

# Aufgabensammlung

## Funktionalanalysis

Roland Steinbauer

Sommersemester 2023

(Version 14. Februar 2023)

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für die *Übungen zur Funktionalanalysis*, die die gleichnamige Vorlesung begleiten. Die Übungen und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloss die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. in den Übungen ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe entsteht daher auf der Basis beider Veranstaltungen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepasst; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen“ (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell—aber nicht nur—für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur (für einen Überblick siehe die Literaturliste auf der Vorlesungshomepage) und/oder Gruppenarbeit.

## 1 Banach- und Hilberträume: Grundlagen und Beispiele

### 1.1 Normierte Vektorräume: Grundbegriffe

#### 1. *Wichtige elementare Ungleichungen.*

Wiederhole aus der Analysis die folgenden (für uns im Folgenden wichtigen) Ungleichungen (siehe zB. [Forster, Analysis 1, §16, Hilfssatz, Satz 7, Satz 8]).

Die Zahlen  $p$  und  $q$  seien dabei stets konjugierte Indizes, d.h.  $1/p + 1/q = 1$  mit der Vereinbarung  $1/\infty = 0$ . Weiters bezeichne  $\mathbb{K}$  immer  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ .

(i) Für  $1 < p, q$  und  $x, y \geq 0$  gilt  $x^{1/p}y^{1/q} \leq x/p + y/q$ .

(ii) (Hölder Ungleichung) Für  $1 < p, q$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

(iii) (Minkowski Ungleichung) Für  $1 \leq p < \infty$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Bereite eine Minipräsentation (ca. 5 Minuten) vor, in der du die Ungleichungen präsentierst, die Cauchy-Schwarz Ungleichung als Spezialfall vorstellst und kurz und bündig die Beweise skizzierst. Achte insbesondere auf die zulässigen Bereiche von  $p$  und  $q$ . Wie können (ii) und (iii) umformuliert werden um auch  $p = \infty$  zu erlauben?

#### 2. *Die $p$ -Normen auf $\mathbb{K}^n$ .*

Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist die  $p$ -Norm

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(vgl. Bsp. 1.2A(i)) tatsächlich eine Norm auf  $\mathbb{K}^n$ . Diese Tatsache ist schon aus der Analysis bekannt. Bereite eine Minipräsentation (ca. 5 Minuten) vor, in der du die Gültigkeit der respektiven Eigenschaften (N1)–(N3) für die verschiedenen Fälle  $p = 1$ ,  $p = \infty$ ,  $p = 2$ , sowie  $p$  allgemein diskutierst. Achte insbesondere darauf Triviales von Nichttrivialem zu trennen!

3. *Geometrisches zu den  $p$ -Normen im  $\mathbb{R}^2$ .*

Im  $\mathbb{R}^2$  seien die beiden Geraden  $g$  und  $h$  gegeben durch die Gleichungen  $g : x + y = 1$  und  $h : y = 1$ . Bestimme jeweils die dem Ursprung am nächsten gelegenen Punkte, wenn die Abstände mittels der 2-, der 1- bzw. der  $\infty$ -Norm gemessen werden.

4.  $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_\infty)$ .

Zeige, dass die Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

(vgl. 1.2A(ii)) auf dem Vektorraum der komplexwertigen, beschränkten Funktionen auf der beliebigen Menge  $X$  tatsächlich eine Norm ist.

5. *Die Minkowski und die Hölder Ungleichung für Integrale.*

Wie schon für den Fall der  $p$ -Normen am  $\mathbb{K}^n$  wird die Normeigenschaft (N3) für die  $p$ -Normen für Funktionen (vgl. 1.2(iii))

$$\|f\|_p := \left( \int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

mittels der Minkowski Ungleichung nachgewiesen. Formuliere diese und auch die Hölder Ungleichung für Integrale. Welche Funktionen sind dabei zugelassen? Wie werden diese Ungleichungen bewiesen? Bereite wiederum eine Minipräsentation (ca. 5 Minuten) vor und beachte die zulässigen Bereiche von  $p$  und  $q$ .

6. *Normierte Vektorräume oder nicht?*

Welche der untenstehenden Paare sind tatsächlich normierte Vektorräume? Warum, warum nicht?

(i)  $(T[0, 1], \|\cdot\|_1)$ , mit  $T[0, 1]$ , die Treppenfunktionen auf  $[0, 1]$ .

(ii)  $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ , mit  $\mathcal{C}(\Omega)$  der Vektorraum der stetigen Funktionen auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

(iii)  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_1)$ .

(iv)  $(L[a, b], \|\cdot\|_1)$ , mit  $L[a, b]$  die Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$ .

(Falls dir das Lebesgue-Integral (noch) ein wenig unheimlich ist, ersetze  $L[a, b]$  durch den Vektorraum  $R[a, b]$  der Riemann-integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$ . An der Antwort ändert sich dadurch nichts!)

(v)  $(\{f \in \mathcal{C}[a, b] : |f(x)| \leq 1\}, \|\cdot\|_\infty)$

Wie könnten in den negativ ausgegangenen Fällen die Normeigenschaften doch erzwungen werden? Insbesondere welcher Trick (welche Methode) wird in der Mathematik üblicherweise verwendet, um die nicht erfüllte Eigenschaft  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  doch zu erhalten?

7. *Fingerübungen zur Konvergenz in normierten Vektorräumen.*

(i) (Stetigkeit der Vektorraumoperationen und der Norm) Beweise 1.4(vii), i.e., dass die Vektorraumoperationen und die Norm stetig sind.

(ii) (Glieder konvergenter Reihen) Beweise 1.4(viii), i.e., dass die Glieder einer konvergenten Reihe notwendigerweise eine Nullfolge bilden.

(iii) (Cauchyfolgen und Teilfolgen) Ziel dieser Aufgabe ist es den letzten Schritt im Beweis von Satz 1.7 explizit zu machen. Zeige also, dass eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt schon selbst konvergiert—und zwar gegen den Grenzwert der Teilfolge.

## 1.2 Vektorräume mit Skalarprodukt

8. *Skalarprodukteigenschaften.*

Zeige, dass

$$\langle f|g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  bildet. Wie sieht die von  $\langle | \rangle$  induzierte Norm aus?

9. *Abstandssumme für Einheitsvektoren.*

Ziel dieser Aufgabe ist es die folgende Aussage zu zeigen: Für Einheitsvektoren  $e_i$  in einem Prähilbertraum gilt

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|e_i - e_j\|^2 \leq n^2. \quad (*)$$

Zeige zunächst, dass für beliebige Vektoren  $x_1, x_2, x_3$  die Gleichung

$$\|x_1 - x_2\|^2 + \|x_2 - x_3\|^2 + \|x_3 - x_1\|^2 + \|x_1 + x_2 + x_3\|^2 = 3(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2)$$

gilt. Verallgemeinere diese dann auf  $n$ -Tupel und wende die so erhaltene Aussage auf die Einheitsvektoren an. Wann gilt Gleichheit in  $(*)$ ?

10. *Polarisierungsformeln.*

- (i) Beweise die Polarisierungsformeln (Satz 1.13), d.h. zeige, dass in jedem Prähilbertraum für die 2-Norm

$$\langle v|w \rangle = \frac{1}{4} \left( \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \right) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \quad \text{bzw.}$$

$$\langle v|w \rangle = \frac{1}{4} \left( \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2 \right) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$

gilt. (*Tipp:* Die Formel im komplexen Fall ist leichter zu merken, falls „-“ durch „ $i^2$ “ und „- $i$ “ durch „ $i^3$ “ ersetzt wird.)

- (ii) Welche Eigenschaften des Skalarprodukts (im reellen bzw. komplexen Fall) hast du bei obiger Rechnung *tatsächlich* verwendet? Für welche Klassen von Sesquilinearformen gelten daher die Polarisierungsformeln? (vgl. auch Bem. 1.17).

11. *Parallelogrammgleichung.*

- (i) Beweise die Parallelogrammgleichung (Satz 1.14), d.h. zeige, dass im Prähilbertraum

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

gilt.

- (ii) Der Name „Parallelogrammgleichung“ ist abgeleitet vom Parallelogrammgesetz in  $\mathbb{R}^2$ . Formuliere und beweise diese elementargeometrische Aussage.

## 1.3 Beispiele

12. *Die  $l^p$ -Räume.*

Vervollständige den Beweis von 1.22(i) indem du zeigst, dass alle  $l^p$ -Räume Banachräume sind.

*Tipp:* Für den einzigen nichttrivialen Punkt im Beweis der Normeigenschaften ziehe Aufgabe 1(iii) bzw. Bemerkung 1.24 heran. Der Beweis der Vollständigkeit kann völlig analog zum Fall des  $l^2$  aus der Vorlesung geführt werden.

13. *Der Raum der Nullfolgen.*

Vervollständige weiter den den Beweis von 1.22(i) indem du zeigst, dass der Raum  $c_0$  der Nullfolgen ein Banachraum ist.

*Tipp:* Gehe den Beweis für den Raum  $c$  der konvergenten Folgen aus der Vorlesung durch und modifiziere ihn entsprechend. Das ist gar nicht schwer!

14. *Keine Hilberträume.*

Mache die Hinweise im Beweis von 1.22(ii) explizit und zeige, dass

- (i) keiner der Räume  $l^\infty$ ,  $c$  und  $c_0$  ein Hilbertraum ist und
- (ii)  $l^p$  genau dann ein Hilbertraum ist, falls  $p = 2$  gilt.

15. *Normkonvergenz vs. koordinatenweise Konvergenz in  $l^2$ .*

Im folgenden sei  $e_n$  der  $n$ -te Standardbasisvektor,  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ . Bearbeite die folgenden (einfachen) Punkte und erarbeite dir so einen Überblick über den Zusammenhang zwischen koordinatenweiser Konvergenz und  $\|\cdot\|_2$ -Konvergenz.

- (i) Aus der Normkonvergenz in  $l^2$  folgt die koordinatenweise Konvergenz, d.h.  $\|x^{(n)} - x\|_2 \rightarrow 0$  (mit der aus der Vorlesung bekannten Bezeichnung  $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$  und  $x = (x_1, x_2, \dots)$ ) impliziert  $x_k^{(n)} \rightarrow x_k$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für alle  $k \in \mathbb{N}$ . (*Tipp:* Falls du Inspiration benötigst, schlage den Anfang des Beweises der Vollständigkeit von  $l^2$  nach!)
- (ii) Konvergiert die Folge  $(e_n)_n$  bzgl.  $\|\cdot\|_2$  gegen den Nullvektor?
- (iii) Konvergiert  $(e_n)_n$  vielleicht gegen einen anderen Vektor aus  $l^2$ ? (*Tipp:* Beachte (i).)
- (iv) Konvergiert  $(e_n)_n$  koordinatenweise? Was sagt dir das über eine mögliche Umkehrung von (i)?
- (v) Wie verhalten sich Normkonvergenz und koordinatenweise Konvergenz in  $l^2(n)$ , d.h. in  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ?

16. *Konvergenzfragen in  $c_0$ ,  $l^1$  und  $l^\infty$ .*

Wir bezeichnen weiterhin den  $n$ -ten Standardbasisvektor mit  $e_n$  und betrachten die beiden Folgen  $(e_n)_n$  und  $(u_n)_n$  mit  $u_n := \sum_{i=1}^n e_i$ . Beantworte die folgenden Fragen:

- (i) Ist  $(e_n)_n$  konvergent in  $c_0$  bzw.  $l^1$  bzw.  $l^\infty$ ? Ist  $(e_n)_n$  eine Cauchyfolge in einem dieser Räume?
- (ii) Detto für  $(u_n)_n$ .

17. *Vollständigkeit von Räumen stetiger Funktionen.*

Vervollständige die Beweisskizze für die Vollständigkeit der Räume  $\mathcal{C}[a, b]$ ,  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  (Satz 1.28). Genauer zeige:

- (i)  $\mathcal{C}[a, b]$  und  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  sind vollständig. (*Hinweis:* Verwende den passenden Satz aus der Analysis über die gleichmäßige Konvergenz von Folgen stetiger Funktionen.)
- (ii)  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  ist vollständig. (*Hinweis:* Verwende Prop. 1.23(ii) aus der Vorlesung.)

18. *Nichtvollständigkeit von Räumen stetiger Funktionen.*

Mache die Behauptung über die Nichtvollständigkeit des Raumes  $\mathcal{C}[-2, 2]$  mit  $\|\cdot\|_2$  aus 1.29 explizit. Genauer zeige für die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \notin [0, 1] \\ nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(1-x) & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- (i)  $f_n$  ist Cauchyfolge (bzgl.  $\|\cdot\|_2$ ). (*Tipp:* Brutale Gewalt!)

- (ii)  $f_n$  hat in  $(\mathcal{C}[-2, 2], \|\cdot\|_2)$  keinen Grenzwert. (*Hinweis:* Mache das Argument, dass der Limes notwendigerweise unstetig ist wasserdicht.)

Weiters beantworte die folgenden Fragen:

- (iii) Ist  $f_n$  eine Cauchyfolge bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ ? Warum, warum nicht?  
 (iv) Ist  $f_n$  eine Cauchyfolge bzgl.  $\|\cdot\|_1$ ? Warum, warum nicht? (*Tipp:* Falls dir für einen ähnlichen Gewaltakt wie in (i) die Geduld fehlt, versuche es mit einem Vorgriff auf Aufgabe 20(i).)

19.  $L^2$  ist der einzige Hilbertraum.

Mache folgenden Punkt aus der Beweisskizze von Satz 1.34 exakt: Unter den Räumen  $L^p$  mit  $p \in [1, \infty]$  ist  $L^2$  der einzige Hilbertraum. (*Tipp:* Beherrze deine Erfahrungen aus Aufgabe 14.)

20. (Nicht)-Schachtelung der  $L^p$ -Räume.

- (i) Zeige die folgende Behauptung, die in der Beweisskizze von Satz 1.34 aufgetreten ist: Für ein endliches Intervall  $I$  und  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  gilt  $L^q(I) \subseteq L^p(I)$ . (*Hinweis:* Ein geschicktes Verwenden der Hölder-Ungleichung liefert sogar die explizite Abschätzung  $\|u\|_p \leq m(I)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_q$ .)  
 (ii) Falls  $I$  nicht endlich ist, sind die Räume  $L^p(I)$  nicht vergleichbar, d.h. es gibt für  $p \neq q$  stets Funktionen  $u, v$  mit  $L^p \ni u \in L^q(I)$  und  $L^p \ni v \notin L^q(I)$ . Beweise diese Behauptung für den Spezialfall  $I = \mathbb{R}$ ,  $p = 1$  und  $q = 2$ . (*Tipp:* Betrachte Funktionen der Bauart  $u(x) = 1/x^\alpha$  und spiele das Wachstumsverhalten bei 0 gegen das Abfallverhalten für große  $|x|$  aus.)

21. Vom beschränkten Nutzen der Räume  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  und  $c_{00}$ . (Achtung: schwierig)

- (i) Zeige, dass auf dem Raum aller skalarwertigen Folgen  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  keine Norm definiert werden kann, sodass die Normkonvergenz die koordinatenweise Konvergenz impliziert (also  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  nicht in „vernünftiger“ Weise zu einem normierten Vektorraum gemacht werden kann).  
*Anleitung:* Nimm indirekt an, dass für jede Folge  $(x^{(n)})_n$  in  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  aus  $\|x - x^{(n)}\| \rightarrow 0$  folgt, dass  $|x_k - x_k^{(n)}| \rightarrow 0$  in  $\mathbb{K}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann sind alle Projektionen

$$p_k : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ni x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto x_k \in \mathbb{K}$$

stetig und damit beschränkt (das ist ein Vorgriff auf Kapitel 2). Mit der Notation  $\|p_k\| \leq \alpha_k$  betrachte nun  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ni x = (\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots)$  und  $p_k(x/\|x\|)$ .

- (ii) Zeige, dass  $c_{00}$  auf keine Weise zu einem Banachraum gemacht werden kann.

*Anleitung:* Betrachte die Mengen

$$A_n := \{x \in c_{00} : |x_k| \leq n \text{ für } k = 1, 2, \dots, n \text{ und } x_k = 0 \text{ für } k > n\}.$$

Es gilt  $c_{00} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und die  $A_n$  sind bezüglich jeder Norm auf  $c_{00}$  abgeschlossen und nirgends dicht;  $c_{00}$  ist somit (als metrischer Raum) mager und kann daher nach dem Satz von Baire nicht vollständig sein.

Um die Abgeschlossenheit der  $A_n$  zu zeigen, verwende, dass jede Norm auf  $c_{00}$  den Teilraum  $M_n := \{x \in c_{00} : x_k = 0 \text{ für } k > n\} \cong \mathbb{K}^n$  zum endlichdimensionalen normierten Vektorraum macht. Auf diesem sind alle Normen äquivalent (wieder ein Vorgriff auf Kap. 2, vgl. aber auch [Heuser, Analysis 2, Satz 109.8]) und daher ist  $M_n$  vollständig mit jeder von  $c_{00}$  ererbten Norm.

Um zu zeigen, dass das Innere der  $A_n$  leer ist, definiere für  $x \in A_n$  den Vektor  $z := x + \varepsilon/(2\|e_{n+1}\|)e_{n+1}$ , der in  $B_\varepsilon(x)$  liegt aber nicht in  $A_n$ .

## 2 Normierte Vektorräume und stetige lineare Operatoren

### 2.1 Eigenschaften Normierter Vektorräume

22. *Äquivalente Normen im  $\mathbb{R}^n$ .*

Beweise die Behauptung aus Beispiel 2.5(i), nämlich, dass für alle  $x$  in  $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \quad \text{und} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

gilt. Zeige, dass die Konstanten optimal gewählt sind. *Tipp:* Mit Hilfe der graphischen Darstellung im  $\mathbb{R}^2$  lassen sich leicht Vektoren finden, für die die jeweiligen Ungleichungen scharf sind.

23. *Äquivalente Normen auf  $C[0, 1]$ ?*

Sind  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $C[0, 1]$  äquivalent? Gib einen Beweis oder ein explizites Gegenbeispiel an.

24. *Zur Charakterisierung endlichdimensionaler normierter Vektorräume.*

Zeige *direkt*—insbesondere ohne Verwendung von Satz 2.11:

- (i) Ist in einem normierten Vektorraum die Einheitskugel kompakt, so gilt die Heine-Borel Eigenschaft, d.h. alle abgeschlossenen und beschränkten Mengen sind kompakt.
- (ii) Ist in einem normierten Vektorraum die Einheitskugel kompakt, so ist der Raum endlichdimensional. *Hinweis:* Verwende die Überdeckungseigenschaft, um eine endliche Menge zu finden, die schon den ganzen Raum aufspannt; wäre dem nämlich nicht so, führte das Lemma von Riesz zu einem Widerspruch.

25. *Grenzfall des Lemmas von Riesz.*

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Rieszsche Lemma 2.10 für  $\delta = 1$  nicht gilt.

*Anleitung:* Sei  $V = \{x \in C^0[0, 1] : x(1) = 0\}$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  und betrachte den (abgeschlossenen, echten!) Teilraum  $U = \{x \in V : \int_0^1 x(t) dt = 0\}$ . Gehe indirekt vor und betrachte die Folge  $x_n(t) = 1 - t^n \in V$  mit  $\|x_n\|_\infty = 1$  sowie die Folge  $u_n = x - \lambda_n x_n$ , wobei  $x$  das aufgrund der indirekten Annahme existierende Element in  $V$  mit  $\|x - u\|_\infty \geq 1$  für alle  $u \in U$  ist und

$$\lambda_n := \frac{\int x(t) dt}{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Wegen der Wahl von  $\lambda_n$  ist  $u_n$  in  $U$  und daher muss  $|\lambda_n| \geq 1$  gelten, was zu einem Widerspruch führt, da  $|\int x| < 1$  gilt!

26. *Vererbungseigenschaften von Dichtheit und Separabilität.*

- (i) Sei  $(X, d)$  metrischer Raum und  $A, B$  Teilmengen von  $X$ . Zeige, dass falls  $A$  dicht in  $B$  liegt und  $B$  dicht in  $X$  liegt, dann auch  $A$  dicht in  $X$  liegt. *Hinweis:* Entscheidend ist hier natürlich, dass  $B$  als metrischer Raum mit der von  $X$  ererbten Metrik aufzufassen ist!
- (ii) Zeige, dass Teilmengen separabler metrischer Räume wieder separabel sind. *Warnung:* Lass dich nicht durch die Einfachheit von (i) dazu verleiten, die (wahre) Schwierigkeit zu übersehen!

27. *Separabilität des Raums der konvergenten und Nullfolgen.*

- (i) Zeige, dass der Raum  $c$  der konvergenten Folgen separabel ist. *Tipp:*  $x = (x_n)_n \in c$  mit  $\lim x_n = \xi$  kann mit  $e_0 := (1, 1, \dots)$  und den Standardeinheitsvektoren  $e_k$  ( $k \geq 1$ ) in der Form  $x = \xi e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \xi) e_k$  geschrieben werden.

- (ii) Beweise 2.14(iv), i.e., dass der Raum  $c_0$  der Nullfolgen separabel ist. *Hinweis:* Falls dir (zurecht!) eine abgespeckte Version des Beweises von (i) zu langweilig scheint, bemerke, dass unter Verwendung von Aufgabe 26(ii) (fast) nichts mehr zu tun ist!

## 2.2 Stetige lineare Operatoren

### 28. Operatornorm im Endlichdimensionalen.

Im folgenden ist von Normen von Matrizen die Rede. Damit ist natürlich immer die Norm der entsprechenden Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  gemeint, jeweils mit der Euklidischen Norm  $\|\cdot\|_2$  ausgestattet.

- (i) Berechne die Norm der Matrix  $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (ii) Bestimme die Norm der Matrix  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  ( $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).

*Tipp:* Welche Abbildung bewirkt die Matrix geometrisch auf dem  $\mathbb{R}^2$ ? lässt sich daraus schon die Norm ablesen?

- (iii) Zeige, dass die Norm einer Matrix  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  gleich der Wurzel aus dem größten Eigenwert von  $A^t A$  ist. *Anleitung:* Maximiere  $\langle Ax | Ax \rangle$  unter der Nebenbedingung  $\langle x | x \rangle = 1$  mittels der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

### 29. Abhängigkeit der Operatornorm.

Sei  $A = (a_{ij})$  eine  $m \times n$  Matrix. Zeige dass die Norm von  $A$  bezüglich  $\|\cdot\|_1$  (auf  $\mathbb{K}^n$  bzw  $\mathbb{K}^m$ ) das Maximum der Spaltensummen der Absolutbeträge der  $a_{ij}$  ist, und  $\|A\|$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  das Maximum der Zeilensummen der Absolutbeträge der  $a_{ij}$ . Genauer zeige, dass

- (i) bezüglich  $\|\cdot\|_1$  gilt:  $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ .
- (ii) bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  gilt:  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

### 30. Multiplikationsoperatoren auf $l^p$ und $L^2[a, b]$

- (i) Beantworte die Frage, welche Operatoren  $T : l^p \rightarrow l^p$  der Form

$$l^p \ni x = (x_n)_n \mapsto Tx = (\lambda_n x_n)_n,$$

wobei  $(\lambda_n)_n$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  ist, stetig sind (vgl. Beispiel 2.28(iii)). *Anleitung:* Notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von  $T$  ist die Beschränktheit von  $(\lambda_n)_n$ .

- (ii) Als kontinuierliches Analogon zu (i) betrachte den Operator  $T_g : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$

$$L^2[a, b] \ni f \mapsto T_g f := g f,$$

wobei  $g \in C[a, b]$  fix vorgegeben ist. Zeige, dass  $T_g$  stetig ist mit  $\|T_g\| = \|g\|_\infty$ . Was ändert sich, falls  $L^2$  durch  $L^1$  ersetzt wird?

### 31. Ein Funktional auf $C[0, 1]$ .

Für  $g \in C[0, 1]$  definiere das Funktional  $T_g$  auf  $C[0, 1]$  durch

$$T_g : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad T_g f := \int_0^1 g(t) f(t) dt.$$

Zeige, dass (vgl. 2.28(vi))  $\|T_g\| = \|g\|_1$  gilt. *Hinweis:* Für den (schwierigeren) Beweis, dass  $\|T_g\| \geq \|g\|_1$  gilt, verwende für  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $f_\varepsilon(t) := \overline{g(t)} / (|g(t)| + \varepsilon)$ .

32. *Integraloperatoren auf  $L^2$ .*

Sei  $k \in L^2([0, 1]^2)$  und  $f \in L^2[0, 1]$ . Aus dem Satz von Fubini folgt, dass  $k(s, \cdot) \in L^2[0, 1]$  für fast alle  $s$  gilt. Weiters folgt aus der Hölder-Ungleichung, dass die Integrale  $\int k(s, t)f(t)dt$  für fast alle  $s$  existieren. Wir erhalten also die messbare Funktion

$$T_k f(s) := \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

(stillschweigend außerhalb der oben angesprochenen Nullmenge mit 0 fortgesetzt). Zeige, dass  $T_k$  ein stetiger Operator auf  $L^2[0, 1]$  mit  $\|T_k\| \leq \|k\|_{L^2([0, 1]^2)}$  ist.

*Hinweis:* Wenn du mit den maßtheoretischen Aspekten noch ein bißchen auf Kriegsfuß stehst, dann ziehe die Literatur zu Rate. Die Operatoren  $T_k$  heißen Hilbert-Schmidt Operatoren und wegen ihrer großen Wichtigkeit wirst du keine Schwierigkeiten haben aus der Fülle der Darstellungen eine zu finden, die dir zusagt! Um die geforderte Abschätzung zu beweisen, benötigst du aber nicht mehr als den Satz von Fubini und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

### 2.3 Dualräume normierter Vektorräume

33. *Ein unstetiges lineares Funktional.*

Wandle Bsp. 2.28(iv) geeignet ab, um ein unstetiges lineares Funktional auf dem Raum  $c_{00}$  der abbrechenden Folgen zu konstruieren. *Tipp:* Mit der Bezeichnung aus 2.28(iv) versuche  $\sum_n (Tx)_n$ .

34. *Der Dualraum von  $c_0$ .*

Beweise Satz 2.42(ii), d.h. dass  $c'_0 \cong l^1$  gilt. *Hinweis:* Gehe analog zum Beweis von 2.42(i) vor.

35. *Lineare Funktionale auf  $l^1$  und  $l^\infty$ .*

(i) Für  $y \in l^\infty$  berechne die Norm des linearen Funktionals  $f_y$  auf  $l^1$ , das durch

$$l^1 \ni x \mapsto f_y(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

gegeben ist.

(ii) Vertausche in (i) die Rollen von  $l^\infty$  und  $l^1$  und löse die dadurch entstehende analoge Aufgabe.

*Warnung (vgl. 2.43):* Obwohl die beiden Aufgaben so nett symmetrisch in bezug auf  $l^1$  und  $l^\infty$  aussehen, sind sie es in einem fundamentalen Sinn **nicht!** Während in (i) die  $f_y$  bereits *alle* stetigen linearen Funktionale auf  $l^1$  darstellen (Satz 2.42(i)), gibt es im Fall (ii) eine „Vielzahl“ weiterer stetiger linearer Funktionale auf  $l^\infty$ ; kurz gesagt  $(l^1)' \cong l^\infty$  aber  $(l^\infty)' \supsetneq l^1$ .

36. *Der Dualraum von  $l^\infty(n)$ .*

Führe Bemerkung 2.44 genauer aus, d.h. zeige, für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $(l^\infty(n))' \cong l^1(n)$ . Beantworte insbesondere folgende Frage: Welcher Beweisteil funktioniert hier, geht aber im unendlichdimensionalen Fall schief. Überrascht dich das?



### 3 Hilberträume

#### 3.1 Orthogonalprojektionen

37. *Fingerübungen zum orthogonalen Komplement.*

Beweise Beobachtung 3.10 (iv), (v) und (ii). Genauer, zeige, dass für Teilmengen  $A$  und  $B$  des Prähilbertraumes  $H$ , gilt:

- (i)  $A \subseteq B \Rightarrow A^\perp \supseteq B^\perp$ ,
- (ii)  $A \subseteq A^{\perp\perp}$ ,
- (iii)  $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ .

Gilt auch die zu (iii) „duale“ Gleichung  $(A \cap B)^\perp = A^\perp \cup B^\perp$ ? Warum, warum nicht?

38. *Fingerübungen zur orthogonalen Projektion.*

Sei  $M$  abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes  $H$  mit orthogonaler Projektion  $P_M$ .

- (i) Für  $x, y \in H$  gilt

$$x \in M, x - y \perp M \Leftrightarrow x = P_M y.$$

Diese Behauptung ist natürlich in Lemma 3.14 enthalten. Zeige sie hier direkt aus dem Projektionssatz (Thm. 3.16).

- (ii) Zeige die folgende praktische und sehr einfach nachzurechnende Formel ( $x, y \in H$ )

$$\langle P_M x | y \rangle = \langle P_M x | P_M y \rangle = \langle x | P_M y \rangle.$$

39. *Charakterisierung des Proximums.*

Sie  $H$  ein Hilbertraum,  $A \subseteq H$  abgeschlossen und konvex und  $x_0 \in H$  fix gewählt. Beweise, dass für alle  $x \in A$  die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

- (i)  $\|x_0 - x\| = \inf_{y \in A} \|x_0 - y\|$
- (ii)  $\operatorname{Re} \langle x_0 - x | y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in A$

Was ist die geometrische Bedeutung von (ii)? Fertige eine Skizze im  $\mathbb{R}^2$  an.

40. *Gerade Funktionen im  $L^2$ .*

Dies Aufgabe spielt im  $L^2[-a, a]$  oder auch  $L^2(\mathbb{R})$ . Zeige der Reihe nach:

- (i) Ist  $g(x) := f(-x)$ , dann gilt  $\|g\|_2 = \|f\|_2$ .
- (ii) Gilt  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ , dann gilt mit  $g$  wie oben und  $g_n(x) := f_n(-x)$  auch  $\|g_n - g\|_2 \rightarrow 0$ .
- (iii) Sind alle  $f_n$  gerade (d.h.  $f(x) = f(-x)$ ) und gilt  $f = \lim f_n$ , dann ist auch  $f$  gerade.

(Anmerkung: Diese Aufgabe bereitet auf Aufgabe Nr. ?? vor, die die Details zu Bsp. 3.16A aus der Vorlesung nachliefert.)

41. *Konkrete Orthogonalprojektionen im  $L^2$ .*

In  $L^2[-\pi, \pi]$  betrachte die Teilräume  $M_0$  bzw.  $N_0$ , die von den Orthonormalsystemen (siehe Def. 3.22)

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \ (k \geq 1) \right\} \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \ (k \geq 1) \right\}$$

aufgespannt werden. Mit den Bezeichnungen  $M := \overline{M_0}$  und  $N := \overline{N_0}$  stelle dich den folgenden Aufgaben:

- (i) Beschreibe  $M$  und  $N$  möglichst einfach.
- (ii) In welcher Beziehung stehen  $M$  und  $N$  zueinander?
- (iii) Gib möglichst einfache Formeln für die Orthogonalprojektionen auf  $M$  bzw.  $N$  an.

42. *Gerade und ungerade Funktionen im  $L^2$ .*

Beweise die Behauptungen in Bsp. 2.16A aus der Vorlesung. Genauer, zeige, dass für den Hilbertraum  $H = L^2[-a, a]$  die Zerlegung

$$L^2[-a, a] = L_g^2[-a, a] \oplus L_u^2[-a, a]$$

gilt, wobei  $L_g^2$  resp.  $L_u^2$  die Teilräume der geraden bzw. ungeraden Funktionen in  $H$  sind, also  $L_g^2[-a, a] := \{f \in H : f(x) = f(-x) \text{ f.ü.}\}$  resp.  $L_u^2[-a, a] := \{f \in H : f(x) = -f(-x) \text{ f.ü.}\}$ . Weiters zeige, dass die entsprechenden orthogonalen Projektionen durch

$$P_g f(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{bzw.} \quad P_u f(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

gegeben sind.

43. *Komplement vs. Abschluss.*

Beweise Korollar 3.18 aus der Vorlesung, d.h. zeige für Teilmengen  $A$  und Teilräume  $N$  eines Hilbertraumes  $H$  die folgenden :

- (i)  $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}A}$                       (ii)  $N^{\perp\perp} = N$
- (iii)  $A^\perp = \{0\}$  genau dann, wenn  $A$  total ist.

### 3.2 Orthonormalbasen

44. *Das Gram-Schmidt Verfahren zum ersten: Eine explizite Formel.*

Im Beweis von Satz 3.27 (Gram-Schmidt Verfahren) wird für die linear unabhängige, abzählbare Teilmenge  $M = \{x_1, x_2, \dots\}$  des Hilbertraums  $H$  das Orthonormalsystem  $S = \{e_1, \dots\}$  konstruiert. Ziel dieser Aufgabe ist es explizite Formeln für die  $e_i$  herzuleiten. (Diese werden in den nächsten beiden Aufgaben dringendst benötigt!). Herzstück ist es natürlich, eine explizite Formel für die Orthogonalprojektion  $P_{M_n}$  auf  $M_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  zu finden. (*Tipp:* Eine Möglichkeit ist es, die Formel zu erraten oder nachzuschlagen und dann Aufgabe 38 zu verwenden.)

45. *Die Legendre-Polynome—Das Gram-Schmidt Verfahren zum zweiten.*

Im Hilbertraum  $L^2[-1, 1]$  wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Funktionen  $x_n(t) = t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  an. Dadurch entsteht die orthonormale Folge  $L_n$  der Legendre-Funktionen und die Folge  $P_n$  der Legendre-Polynomen, die gemäß

$$L_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(x)$$

definiert ist. (Die Legendre-Polynome finden vor allem in der Quantenmechanik bei der Diskussion der Drehimpulsoperatoren Verwendung—Stichwort: „Kugelfunktionen“—unter anderem bei der Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom). *Hinweis:* Berechne zunächst „auf Vorrat“  $\int_{-1}^1 x^n dt$  und halte mindestens bis  $P_3$  durch oder verwende ein Computeralgebrasystem deiner Wahl.

46. *Die Laguerre-Polynome—Das Gram-Schmidt Verfahren zum dritten.*

Im Hilbertraum  $L^2[0, \infty]$  wende das Gram-Schmidt Verfahren auf die Funktionen  $x_n(t) = (-t)^n e^{-t/2}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  an, um die Laguerre-Funktionen  $f_n$  zu berechnen und damit die Laguerre-Polynome  $L_n$ , die gemäß

$$f_n = \frac{1}{n!} e^{-t/2} L_n$$

definiert sind. (Die Laguerre-Polynome treten in der Quantenmechanik ebenfalls bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung (Radialanteil) für das Wasserstoffatom auf.) *Hinweis:* Beschaffe dir wiederum auf Vorrat die Integrale  $\int_0^\infty e^{-t} t^n dt$  (Tipp: Gamma-Funktion) und halte bis  $L_3$  durch, oder/und verwende ein Computeralgebrasystem deiner Wahl.

47. *Der Satz von Riesz-Fischer.*

Gib konkret den Isomorphismus aus Thm. 3.36 für den Hilbertraum  $L^2[-\pi, \pi]$  und die Orthonormalbasis

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \quad (k = 1, 2, \dots)$$

an und leite aus der Gleichheit der entsprechenden Skalarprodukte in  $L^2$  und  $l^2$  die Parseval-Gleichung für die „klassischen“ Fourierkoeffizienten  $a_k, b_k$  ab.

*Hinweis:* Hier wird die konkrete Rechnung einfacher, wenn  $l^2$  in der Form

$$l^2 = \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots) \mid \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, \sum |\alpha_i|^2 + \sum |\beta_i|^2 < \infty\}$$

geschrieben wird. Warum ist das erlaubt?

### 3.3 Dualraum eines Hilbertraums, Adjungierter Operator

48.  *$H'$  als Hilbertraum.*

Mache Bem. 3.43 explizit indem du zeigst, dass  $H'$  vermöge der folgenden Definition zum Hilbertraum wird: Für  $y$  im Hilbertraum  $H$  sei  $f_y$  das durch  $f_y(x) = \langle x|y \rangle$  definierte stetige, lineare Funktional auf  $H$  (vgl. Thm. 3.42, Satz von Riesz-Fréchet) und weiters sei das Skalarprodukt auf  $H'$  definiert durch

$$\langle f_y | f_z \rangle := \langle z | y \rangle.$$

49. *Eigenschaften der Adjunktion.*

Beweise Prop. 3.45 aus der Vorlesung, dh. zeige für die Operatoren  $T, T_1, T_2 \in L(K, H)$  zwischen den Hilberträumen  $K$  und  $H$  sowie ihren Adjungierten  $T^*, T_1^*, T_2^* \in L(K, H)$  die folgenden Aussagen:

- (i)  $T^{**} = T$
- (ii)  $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$
- (iii)  $(T_1^* + T_2^*)^* = T_1^* + T_2^*$
- (iv)  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$  (für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ )
- (v)  $(ST)^* = T^*S^*$  (für  $S \in L(K, G)$ ,  $G$  ein weiterer Hilbertraum)
- (vi)  $\text{id}_H^* = \text{id}_K$
- (vii)  $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ , falls  $T$  invertierbar ist.

## 4 Operatoren in Hilberträumen

### 50. Adjungierte Operatoren.

Liefere die Details zu Bsp. 4.4 aus der Vorlesung nach. D.h. zeige die folgenden Punkte:

- (i) Sei  $T \in L(l^2)$  bzgl. der Orthonormalbasis  $e_1, e_2, \dots$  durch die Matrixelemente  $a_{ij} = \langle Te_i | Te_j \rangle$  gegeben, dann seine Adjungierte durch die Matrixelemente  $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$ .
- (ii) Für die Adjungierte des Multiplikationsoperators  $T_\varphi \in L(L^2[a, b])$

$$T_\varphi f(x) := \varphi(x)f(x) \quad \text{mit } \varphi \in L^\infty[a, b], \text{ fix}$$

gilt  $T_\varphi^* f(x) = \bar{\varphi}(x)f(x)$ .

- (iii) Die Adjungierte des Hilbert-Schmidt Operators  $T \in L(L^2[a, b])$  mit  $L^2$ -Kern  $K$ , d.h. des Operators

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy \quad (K \in L^2([a, b]^2))$$

hat den Integralkern  $\overline{K(y, x)}$ .

### 51. Zweiseitige Shift-Operatoren. Der zweiseitige Rechts-Shift $U$ auf

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{(\dots, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, \dots) : x_k \in \mathbb{K}, \sum_{-\infty}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

(vgl. Hinweis in Aufgabe 47) ist definiert durch  $U(x_n)_n = (x_{n-1})_n$ . Bestimme  $U^*$  sowie  $U^*U$  und  $UU^*$ . Ist  $U$  unitär? Vergleiche die Situation mit Bsp. 4.3 aus der Vorlesung.

### 52. Kern, Bild, Adjunktion.

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$ . Zeige die folgenden Punkte: (i)  $\ker(T^*T) = \ker T$ , (ii)  $\ker T^* = (\text{im } T)^\perp$ , (iii)  $\overline{\text{im } T^*} = (\ker T)^\perp$

### 53. Operatornorm und Skalarprodukt.

Gibt es einen Operator  $T$  auf dem Hilbertraum  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$  für den

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx | x \rangle| < \|T\|$$

gilt? Warum ist das eine interessante Frage?

### 54. Kompakte Multiplikationsoperatoren auf $l^2$ .

Liefere die Details zu Bsp. 4.10(i) nach, d.h. zeige, dass  $T \in L(l^2)$ , mit  $(Tx_n)_n = (\lambda_n x_n)_n$ ,  $(\lambda_n) \in l^\infty$  genau dann kompakt ist, falls  $(\lambda_n) \in c_0$  gilt.

### 55. Spektrum des Adjungierten Operators.

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$ . Zeige

$$\lambda \in \rho(T^*) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(T) \quad \text{und damit} \quad \sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}.$$

### 56. Eigenwerte & Spektrum explizit.

Liefere die Details von Bsp. 4.21 nach bzw. zeige folgende Erweiterungen:

- (i) Der Rechts-Shift  $R = U$  auf  $l^2$ ,  $x \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$  hat keine Eigenwerte. Für den Links-Shift  $L = U^*$  (vgl. Bsp. 4.3) gilt  $\sigma_P(L) = B_1(0)$ , der offene Einheitsball. Bestimme auch das Spektrum von  $L$  und von  $R$ .
- (ii) Sei der Operator  $T \in L(l^2)$  definiert durch  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$ . Bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren sowie das Spektrum von  $T$ .

57. *Eigenwerte für Klassen von Operatoren.* Beweise Prop. 4.26 aus der Vorlesung, d.h. zeige dass für einen Operator  $T$  im Hilbertraum  $H$  gilt, dass

- (i) Ist  $T$  normal, dann gilt (a)  $\ker T = \ker T^*$ , (b) Falls  $\lambda$  Eigenwert von  $T$  ist, dann ist  $\bar{\lambda}$  Eigenwert von  $T^*$  zum selben Eigenvektor, (c) Eigenvektoren zu verschiedenen Operatoren sind orthogonal.
- (ii) Ist  $T$  selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte reell.
- (iii) Ist  $T$  anti-selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte rein imaginär.
- (iv) Ist  $T$  unitär, so haben alle Eigenwerte Betrag 1.
- (v) Ist  $T$  nicht-negativ, so sind auch alle Eigenwerte nicht-negativ.

58. *Spektrum von Projektoren.*

Sei  $P_M$  Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum  $M$  eines Hilbertraumes  $H$ . Berechne das Spektrum von  $P_M$ . *Tipp:* Versuche  $(\lambda I - P_M)^{-1}$  direkt hinzuschreiben, indem du  $1 = P_M + P_{M^\perp}$  verwendest.

59. *Rang-1-Operatoren.*

Liefere die Details von 4.23(iv), (v) aus der Vorlesung nach, d.h. zeige die folgenden Punkte:

- (i)  $(f \otimes e^*)^* = e \otimes f^*$
- (ii) Jeder symmetrische Operator  $T$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  hat bzgl. einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren die Darstellung  $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i^*$ , wobei die  $\lambda_i$  die Eigenwerte zu  $e_i$  sind.

60. *Operatoren mit endlichdimensionalem Bild.*

Seien  $E$  und  $F$  normierte Vektorräume. Zeige

- (i) Die Zuordnung

$$\sum_{i=1}^n y_i \otimes f_i : x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i \quad (x \in E),$$

wobei  $y_i \in F$ ,  $f_i \in E'$  sind, stellt einen stetigen linearen Operator von  $E$  nach  $F$  mit endlichdimensionalem Bild dar (vgl. Vorlesung 4.24).

- (ii) Die Operatoren aus (i) sind schon *alle*  $T \in L(E, F)$  mit endlichdimensionalem Bild. *Tipp:* Betrachte dazu die Funktionale  $x \mapsto \lambda_i(x)$ , wobei  $Tx = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$  auf dem Bildraum  $F_1 \subseteq F$  von  $T$ , wo  $\{y_1, \dots, y_n\}$  eine Basis ist.

61. *Spektraldarstellung konkret.*

Zeige, dass der lineare Operator  $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  gegeben durch

$$Tf(x) = \int_0^1 (2xy - x - y + 1)f(y) dy$$

kompakt und selbstadjungiert ist und bestimme seine Spektraldarstellung.

## 5 Hauptsätze der Funktionalanalysis

62. *Explizite Fortsetzung eines Funktionals.*

- (i) Auf dem Teilraum

$$W := \{(x, y, z) \mid x + 2y = 0, z = 0\}$$

des Banachraums  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$  sei das stetige lineare Funktional  $f$  durch  $f((x, y, z)) := x$  definiert. Gib mindestens zwei verschiedene Erweiterungen von  $f$  auf  $\mathbb{R}^3$  mit gleicher Norm wie  $f$  an.

(ii) Wie sieht die Situation von (i) aus, wenn  $\|\cdot\|_1$  durch  $\|\cdot\|_2$  ersetzt und damit  $\mathbb{R}^3$  zum Hilbertraum gemacht wird?

63. *Dualbasis.*

Zeige: Sind  $x_1, \dots, x_n$  linear unabhängig in einem normierten Raum  $E$ , so existieren  $f_1, \dots, f_n \in E'$  mit  $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ .

64. *Existenz von Projektionen auf endlichdimensionale Unterräume.*

(i) Sei  $E$  ein normierter Raum und  $M$  ein endlichdimensionaler Teilraum von  $E$ . Zeige, dass dann ein stetiger linearer Projektionsoperator  $P_M$  von  $E$  auf  $M (\subseteq E)$  existiert (das heißt  $M = \text{im } P_M, P_M^2 = P_M$ ). (*Tipp:* Aufgabe 63!)

(ii) Wie erhält man ein derartiges  $P_M$  im Spezialfall eines Hilbertraumes  $E$  am einfachsten?

65.  $L^p$  für  $0 < p < 1$ .

Sei  $L^p[0, 1]$  ( $0 < p < 1$ ) der metrische Vektorraum

$$\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ L-meßbar, } \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty\}$$

mit  $d(f, g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p dt$  (strenggenommen besteht  $L^p$  aus den bekannten Äquivalenzklassen).

Zeige:  $(L^p)' = \{0\}$ , das heißt, außer dem Nullfunktional gibt es auf  $L^p$  ( $0 < p < 1$ ) keine stetigen linearen Funktionale. Nach dem Satz von Hahn-Banach ist  $L^p$  damit nicht normierbar.

(*Hintergrundinformation:* Schuld an  $(L^p)' = \{0\}$  ist, dass  $L^p$  nicht einmal eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt, also kein sogenannter *lokalkonvexer* Vektorraum ist. Für solche gilt nämlich ebenfalls der Satz von Hahn-Banach, der die Existenz „vieler“ stetiger linearer Funktionale garantiert.)

*Anleitung:* Zum Beweis betrachte ein lineares Funktional  $\varphi \neq 0$  auf  $L^p$ ; für  $f \in L^p$  mit  $\int |f|^p = 1, \varphi(f) = \alpha > 0$  sei  $F(t) := \int_0^t |f(s)|^p ds$ . Nach dem Satz über die dominierte Konvergenz ist  $F$  stetig und nimmt daher jeden Wert zwischen  $F(0)$  und  $F(1)$  an — speziell alle Werte  $\frac{k}{n}$ , etwa an den Stellen  $s_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ). Nun sei  $g_r := f \cdot c_{[s_{r-1}, s_r]}$ . Dann ist  $\int |g_r|^p = \frac{1}{n}$ ; für mindestens ein  $r(n)$  muß gelten:  $|\varphi(g_r)| \geq \frac{\alpha}{n}$ . Wenn du nun die Funktionenfolge  $f_n := n \cdot g_{r(n)}$  betrachtest, ergibt sich die Unstetigkeit von  $\varphi$ .

66. *Punktweise Limiten von Operatorfolgen—Ein Variante.*

Zeige folgende Variante zu Kor. 5.43 aus der Vorlesung: Seien  $E, F$  Banachräume,  $T_n \in L(E, F)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Existiert  $\lim_n T_n x$  für alle  $x$  aus einer dichten Teilmenge  $A$  von  $E$  und ist  $\sup_n T_n x$  für alle  $x$  aus  $E$  beschränkt, dann existiert  $\lim T_n x$  für alle  $x \in E$  und der Grenzooperator ist in  $L(E, F)$ .

67. *Projektionen in Banachräumen.*

Als Anwendung des Satzes von der offenen Abbildung (es reicht Kor. 5.52) beweise Satz 3.7. Genauer zeige im Banachraum  $E$ : Ist  $U$  abgeschlossener Teilraum von  $E$  und es existiert ein abgeschlossener Teilraum  $V$ , der zu  $U$  im algebraischen Sinne komplementär ist (d.h.  $E \simeq U \oplus V$  algebraisch), dann gilt

(i)  $E \simeq U \oplus V$  als Banachraum,

(ii) Es existiert eine stetige Projektion von  $E$  auf  $U$ .

68. *Ein abgeschlossener Operator.*

Führe die Details von Bsp. 5.59(i) genauer aus: Sei  $T : (C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  definiert durch  $Tf := f'$ . Zeige:  $T$  ist nicht stetig aber abgeschlossen.