Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2004/05

5. Prüfungstermin (4.3.2005)

1. (a) *(Trigonometrie)* Ein Beobachter sieht die Spitze eines auf einer horizontalen Ebene stehenden Turmes in der Entfernung $b = 45m$ unter einem doppelt so großen Höhenwinkel wie in einer Entfernung $a = 120m$. Berechne die Höhe des Turmes unter der Annahme, dass sich die Augen des Beobachters $1,5m$ über dem Boden befinden. (4 Punkte)

   (b) *(Analytische Geometrie)* Bestimme rechnerisch die Lagebeziehung der drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3 im Raum und fertige eine Skizze an. (5 Punkte)

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \varepsilon_1: & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ \varepsilon_2: & -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ \varepsilon_3: & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

   (4 Punkte)

2. *(Kurvendiskussion)* Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle 4 den Funktionswert -3. Die erste Ableitung von f lautet

$$f'(x) = \frac{x^3}{4} - 3x.$$

   (a) Bestimme die Funktionsgleichung von f. (3 Punkte)

   (b) Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von f. (3 Punkte)

   (c) Bestimme Wendepunkte und Wendetangenten von f. (2 Punkte)

   (d) Skizziere den Graphen von f im Intervall $[-5, 5]$ (1 Punkt)

   (e) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, dass der Graph von f mit den beiden Wendetangenten einschließt. (3 Punkte)

3. *(Mengen)*

   (a) Seien A und B Mengen. Definiere den Durchschnitt $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$ und die Mengendifferenz $A \setminus B$ von A und B. (3 Punkte)

   (b) Wann heißen zwei Mengen gleich mächtig? Was bedeutet das für endliche Mengen? (3 Punkte)

   (c) Zeige, dass die Menge $\mathbb{N}_g$ der geraden natürlichen Zahlen gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ selbst ist. (3 Punkte)

4. (a) *(Algebra)* Auf der Menge $\mathbb{Q}$ sei die Verknüpfung

$$\circ : \ (r, s) \mapsto r + s - 7$$

   definiert. Bildet $(\mathbb{Q}, \circ)$ eine ablesche Gruppe? (5 Punkte)

   (b) *(Induktion)* Beweise mittels vollständiger Induktion für $x \neq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(1-x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1+x}.$$

   Wird die Voraussetzung $x \neq -1$ wirklich benötigt; wenn ja, wo? (6 Punkte)