1
2
3
4
G

Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Note:

Prüfung

Funktionalanalysis

Sommersemester 2023, Roland Steinbauer

2. Termin, 27.9.2023

1. *Normierte Vektorräume.*

   (a) *Der Raum $L(E, F)$.*
   Falls E ein normierte Vektorraum ist und F ein Banachraum, dann ist $L(E, F)$ vollständig. Skizzieren Sie den Beweisverlauf in eigenen Worten (**ohne** den ganzen Beweis aufzuschreiben) und erklären sie explizit, wo die Vollständigkeit von F eingeht. (3 Punkte)

   (b) *Lemma von Riesz und seine Folgen.*
   Formulieren Sie das Lemma von Riesz und verwenden Sie es um zu zeigen, dass ein normierter Vektorraum, in dem der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt, schon endlichdimensional sein muss. (4 Punkte)

   (c) *Die Nicht-Separabilität von l^∞.*
   Zeigen Sie, dass der Folgenraum l^∞ nicht separabel ist. Welche Konsequenzen hat diese Tatsache für den Raum l^1? (3 Punkte)

2. *Hilberträume & Operatoren.*

   (a) *Projektionssatz.*
   Zeige: Für einen abgeschlossenen Teilraum M eines Hilbertraumes H gilt $M^{\perp\perp} = M$. (2 Punkte)

   (b) *Isometrie separabler Hilberträume.*
   Bekanntlich gilt, dass jeder separable Hilbertraum H isometrisch isomorph zu l^2 ist. Geben Sie die entsprechende Abbildung an und argumentieren Sie, warum sie die nötigen Eigenschaften besitzt. (4 Punkte)

   (c) *Kanonische Darstellung kompakter Operatoren.*
   Jeder kompakte Operator $T \neq 0$ auf einem Hilbertraum E besitzt die kanonische Darstellung

$$T = \sum_{n\geq 0} s_n(T)\, f_n \otimes e_n^*\,,$$

wobei $s_n(T)$ eine endliche oder eine Nullfolge reeller Zahlen und f_n, e_n Orthonormalsysteme in E sind. Leiten Sie dieses Darstellung aus dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren her. (4 Punkte)

3. *Hauptsätze der Funktionalanalysis.*

   (a) *Separabilität via Dualraum.*
   Ein normierter Vektorraums E ist separabel, falls E' separabel ist. Zeigen Sie diese Aussage und erklären Sie wo und wie Sie dabei den Satz von Hahn-Banach verwendet haben. (4 Punkte)

   (b) *Vom Satz vom abgeschlossenen Graphen zum Satz von Hellinger-Toeplitz.*
   Formulieren Sie den Satz von abgeschlossenen Graphen und leiten Sie daraus den Satz von Hellinger-Toeplitz her. (5 Punkte)

   (c) *Unvollständige reflexive Räume.*
   Können reflexive normierte Vektorräume unvollständig sein? Begründen Sie! (1 Punkt)

4. *Beispiele und Gegenbeispiele.*
   Geben Sie jeweils ein Beispiel an und begründen Sie kurz, warum es die geforderten Eigenschaften hat bzw. begründen Sie, warum es kein solches Beispiel geben kann. (Jeweils 2 Punkte)

   (a) Einen unbeschränktes lineares Funktional auf einem normierten Vektorraum.

   (b) Einen Hilbertraum mit nicht-kompakter Einheitskugel.

   (c) Einen kompakten unbeschränkten Operator zwischen Banachräumen.

   (d) Einen abgeschlossenen Differentialoperator, der nicht stetig ist.

   (e) Einen reflexiven und einen nicht reflexiven Banachraum.