3.3 Die erste Fundamentalform

(1) Motivation: Was uns jetzt noch zum Glück in T_pS fehlt ist ein Skalarprodukt. Dieses gewinnen wir einfach durch Einschränken des $\mathbb{R}^3$-Skalarprodukts auf T_pS.

d.h. wollen um ordentlich Geometrie zu betreiben zB ∡

Genauer fassen wir $X, Y \in T_pS$ als Vektoren im $\mathbb{R}^3$ auf und stecken sie ins $\mathbb{R}^3$-Skalarprodukt $\langle\, ,\rangle$ ein, bilden also $\langle X, Y\rangle$. – offiziell

(2) Def (1. Fundamentalform)

Wir nennen die Einschränkung des $\mathbb{R}^3$-Skalarprodukts auf T_pS die 1. Fundamentalform auf S. Genauer schreiben wir

$$S \ni p \mapsto g_p := \langle\, ,\rangle\big|_{T_pS \times T_pS}$$

und

$$I_p(X,Y) := g_p(X,Y) = \langle X, Y\rangle \quad (X, Y \in T_pS)$$

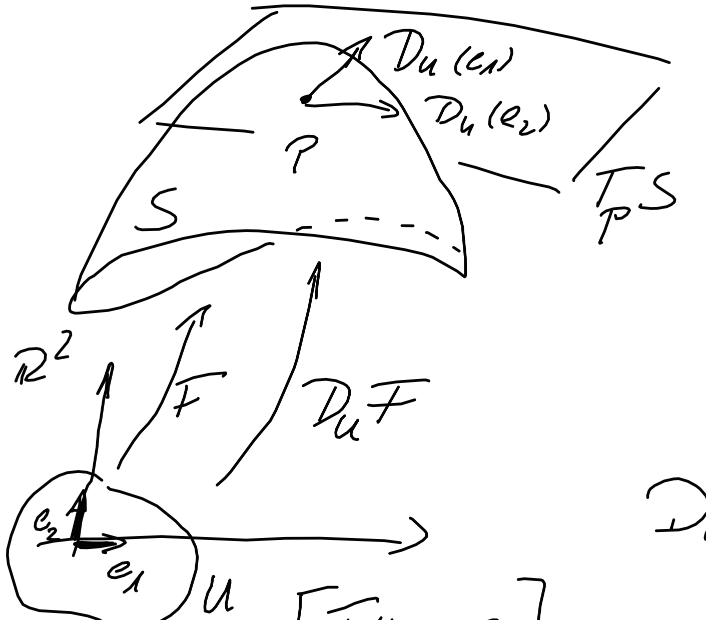
(3) Die konkrete Gestalt von I_p

(A) Lineare Algebra $\Longrightarrow$ Jedes Skalarprodukt ist nach Wahl einer Basis durch eine positiv-definite, symmetrische Matrix gegeben

$\Longrightarrow$ diese können wir in einer (jeder) lokalen Parametrisierung (Karte) ausrechnen – WIE?

(B) Brauchen eine Basis der Tangentialebene T_pS

Eine solche kann man sich ganz einfach mittels lok. Parametrisierung verschaffen, indem wir eine Basis des $\mathbb{R}^2$ mittels Differential D_uF von F nach T_pS transportieren.



[$F(u) = p$]

Rechnerisch:

D_uF ... Jacobi-Matrix der Abb $F = \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^3$

also eine (2×3)-Matrix

$$D_uF(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial F^1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial F^2}{}(u) \\ \frac{\partial F^3}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial F^3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u_1}(u) \\ \frac{\partial F^3}{\partial u_1}(u) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u_1}(u)$$

Also $\boxed{D_u(e_i) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u)}$

ist Basis in T_pS [weil D_uF max Rang hat?]

(C) Matrixdarstellung der 1. Fundamentalform

$$\boxed{g_{ij}(u) := g_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}(u), \frac{\partial F}{\partial x_j}(u) \right\rangle}$$

Matrixdarstell. lin Alg

(2) & Def I_p

Bsp 3.3.1 (DIE EBENE)

$F: U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$F(u_1, u_2) = p_0 + u_1 X + u_2 Y$

S ... Ebene durch p_0 aufgespannt von $X, Y \in \mathbb{R}^3$

$$g_{11}(u) \overset{(c)}{=} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_1}(u) \right\rangle = \langle X, X \rangle$$

$$g_{12}(u) \overset{(c)}{=} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u) \right\rangle = \langle X, Y \rangle$$

$$g_{21}(u) \overset{\text{symm}}{=} \langle Y, X \rangle$$

$$g_{22}(u) = \langle Y, Y \rangle$$

analog

Ab jetzt sei S die (x,y)-Ebene, dh $p_0 = 0$, $X = e_1$, $Y = e_2$

$$\Longrightarrow \boxed{g_{ij}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Insbesondere ist (in dieser Parametrisierung) g_{ij} konstant (nicht von u abhängig)

Das ändert sich, falls andere Parametrisierungen verwendet werden. Um das genau zu sehen verden wir Polarkoordinaten $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (r, \varphi)$, d.h. die Parametrisierung

$$\tilde{F} : (0,\infty) \times (0, 2\pi) =: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{F}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$$

Dann haben wir

$$\tilde{g}_{11}(r,\varphi) \overset{(c)}{=} \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$$\tilde{g}_{12}(r,\varphi) = \tilde{g}_{21}(r,\varphi) = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r,\varphi) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\tilde{g}_{22}(r,\varphi) = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r,\varphi), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi}(r,\varphi) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = r^2$$

Also

$$\boxed{\tilde{g}_{ij}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}}$$

und insbesondere nicht konstant ☺

$\boxed{\text{FAZIT: Die Gestalt von } g_{ij} \text{ hängt stark von der Wahl der Parametrisierung (Koordinaten) ab ☺}}$

Bsp 3.3.2 (Der Zylinder) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

Eine Standardparametrisierung ist

$$F : (0,2\pi) \times \mathbb{R} = U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\varphi,h) = (\cos\varphi, \sin\varphi, h)$$

Damit erhalten wir

$$g_{11}(\varphi,h) \overset{(c)}{=} \left\langle \frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \underline{\underline{1}}$$

$$g_{21}(\varphi,h) = g_{12}(\varphi,h) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial\varphi}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h) \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \underline{\underline{0}}$$

$$g_{22}(\varphi,h) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h), \frac{\partial F}{\partial h}(\varphi,h) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

Also

$$\boxed{g_{ij}(\varphi,h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Achtung Die 1. Fundamentalform am Zylinder hat (in diesen Koord.) dieselbe Form wie die der Ebene (in kart. Koord.). Das ist kein Zufall

Bsp 3.3.3 (Die Kugel) $S = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Wir wählen $F : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) = U \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und daher

$$g_{11}(\theta,\varphi) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial\theta}(\theta,\varphi), \frac{\partial F}{\partial\theta}(\theta,\varphi) \right\rangle = 1$$

$$g_{12} = g_{21}(\theta,\varphi) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial\theta}, \frac{\partial F}{\partial\varphi} \right\rangle = 0$$

$$g_{22}(\theta,\varphi) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial\varphi}, \frac{\partial F}{\partial\varphi} \right\rangle = \cos^2\theta$$

Also

$$\boxed{g_{ij}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}}$$

(4) Abschlussbetr.: Koordinatenwechsel

Sei g_{ij} die Matrixdarst. von I bzgl (U, F, V)
$\tilde{g}_{ij}$ jene bzgl einer zweiten Para $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$

Für die Kartenwechselabb schreiben wir $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$.

Dann gilt

$$g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\tilde{F}\circ\varphi)}{\partial u_i}(u), \frac{\partial(\tilde{F}\circ\varphi)}{\partial u_j}(u) \right\rangle$$

$F = \tilde{F}\circ\tilde{F}^{-1}\circ F = \tilde{F}\circ\varphi$

Kettenregel

$$= \left\langle \sum_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_k}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi^k}{\partial u_i}(u), \sum_\ell \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_\ell}(\varphi(u)) \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial u_j}(u) \right\rangle$$

$\langle,\rangle$ bilin

$$= \sum_{k,\ell} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial u_j}(u) \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_k}(\varphi(u)), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}_\ell}(\varphi(u)) \right\rangle$$

$$= \sum_{k,\ell} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u_i}(u) \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial u_j}(u) \, \tilde{g}_{k\ell}(\varphi(u))$$

Jacobimatrix des Kartenwechsels

1. Fundamentalform in den „neuen" Koord.

Diese Gleichung lautet in Matrixschreibweise

$$\boxed{g(u) = (D_u\varphi)^t \cdot \tilde{g}(\varphi(u)) \cdot D_u\varphi}$$

3.5. Die zweite Fundamentalform

(0) Was ist das?

Die 2. Fundamentalform ist die wesentliche Größe, die wir benötigen um über <u>Krümmung</u> von Flächen sprechen zu können; sie gibt im wesentlichen an, <u>wie</u> S im $\mathbb{R}^3$ liegt.

Leider ist der Weg zur 2. FF etwas technisch, wir zerlegen ihn in mehrere kleine Schritte; hier ein erster Überblick:

(1) Die <u>Gauß-Abbildung</u>: Das Einheitsnormalenfeld in neuem Licht

(2) Die <u>Weingartenabb.</u>: Das Differential der Gauß-Abb

(3) Die <u>Weingartenabb</u> ist selbstadjungiert, also durch eine symmetrische Bilinearform gegeben

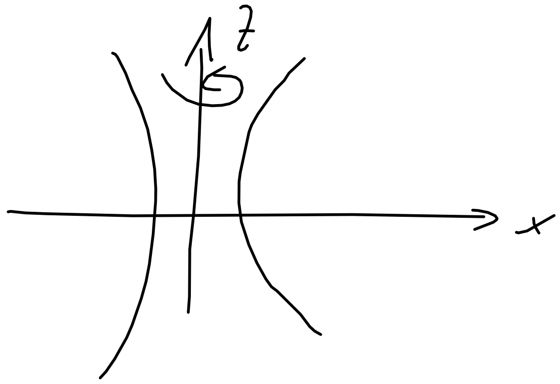
(4) Die <u>2. Fundamentalform</u> ist diese symm Bilinearform

$$\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$

(5) <u>Wie rechnet man II_p aus?</u> Wir leiten eine Formel ähnlich zu der für I_p her

Jetzt im Detail:

Rotationshyperboloid



- Hyperbel in $(x z)$-Ebene mit Hauptachse 1:

$$x^2 - z^2 = 1$$

- als parametrisierte Kurve $t \mapsto (r(t), t)$

$$x(t)^2 - t^2 = 1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{1+t^2} \Rightarrow r(t) = \sqrt{1+t^2}$$

- Parametrisierung der Fläche:

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2}\cos t \\ \sqrt{1+t^2}\sin t \\ t \end{pmatrix}$$

- Mittlere Krümmung:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{r\ddot{r} - 1 - \dot{r}^2}{r(1+\dot{r}^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{r\,\frac{r - t\dot{r}}{r^2} - 1 - t^2/r^2}{r\left(1 + t^2/r^2\right)^{3/2}}$$

$$\dot{r}(t) = t/r(t)$$

$$\ddot{r}(t) = \frac{r(t) - t\dot{r}(t)}{r^2(t)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1 - t^2/r^2 - 1 - t^2/r^2}{\frac{r}{r^3}(r^2+t^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{t^2}{(r^2+t^2)^{3/2}} = -\frac{t^2}{(1+2t^2)^{3/2}}$$

$$\neq 0 \text{ für } t \neq 0$$

(1) Die Gauß-Abbildung

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre & orientierbare Fläche

$\Longleftrightarrow$ d.h. wir haben ein glattes Einheitsnormalenfeld

$$N: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Das ist die Idee; offiziell

$$p \longmapsto N(p) \in \mathbb{R}^3,\ N(p) \perp T_pS,$$
$$\text{und } \|N(p)\| = 1$$

$$\Leftrightarrow N(p) \in S^2$$

DEF (Gauß-Abb.)

Die Gauß-Abbildung ist nichts anderes als N, allerdings aufgefasst als Abbildung

$$N: S \longrightarrow S^2,$$

also als Abb zwischen zwei regulären Flächen

(2) Die Weingartenabb.

Wir betrachten das Differential der Gauß-Abb in einem Punkt $p \in S$; dazu ziehen wir unser Wissen über das Ableiten von Abb $f: S_1 \to S_2$ zwischen regulären Flächen aus 3.2 heran. Es ist also

$N: S \longrightarrow S^2$, also $\boxed{d_pN: T_pS \longrightarrow T_{N(p)}S^2}$

Nun gilt aber $\boxed{T_{N(p)}S^2 \overset{\text{Bsp}}{=} N(p)^\perp \overset{\text{Def der ENF}}{=} T_pS}$

Also können wir d_pN auffassen als Abb: $T_pS \longrightarrow T_pS$

also als Abb eines 2-dim VR in sich selbst; und das ist viel besser als von einem VR in einen anderen!

Wie wir gleich sehen & brauchen werden

Offiziell:

DEF (Weingartenabb)

Sei S reg. Fläche mit Orientierung gegeben durch ein ENF N. Für jedes $p \in S$ definieren wir die Weingartenabb W_p durch

$$W_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$
$$W_p(X) := -d_pN(X)$$

[Das Vorzeichen hat historische Gründe & ist eigentlich wurscht.]

Wir schauen unsere 3 Lieblingsbsp an

BSP (a) Ebene
(b) Kugel
(c) Zylinder

[... MARTINA ...]

(5) Wie zum Teufel soll man II_p jemals ausrechnen?

Das ist garnicht so schwer; Wir verwenden lokale Koord., genauer

Sei (U, V, F) lok. Param. um p und $u = F^{-1}(p)$

Wir erinnern uns an I_p: Dabei haben wir die Basisvektoren $D_uF(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u_1}(u)$, $D_uF(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u_2}(u)$

von T_pS verwendet, genauer

$$\boxed{g_{ij}(p) = I_p(D_uF(e_1), D_uF(e_2)) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u) \right\rangle}$$

Matrix für I_p

Die Matrixdarstellung von II_p nennen wir nun $h_{ij}(p)$ und rechnen

$$\boxed{h_{ij}(u) = \mathrm{II}_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j))} = I_p(W_p(D_uF(e_i)), D_uF(e_j))$$

lin Alg Def f. Matrixdarst.

$$= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle$$

Matrixdarst. der zweiten Fundamentalform

$N \perp T_pS \Rightarrow$
$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u_j}(u + te_j), N(u + te_j) \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \quad -\text{"}- \quad \Big|_{t=0}$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j) \Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), d_pN(D_uF e_j) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j) \rangle$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle X_i, W_p(X_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle}$$