NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2022/23
4. Termin, 27.9.2023
GRUPPE A

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung"** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und Ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(6)	(5)	(7)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Grundvorstellungen und Grunderfahrungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Grundvorstellungen sind ein theoretisches Konzept zur Beschreibung mentaler Repräsentationen mathematischer Begriffe.
   (b) In den Grundvorstellungen manifestiert sich der allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts.
   (c) Nach Winter ist der Mathematikunterricht dadurch allgemeinbildend, dass er (die) drei Grunderfahrungen ermöglicht.
   (d) Die drei Winterschen Grunderfahrungen beschreiben das Verhältnis zwischen mathematischen Inhalten und individueller Sinnstiftung.

2. (*Zum Funktionsbegriff.*) Welche der folgenden Aussagen über den Funktionsbegriff sind korrekt?
   (a) Bei der Objektvorstellung des Funktionsbegriffs steht die Zuordnung von Werten durch die Funktion im Zentrum.
   (b) Mit der Kovariationsvorstellung wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken.
   (c) Der Zuordnungsaspekt begreift eine Funktion $f : A \to B$ als eine Zuordnung zwischen den Elementen zweier Mengen A und B, wobei jedem Element von B ein Element von A zugeordnet wird.
   (d) Der Paarmengenaspekt besagt, dass eine Funktion von A nach B durch eine Teilmenge $G \subseteq A \times B$ gegeben ist, die folgende Eigenschaft besitzt: Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.

3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) Wenn x Häufungswert von (x_n) ist, dann ist x auch Grenzwert von (x_n).
   (b) (x_n) ist beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, sodass für alle Folgenglieder x_n gilt: $|x_n| \leq C$.
   (c) Wenn (x_n) einen Limes hat, dann ist (x_n) beschränkt.
   (d) Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) schon beschränkt.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Die Grenzwertdefinition beruht stark auf dem Begriff des potentiell Unendlichen.
   (b) Die Definition des Grenzwerts ist vor allem mit der Annäherungsvorstellung verbunden.

(c) Der Begriff des aktual Unendlichen hilft zu verstehen, dass ein unendlicher Prozess ein endliches Ergebnis haben kann.

(d) Das aktual Unendliche geht von der Vorstellung eines beliebig oft wiederholbaren Prozesses aus.

5. (*Differenzierbarkeit.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Der Graph einer differenzierbaren Funktion kann Knicke haben aber keine Sprünge.

   (b) Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

   (c) Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, so hat f dort eine waagrechte Tangente.

   (d) Der Graph einer differenzierbaren Funktion kann Sprünge haben.

6. (*Integrierbarkeit.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Konvergieren Ober- und Untersummen, dann ist f sicher integrierbar.

   (b) Das Riemannintegral von f ist (falls es existiert) der gemeinsame Limes von Ober- und Untersummen.

   (c) Das Riemannintegral von f ist (falls es existiert) der Limes der Obersummen.

   (d) Ist f integrierbar, dann sind Ober- und Untersummen gleich.

2 Sätze & Resultate

7. (*Zur Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$.) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Jede beschränkte reelle Folge hat genau einen Häufungswert.

   (b) Das Intervallschachtelungsprinzip funktioniert für abgeschlossene aber nicht für offene Intervalle.

   (c) Der Satz von Dedekind besagt, dass (bis auf Isomorphie) genau ein ordnungsvollständiger geordneter Körper existiert, der $\mathbb{Q}$ als geordneten Unterkörper besitzt.

   (d) Das Supremumsaxiom besagt, dass jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum hat.

8. (Resultate über Folgenkonvergenz.) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?
   (a) Eine konvergente Folge (x_n) hat höchstens einen Grenzwert.
   (b) Konvergiert (x_n) gegen x und (y_n) gegen y und gilt $x_n \leq y_n$ für alle n, dann auch $x \leq y$.
   (c) Ist (x_n) beschränkt, so hat (x_n) einen Limes.
   (d) Der Grenzwert von reellen Folgen respektiert Produkte.
9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sind korrekt?
   (a) Sind alle Glieder x_n der Reihe positiv, dann ist die Reihe sicher divergent.
   (b) Falls die Reihe konvergiert, so muss $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gelten.
   (c) Falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass alle Reihenglieder x_n die Bedingung $x_n \geq C$ erfüllen, dann divergiert die Reihe.
   (d) Falls die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, dann konvergiert automatisch die Reihe.
10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind korrekt?
   (a) f ist automatisch auch beschränkt.
   (b) Ist f stetig, dann gilt $\lim_{x\nearrow b} f(x) = f(b)$.
   (c) Ist f stetig, so hat f Maximum und Minimum.
   (d) Ist f stetig, so hat f Supremum und Infimum.
11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Jede Nullstelle von f'' mit an dieser Stelle nicht-verschwindender 3. Ableitung ist ein Wendepunkte von f.
   (b) Hat f in x_0 eine Extremstelle, dann hat f dort auch eine waagrechte Tangente.
   (c) Ist f streng monoton wachsend, dann ist f' überall positiv.
   (d) Am Vorzeichen von f'' lässt sich die Krümmung von f ablesen.
12. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?
   (a) Jede stetige Funktion hat eine eindeutige Stammfunktion.
   (b) Jede differenzierbare Funktion ist (auf abgeschlossenen Intervallen) auch Riemann-integrierbar.

(c) Jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch stetig.

(d) Ist f stetig auf $\mathbb{R}$ mit Stammfunktion F, dann gilt für $a < b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(s)ds = F(a) - F(b)\,.$$

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte von Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $\dfrac{2^n}{n^2} \to 0 \ (n \to \infty)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 0$ für alle $a > 0$.

(c) $\dfrac{7n^2 + 4n + 7}{4n^2 + n - 4} \to \dfrac{7}{4} \ (n \to \infty)$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

14. *(Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Die periodische Dezimalzahl $0.\bar{3}$ ist durch die geometrische Reihe

$$3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

gegeben.

(b) Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^k$.

(c) Die Summenformel für die endliche geometrische Reihe lautet

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1+q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für alle } q \in \mathbb{R}.$$

(d) $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

15. *(Grenzwerte von Funktionen.)* Welche Aussagen sind korrekt?

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

(b) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(x) = 0$.

16. *(Differenzieren.)* Welche der folgenden Rechnungen sind korrekt?

   (a) $\left(e^{\sin(x)}\right)' \;=\; e^{\sin(x)}\,\cos(x)$

   (b) $(\sin(e^x))' \;=\; \cos(e^x)$

   (c) $\left(\sin(e^{x^2})\right)' \;=\; 2x\,e^{x^2}\,\sin(e^{x^2})$

   (d) $\left(e^{\sin(x^2)}\right)' \;=\; e^{\sin(x^2)}\,2x\,\cos(x^2)$

17. *(Die Funktion $f(x) = x^4$.)* Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4$$

   sind korrekt?

   (a) f ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

   (b) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit nicht-negativer Ableitung.

   (c) $f''(0) = 0$ und daher hat f in $x = 0$ kein Extremum.

   (d) f hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Umkehrabbildung.

18. *(Vorzeichenfunktion.)* Wir betrachten die Vorzeichenfunktion

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

   Welche die folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) sign ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar.

   (b) sign ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, obwohl der Graph keinen Knick hat.

   (c) sign ist stetig auf $\mathbb{R}$.

   (d) $\operatorname{sign}^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Folgen, Konvergenz und Vollständigkeit.*
   (a) Für zwei konvergente reelle Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ gilt ja bekanntlich
   $$\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \tag{1}$$
   falls $\lim y_n \neq 0$ gilt. Formulieren Sie diese Aussage in eigenen Worten, völlig ohne Verwendung von Formeln. (1 Punkt)

   (b) Ist die Aussage für zwei konvergente reelle Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ korrekt?
   $$x_n < y_n \quad \text{für alle } n \quad \Longrightarrow \lim x_n < \lim y_n \tag{2}$$
   Argumentieren Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. (2 Punkte)

   (c) Erklären Sie, warum die Vollständigkeit der reellen Zahlen in der Analysis wichtig ist. Geben Sie das Ihrer Meinung nach wichtigste Resultat der Analysis an, das auf der Vollständigkeit beruht. (3 Punkte)

2 Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

1. *Fundamentale Ideen der Analysis.*
   Ein fachdidaktisches Prinzip ist die Orientierung an fundamentalen Ideen. Nennen Sie zumindest vier fundamentale Ideen der Analysis und erläutern Sie an einer der Ideen die drei charakteristischen Merkmale fundamentaler Ideen. (5 Punkte)

3 Aufgaben zur Unterrichtspaxis

1. *Alternierende Folgen.*
   Eine Lehrerin lässt ihre Schüler:innen folgende Fragestellung ausarbeiten:

   > *Können alternierende Folgen konvergieren? Begründe deine Antwort.*

   Ein Schüler gibt folgende Ausarbeitung ab:

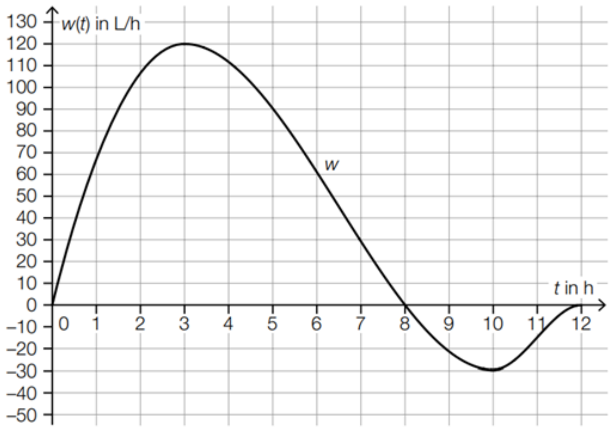
   > Alternierende Folgen können nicht konvergieren.
   > Begründung: Konvergente Folgen haben einen Grenzwert, das heißt, dass in jeder noch so kleinen Umgebung um diesen Grenzwert unendlich viele Folgenglieder liegen. Da die Folgenglieder von alternierenden Folgen ständig das Vorzeichen wechseln, kann es ja keine noch so kleine Umgebung um einen Wert geben, in der unendlich viele Folgenglieder liegen, und damit können alternierende Folgen nicht konvergent sein.

Analysieren Sie die Ausarbeitung des Schülers: Was würden Sie als korrigierende Lehrkraft als richtig bewerten und was würden Sie korrigieren? Formulieren Sie zu den Aspekten, die Sie korrigieren würden, hilfreiche Erklärungen für den Schüler. (2 Punkte)

2. *Grundvorstellungen zum Integralbegriff.*
Der Beginn einer Aufgabe aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung (19.03.2023) lautet:

   Die Funktion w: $[0;12] \to \mathbb{R}$ beschreibt näherungsweise die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $w(t)$ in L/h).

   In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von w dargestellt.



   (a) Geben Sie zu den folgenden Aussagen die jeweils größtmöglichen Zeitintervalle an (1 Punkt):

      (i) Die Wassermenge im Teich nimmt ab.

      (ii) Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.

   (b) Welche Grundvorstellung zum Integralbegriff steht bei der Bearbeitung obiger Aufgabe im Zentrum. Formulieren Sie diese explizit aus. (2 Punkte)

   (c) Finden Sie eine weitere Fragestellung für (Ihre) Schüler:innen, die auf eine der anderen Grundvorstellungen zum Integralbegriff abzielt. Formulieren Sie zu dieser Fragestellung eine Lösungserwartung. (2 Punkte)