Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23, 3. Termin, 21.6.2023
Sonja Kramer & Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man eine sinnstiftende inhaltliche Deutung dieses Begriffs.
   (b) [true] Der Begriff der Grundvorstellung kann sowohl normativ als auch deskriptiv verwendet werden.
   (c) [false] Zu jedem Aspekt eines mathematischen Begriffs gibt es jeweils genau eine Grundvorstellung.
   (d) [true] Normative Grundvorstellungen werden durch eine fachdidaktische Analyse des jeweiligen mathematischen Begriffs gewonnen.
2. (*Wintersche Grunderfahrungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Grunderfahrungen beziehen sich speziell auf eine spezifische Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff.
   (b) [true] Die 1. Wintersche Grunderfahrung („mathematischer Blick") wird im Kontext der Analysis z. B. bei Modellierungen mit Hilfe des Ableitungsbegriffs gestärkt.
   (c) [true] Die 2. Wintersche Grunderfahrung („mathematische Welt") kann z. B. als Rechtfertigung für das Unterrichten von Inhalten wie Grenzwertsätzen und Ableitungsregeln dienen.
   (d) [false] Die 3. Wintersche Grunderfahrung („Heuristische Fähigkeiten") bezieht sich vorwiegend auf konkrete Anwendungen der Mathematik im Alltag.
3. (*Graph einer Funktion.*) Welche Aussagen sind korrekt? Der Graph $G(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   (a) [true] ist eine Menge von geordneten Paaren.
   (b) [true] ist die Menge aller geordneten Paare $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$.
   (c) [false] kann z. B. die beiden Paare $(0, 1)$ und $(0, 2)$ enthalten.
   (d) [false] kann niemals die Paare $(0, 1)$ und $(1, 1)$ enthalten.
4. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) [true] Wenn (x_n) konvergent ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.
   (b) [false] Wenn (x_n) nach unten beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

(c) [true] Wenn (x_n) monoton fallend ist, dann ist (x_n) nach oben beschränkt.

(d) [false] Wenn (x_n) monoton ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.

5. (*Vorstellungen zum Grenzwertbegriff*) Wir betrachten die Aussage:

   > Jede Permutation einer konvergenten Folge ist wieder konvergent, und zwar gegen denselben Grenzwert.

   (Unter einer Permutation einer Folge versteh man eine neue Folge, die man aus der alten erhält, indem man die Reihenfolge beliebig vieler Glieder beliebig verändert.)

   Welche der folgenden Argumentationen sind korrekt?

   (a) [false] Die Aussage ist falsch. Es können ja beliebig viele (also möglicherweise z. B. fast alle) Glieder geändert werden.

   (b) [false] Der erste Teil der Aussage ist korrekt, der zweite aber falsch. Der Grenzwert der permutierten Folge kann sich ändern. Ein Beispiel dafür ist $x_n = 1/n$ und als permutierte Folge $y_n = 1 - 1/n$.

   (c) [false] Die Aussage ist korrekt. Unendlich viele Folgenglieder liegen in jeder ε-Umgebung um den Grenzwert der ursprünglichen Folge und daher nach der Permutation auch unendlich viele Folgenglieder der permutierten Folge. Somit hat sie denselben Limes.

   (d) [true] Die Aussage ist korrekt. Außerhalb jeder ε-Umgebung des Grenzwerts der ursprünglichen Folge liegen nur endlich viele Folgenglieder der ursprünglichen Folge. Daher liegen auch nach der Permutation nur endlich viele Folgenglieder nun der permutierten Folge außerhalb dieser Umgebung und sie konvergiert daher gegen denselben Grenzwert.

6. (*Zur Differenzierbarkeit.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Kann man den Graphen von f in einem durchzeichnen, dann ist f differenzierbar.

   (b) [true] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat ihr Graph dort keinen Knick.

   (c) [true] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat ihr Graph dort keinen Sprung.

   (d) [true] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 eine waagrechte Tangente.

2 Sätze & Resultate

7. (*Rund um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Weil jede reelle Cauchy-Folge konvergiert, ist $\mathbb{R}$ vollständig.

   (b) [false] Jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

   (c) [false] Jede monotone reelle Folge konvergiert.

(d) [true] Weil jede nach oben beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum hat, ist $\mathbb{R}$ (ordnungs)vollständig.

8. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?

   (a) [false] Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann kann die Reihe nicht konvergieren.

   (b) [true] Falls $x_n \not\to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, dann divergiert die Reihe.

   (c) [false] Falls $|x_n| \leq 1/n$ für alle n gilt, dann konvergiert die Reihe.

   (d) [true] Falls die Reihe konvergiert, dann gilt $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

9. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Ist f stetig, so ist f auch beschränkt.

   (b) [true] Ist f stetig, so nimmt f Maximum und Minimum an.

   (c) [false] Ist f stetig, dann ist f auch differenzierbar.

   (d) [true] Ist f stetig, dann ist f auch integrierbar.

10. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) [true] Ist f stetig, so hat f auch eine Stammfunktion.

    (b) [false] Die Ableitungen zweier verschiedener Stammfunktionen von f stimmen bis auf eine (additive) Konstante $C \neq 0$ überein.

    (c) [true] Zwei verschiedene Stammfunktionen von f unterscheiden sich durch eine (additive) Konstante $C \neq 0$..

    (d) [false] Hat f eine Stammfunktion, dann ist f auch differenzierbar.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [true] Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

    (b) [false] Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

    (c) [true] Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann ist die Tangente von f in x_0 waagrecht.

    (d) [false] Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, dann gibt es eine Umgebung U von x_0 sodass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \neq x_0$ in U gilt.

12. *(Zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] Jedes integrierbare $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion.

    (b) [false] Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

    $$\frac{d}{dt} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

(c) [true] Für jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann mittels der Formel

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion gewonnen werden.

(d) [true] Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte von Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $\frac{2^n}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$.

(b) [true] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$.

(c) [false] $\frac{3n^2 + 4n + 7}{4n^2 + n - 4} \to -\frac{7}{4} \ (n \to \infty)$.

(d) [true] $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

14. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Polynomfunktionen sind beliebig oft differenzierbar.

(b) [true] Die Ableitung von $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ kann nach der Produktregel wie folgt berechnet werden:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = (1 \cdot x) + (x \cdot 1) = 2x.$$

(c) [false] Die Sinusfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) = 0$.

(d) [false] Die Ableitung der Tangensfunktion kann aus der Quotientenregel wie folgt berechnet werden:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x).$$

15. *(Grenzwerte von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

(b) [false] $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

(c) [true] $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

(d) [true] $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.

16. *(Kurvendiskussion.)* Welche der Aussagen für die folgenden Funktionen sind korrekt?

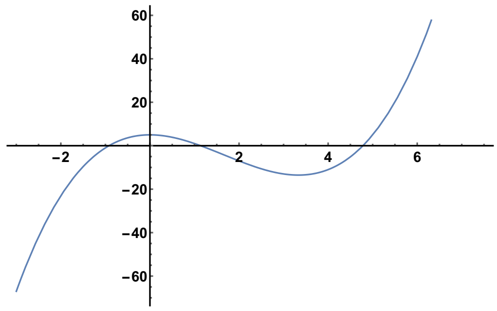
(a) [true] $f(x) = 2x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ hat in $x = 0$ eine Nullstelle und eine Nullstelle der Ableitung.

(b) [false] $f(x) = \sqrt{x}$ hat für alle $x \geq 0$ die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$ und ist daher für alle $x \geq 0$ monoton wachsend.

(c) [false] $f(x) = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ hat Nullstellen in $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ und daher hat die Cosinusfunktion dort jeweils Extremstellen.

(d) [true] Für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher hat f keine Extremstellen.

17. *(Graphische Kurvendiskussion, 1.)* Wir betrachten die Funktion f mit dem abgebildeten Graphen:



Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] f hat im Intervall $[-2, 6]$ zwei lokale Extrema.

(b) [true] f hat im Intervall $[-2, 6]$ eine Wendestelle.

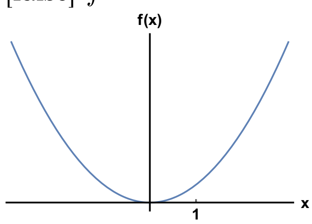
(c) [false] f' ist im Intervall $[-2, 2]$ positiv.

(d) [true] f' ist im Intervall $[-2, 0]$ nicht negativ.

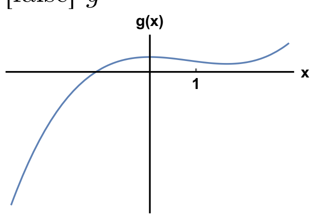
18. *(Graphische Kurvendiskussion, 2.)* Welche der unten dargestellten Funktionen f, g, h bzw. i hat die folgenden Eigenschaften

$$f'(0) \geq 0, \qquad f'(1) < 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x) \leq 0 \quad \text{für alle sichtbaren } x?$$

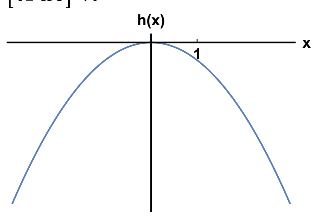
(a) [false] f



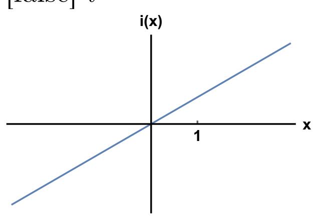
(b) [false] g



(c) [true] h



(d) [false] i



Teil 2 – Offene Aufgaben

[1] Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1 (a) Die Ableitung einer Linearkombination differenzierbarer Funktionen ist die Linearkombination der Ableitungen.

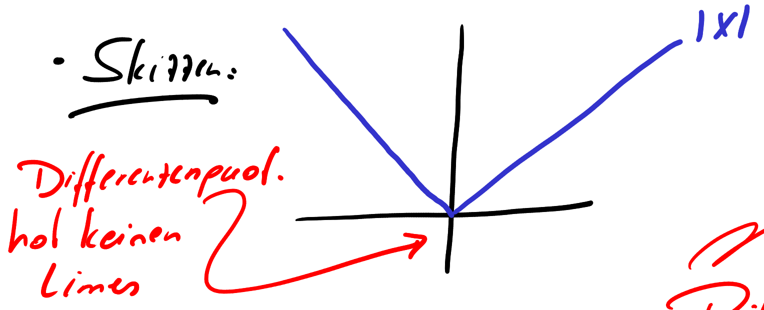
(b) • $f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ nicht differenzierbar, weil der Differenzenquotient bei $x_0=0$ keinen Grenzwert besitzt.

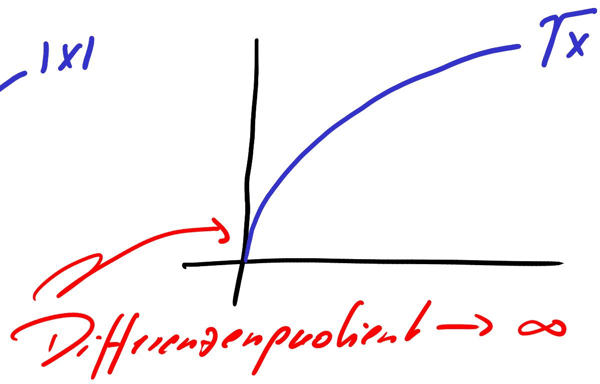
[Es gibt zwar den links- und den rechtsseitigen Limes des Differenzenquotienten – diese sind aber ± 1 also ungleich und der Limes existiert nicht.]

• $g(x)=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ ist in $x_0=0$ nicht differenzierbar, weil der Differenzenquotient bei $x_0=0$ den Limes $+\infty$ hat.

$$\left[\ \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=1/\sqrt{h}\rightarrow\infty \quad (h\rightarrow 0)\ \right]$$

• Skizzen:





(c) (i) $f(x)=x^3$ ist diffbar, streng monoton steigend und $f'(0)=0$

(ii) Ein solches Bsp gibt es nicht – es würde dem hinreichenden Kriterium f. Extremwerte widersprechen

$f'(x_0)=0 \quad f''(x_0)>0 \Rightarrow f$ hat Minimum in x_0.

$\qquad\qquad\qquad\quad <0 \Rightarrow f$ hat Maximum

2.1 Grundvorstellungen

a) Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs hingegen ist eine Facette dieses Begriffs, mit der dieser fachlich beschrieben werden kann.

b) Darunter versteht man im Zusammenhang mit dem Integralbegriff
- die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten.
- die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer Funktion oder Berandung.

Im Unterricht kann mit dem Badewannenbeispiel (Vorlesung) aus der Zufallsgeschwindigkeit des Wassers (= momentane Änderungsrate der Wassermenge) auf die Wassermenge in der Wanne zu jedem Zeitpunkt zurückgeschlossen werden.
Die rekonstruierten Funktionswerte (das sind die Integrale) sind interpretierbar und berechenbar als orientierte Flächeninhalte.

2.2 Stetigkeit von Funktionen.

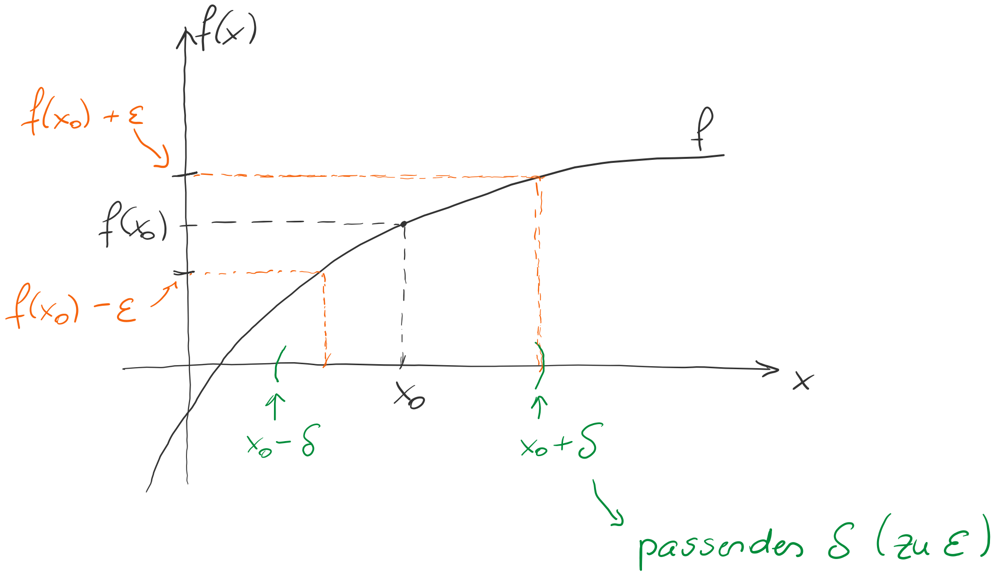
a) Der erste Satz der Formulierung ist heikel, weil es Funktionen gibt, die stetig sind, deren Graph aber keine endliche Länge hat, wie z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

b) $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$.

c) Eine Funktion ist stetig in x_0, wenn ein „kleines Wackeln" am Argument in der Nähe von x_0 nur zu einem „kleinen Wackeln" der Funktionswerte um $f(x_0)$ zur Folge hat.



3.1 Modellierung iterativer Prozesse.

a) rekursive Darstellung:

$$F(n+1) = F(n) + 0{,}07 \cdot (800 - F(n)) = 0{,}93 \cdot F(n) + 56$$

Entwicklung der expliziten Darstellung:

$$F(1) = 0{,}93 \cdot 500 + 56$$

$$F(2) = 0{,}93 \cdot (0{,}93 \cdot 500 + 56) + 56 = 0{,}93^2 \cdot 500 + 0{,}93 \cdot 500 + 56$$

$$F(3) = 0{,}93^3 \cdot 500 + 56 \cdot (0{,}93^2 + 0{,}93 + 1)$$

$$\vdots$$

$$F(n) = 0{,}93^n \cdot 500 + 56 \cdot \underbrace{(0{,}93^{n-1} + 0{,}93^{n-2} + \cdots + 1)}_{\sum_{k=0}^{n-1} 0{,}93^k = \frac{1-0{,}93^n}{0{,}07}}$$

$$\Rightarrow F(n) = 0{,}93^n \cdot 500 + 800 \cdot (1 - 0{,}93^n) = 800 - 300 \cdot 0{,}93^n$$

b) In natürlicher Weise treten folgende Themen auf:

- ·) die Frage nach dem Langzeitverhalten, d.h. der Entwicklung des Karpfenbestands
- ·) die Vor- und Nachteile der rekursiven und expliziten Darstellung
- ·) das Umschreiben der rekursiven in die explizite Darstellung
- ·) die endliche geometrische Reihe im Anwendungskontext