigen Abschnitts einer Fahrt wird durch eine Funktion f beschrieben ($f(t)$ in km/h, t in h).

Der Wert m wird gegeben durch $m = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 f(t)\,dt$.



→ Interpretiere m im gegebenen Sachzusammenhang.

→ Interpretiere den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen m und 2 im gegebenen Sachzusammenhang.