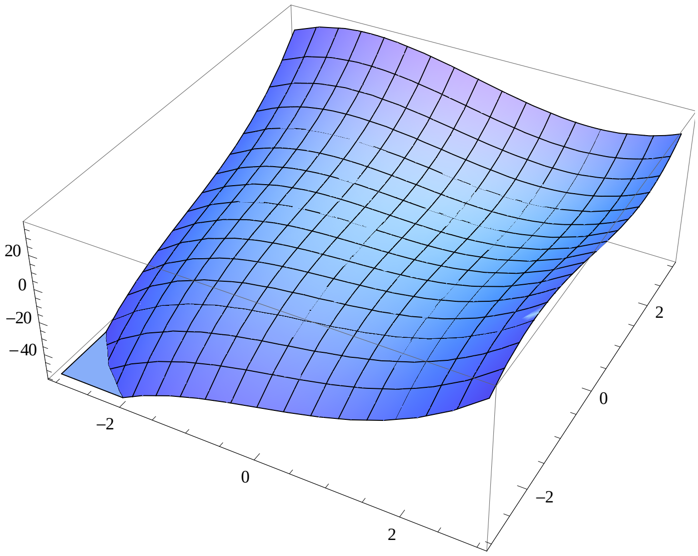
Aufgabe 96

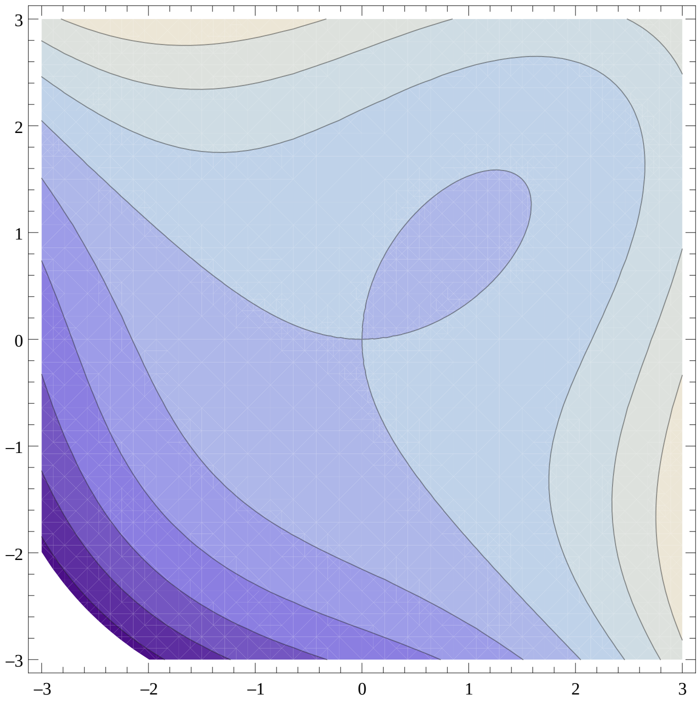
■ Überblick

```
f[x_, y_] := x^3 + y^3 - 3 x y
```

Funktionsgraph und Höhenschichtlinien

```
Plot3D[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
ContourPlot[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```





Vermutung : Sattel in (0, 0), lok. Min nahe (1, 1), keine globalen Extrema

■ Kritische Punkte

```
Gradf = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}
```

$\{3x^2 - 3y,\ -3x + 3y^2\}$

```
Solve[Gradf == {0, 0}, {x, y}]
```

$\{\{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to 1, y \to 1\}, \{x \to -(-1)^{1/3}, y \to (-1)^{2/3}\}, \{x \to (-1)^{2/3}, y \to -(-1)^{1/3}\}\}$

Wir suchen natürlich nur reelle Lösungen, also :
K1 = (0, 0), K2 = (1, 1)

■ Auswertung der Hesse Matrix

```
Hessf = MatrixForm[
  {{D[f[x, y], {x, 2}], D[D[f[x, y], x], y]}, {D[D[f[x, y], x], y], D[f[x, y], {y, 2}]}}]
```

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

```
Hessf /. {x → 0, y → 0}
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

-9

Indefinit, also :
K1 = (0, 0) ist ein Sattel

```
Hessf /. {x → 1, y → 1}
```

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

27

Determinante positiv und (1, 1 - Eintrag prositiv = > Hesse Matrix pos. definit, also :
K2 = (1, 1) ist lok. Minimum

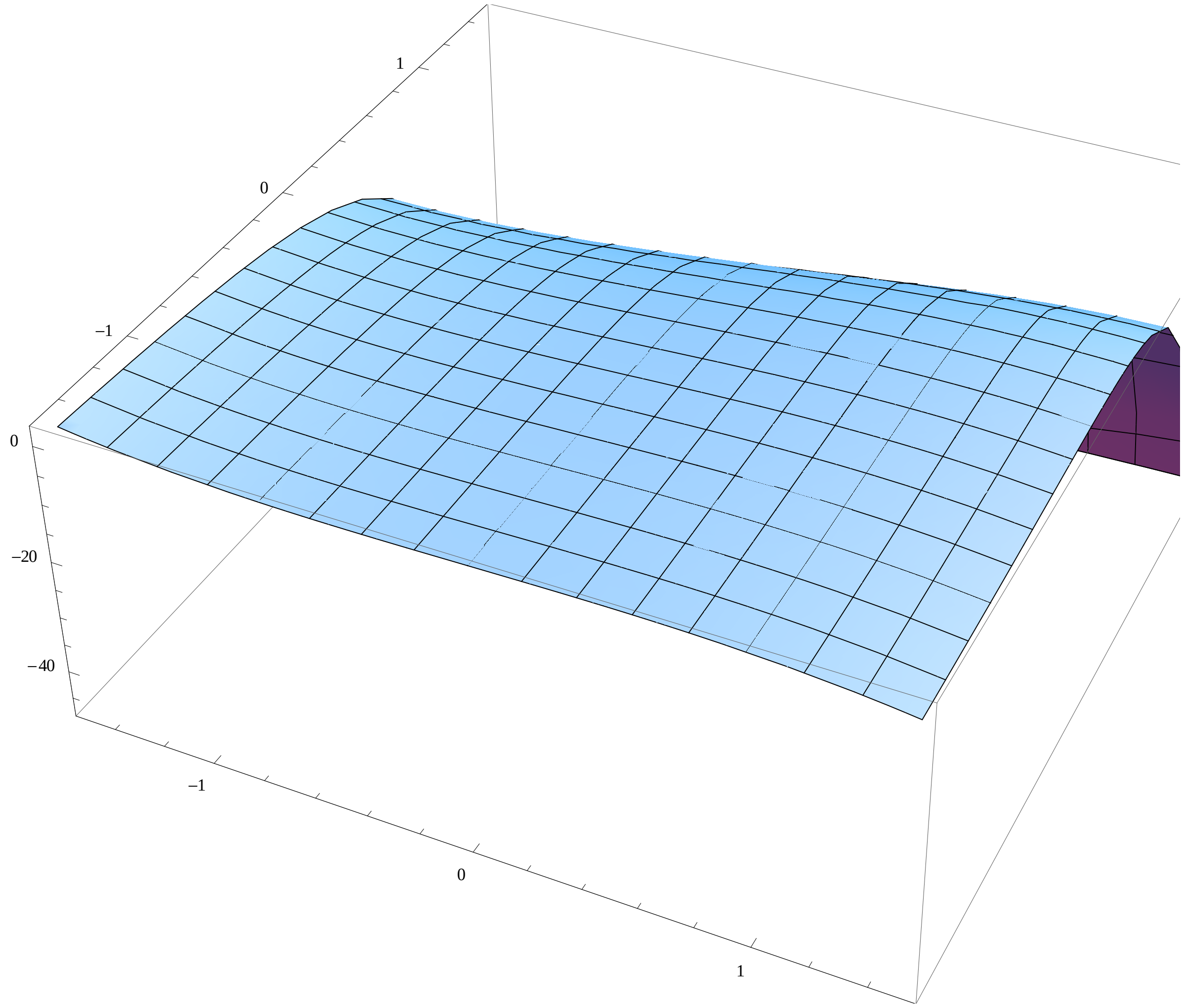
Aufgabe 97

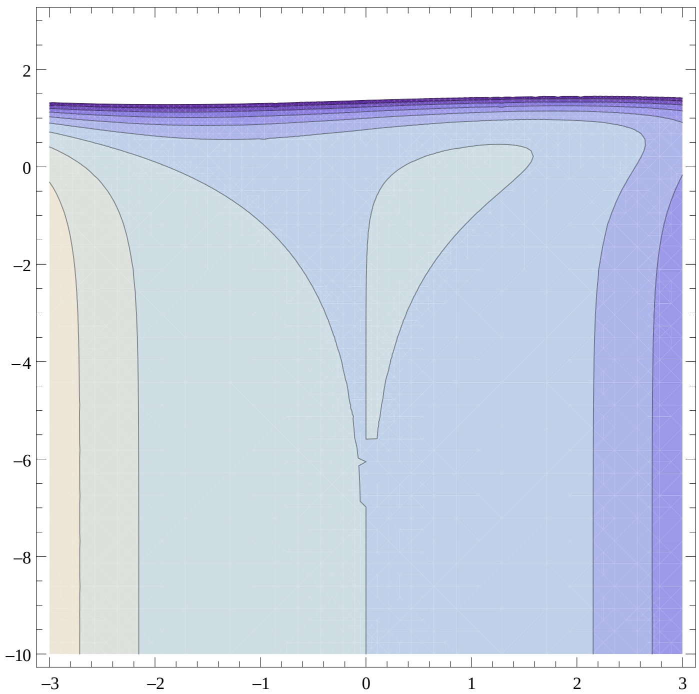
■ Überblick

```
f[x_, y_] := 3 x Exp[y] - x^3 - Exp[3 y]
```

Funktionsgraph und Höhenschichtlinien

```
Plot3D[f[x, y], {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}]
ContourPlot[f[x, y], {x, -3, 3}, {y, -10, 3}]
```





Vermutung : Lok. Max nahe (1,0) , keine globalen Extrema

▪ Kritische Punkte

```
Gradf = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}
```

$\{3\,e^{y} - 3\,x^{2},\ -3\,e^{3\,y} + 3\,e^{y}\,x\}$

```
Solve[Gradf == {0, 0}, {x, y}]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so
some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. ≫

$\left\{\{x \to 0,\ y \to -\infty\},\ \{x \to 1,\ y \to 0\},\ \left\{x \to -(-1)^{1/3},\ y \to \frac{2\,i\,\pi}{3}\right\},\ \left\{x \to (-1)^{2/3},\ y \to -\frac{2\,i\,\pi}{3}\right\}\right\}$

Wir suchen natürlich nur reelle Lösungen, also :
K1 = (1,0)

▪ Auswertung der Hesse Matrix

```
Hessf = MatrixForm[
  {{D[f[x, y], {x, 2}], D[D[f[x, y], x], y]}, {D[D[f[x, y], x], y], D[f [x, y], {y, 2}]}}]
```

$\begin{pmatrix} -6\,x & 3\,e^{y} \\ 3\,e^{y} & -9\,e^{3\,y} + 3\,e^{y}\,x \end{pmatrix}$

```
Hessf /. {x → 1, y → 0}
```

$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

```
Det[%]
```

27

Determinante positiv und (1, 1) - Eintrag negativ = > Hesse Matrix neg. definit, also :
K1 = (1, 0) ist lok. Max.

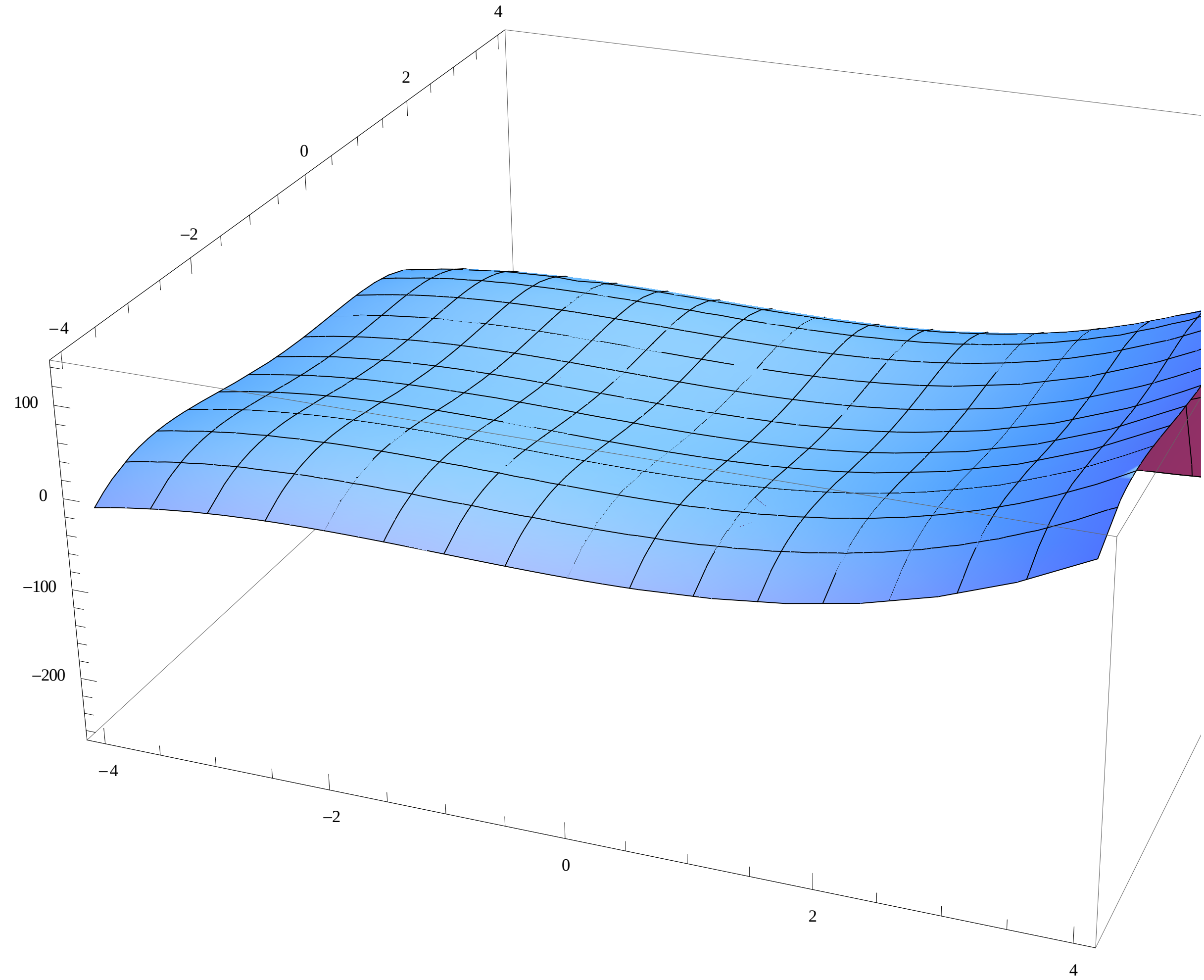
Aufgabe 98

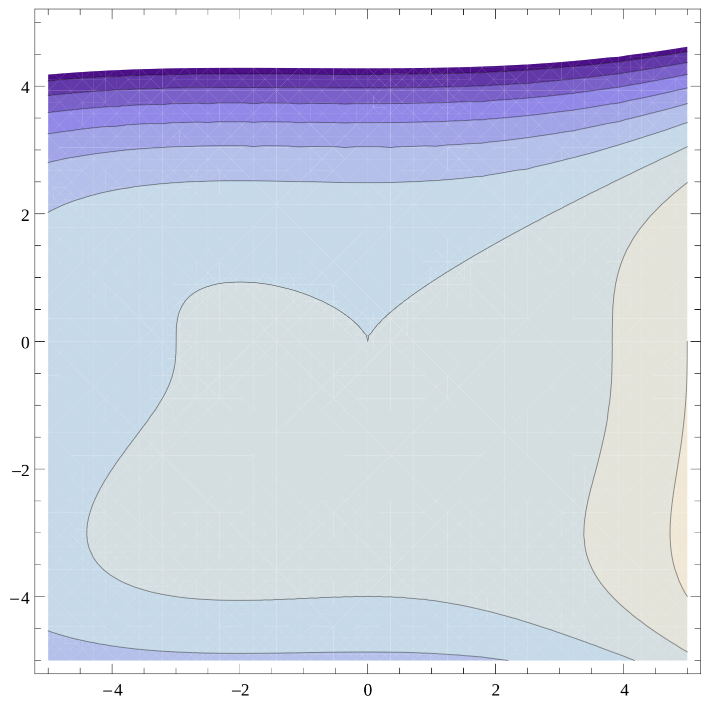
▪ Überblick

```
f[x_, y_] := 3 x^2 + x^3 - 4 y^3 - y^4
```

Funktionsgraph und Höhenschichtlinien

```
Plot3D[f[x, y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
ContourPlot[f[x, y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```


4
2
0
−2
−4
100
0
−100
−200
−4
−2
0
2
4


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

Vermutung : Sattel in (0, 0), links des Ursprungs und auch unterhalb des Ursprungs, lok. Max nahe (-2, -3), keine globalen Extrema

Kritische Punkte

```
Gradf = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}
```

$\{6x + 3x^2, -12y^2 - 4y^3\}$

```
Solve[Gradf == {0, 0}, {x, y}]
```

$\{\{x \to -2, y \to -3\}, \{x \to 0, y \to -3\}, \{x \to -2, y \to 0\}, \{x \to 0, y \to 0\}\}$

Vier kritische Punkte:
K1 = (0, 0), K2 = (-2, 0), K3=(0,-3), K4=(-2,-3)

Auswertung der Hesse Matrix

```
Hessf = MatrixForm[
  {{D[f[x, y], {x, 2}], D[D[f[x, y], x], y]}, {D[D[f[x, y], x], y], D[f [x, y], {y, 2}]}}]
```

$$\begin{pmatrix} 6+6x & 0 \\ 0 & -24y-12y^2 \end{pmatrix}$$

```
Hessf /. {x → 0, y → 0}
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues[%]
```

$\{6, 0\}$

Positiv Semidefinit, also :
K1 = (0, 0) ist ein Sattel

```
Hessf /. {x → -2, y → 0}
```

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues[%]
```

$\{-6, 0\}$

Negativ Semidefinit, also :
K2 = (-2, 0) ist ein Sattel

```
Hessf /. {x → -0, y → -3}
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues[%]
```

$\{-36, 6\}$

Indefinit, also :
K3 = (0, -3) ist ein Sattel

```
Hessf /. {x → -2, y → -3}
```

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}$$

```
Eigenvalues[%]
```

$\{-36, -6\}$

Negativ definit, also :
K4 = (-2, -3) ist ein lok. Max.

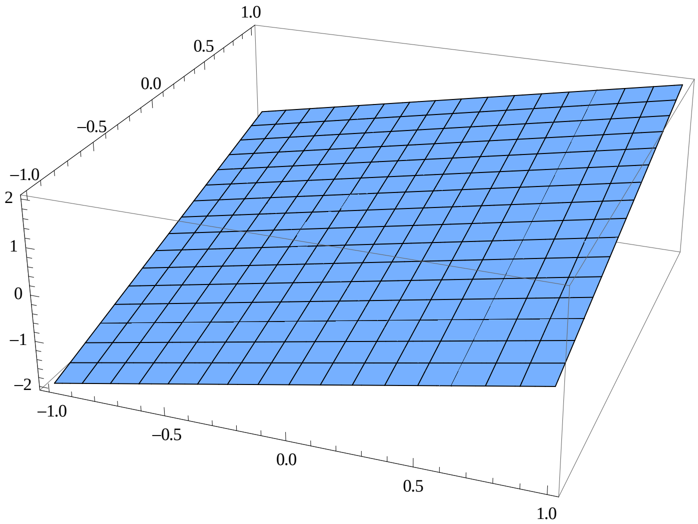
Aufgabe 99

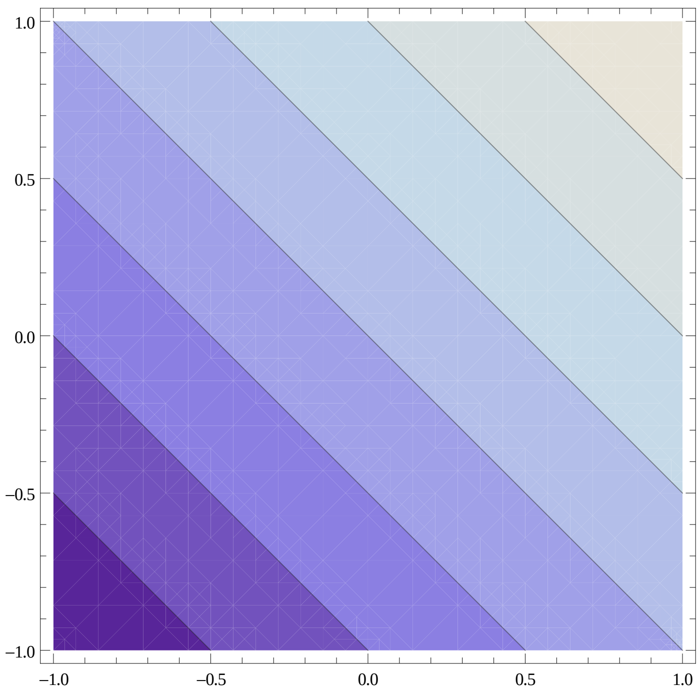
▪ Überblick

```
f[x_, y_] := x + y
```

Funktionsgraph und Höhenschichtlinien

```
Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
ContourPlot[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

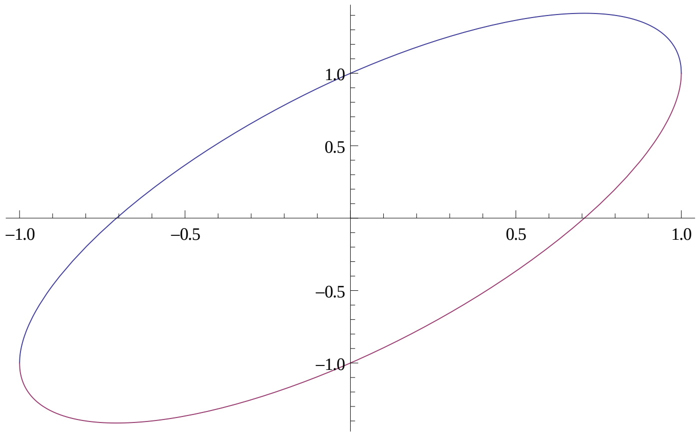




▪ Methode 1 : Einsetzen (“Wie in der Schule”)

```
f1[x_] := x + Sqrt[1 - x^2]
f2[x_] := x - Sqrt[1 - x^2]
```

```
Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, -1, 1}]
```




```
Solve[f1'[x] == 0, x]
f1''[x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

$$-\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

f1'' < 0 also lok. Max. in x = 1/ Sqrt[2]
Dh insgesamt lok. Max. in (x, y) = (1/ Sqrt[2], 1/ Sqrt[2])

```
Solve[f2'[x] == 0, x]
f2''[x]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

$$\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

f2'' > 0 also lok. Min. in x = -1/Sqrt[2]
Dh insgesamt lok. Min. in (x, y) = (-1/Sqrt[2], -1/Sqrt[2])

■ Methode 2 : Lagrange Multiplikatoren

```
g[x_, y_] := x^2 + y^2 - 1
h[x_, y_, λ_] := f[x, y] - λ * g[x, y]
h[x, y, λ]
{D[h[x, y, λ], x], D[h[x, y, λ], y], D[h[x, y, λ], λ]}
```

$$x + y - \left(-1 + x^2 + y^2\right) \lambda$$

$$\left\{1 - 2 x \lambda,\ 1 - 2 y \lambda,\ 1 - x^2 - y^2\right\}$$

```
Solve[% == 0, {x, y, λ}]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y \to -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda \to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ y \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda \to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

Also Kandidaten für lok. Extr. K1, 2 = (x, y) = +/ -(1/ Sqrt[2], 1/ Sqrt[2])
Da S^1 kompakt muss es ein lok = glob Max und Min geben. Also reicht ein Vergleich der Funktionswerte an den Kanidadatenstellen.

```
f[1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2]]
f[-1/Sqrt[2], -1/Sqrt[2]]
```

$\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$

Also lok. = glob. Max in K1, Min in K2

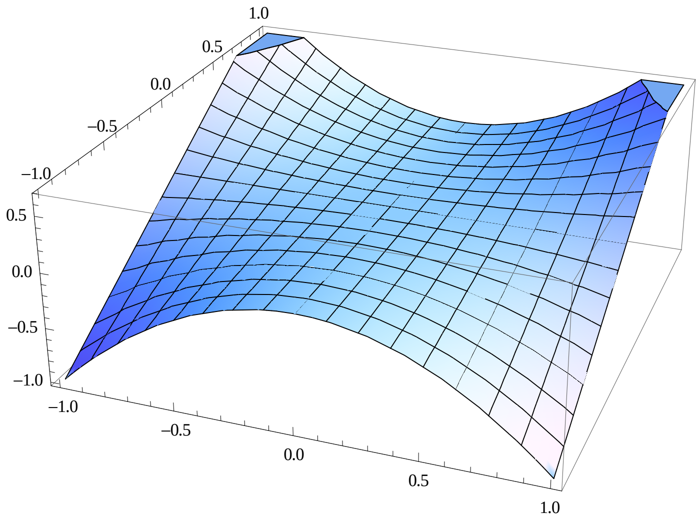
Aufgabe 100

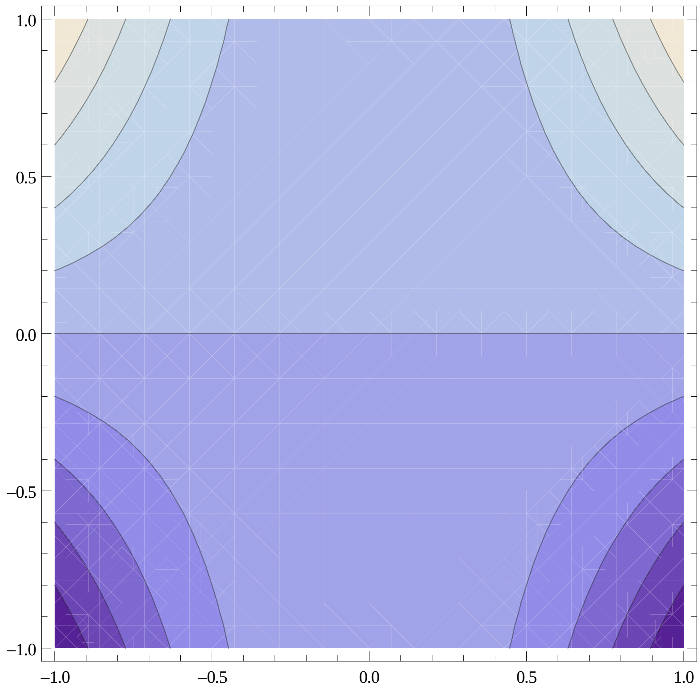
■ Überblick

```
f[x_, y_] := x^2 y
```

Funktionsgraph und Höhenschichtlinien

```
Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
ContourPlot[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```





Vermute nicht strikte lok. Max./ Min. auf der neg./ pos. y - Achse und kein lok. Extr. in (0, 0)

(a) Max/Min auf offener Einheitskreisscheibe

Kritische Punkte

```
Gradf = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}
```

$\{2\,x\,y,\; x^2\}$

```
Solve[Gradf == {0, 0}, {x, y}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

$\{\{x \to 0\}\}$

Die ganze y-Achse besteht aus krit. Punkten

Auswertung der Hesse Matrix

```
Hessf = MatrixForm[
  {{D[f[x, y], {x, 2}], D[D[f[x, y], x], y]}, {D[D[f[x, y], x], y], D[f [x, y], {y, 2}]}}]
```

$\begin{pmatrix} 2\,y & 2\,x \\ 2\,x & 0 \end{pmatrix}$

```
Hessf /. {x → 0}
```

$\begin{pmatrix} 2\,y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nie definit und Det = 0 also auch nicht indefinit = > KEINE AUSSAGE MÖGLICH
Ausweg:

Diskutiere Vorzeichen

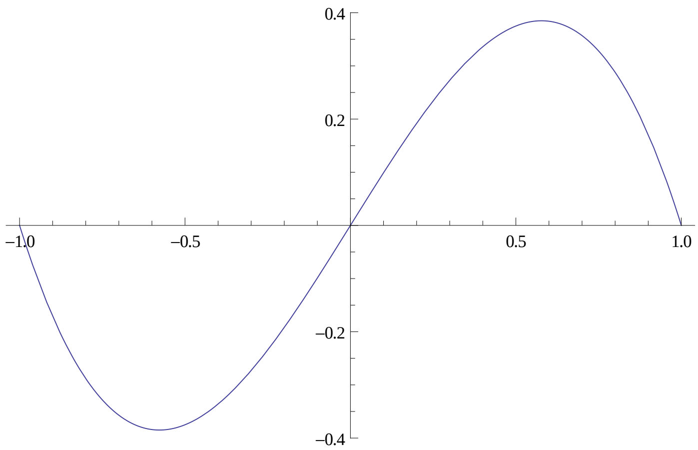
```
f = 0 auf der y - Achse
f >= 0 in oberer Halbebene
f <= 0 in unterer Halbebene

Daher nichtstrikte lok Min / Max auf pos / neg y - Achse.
 Kein lok. Extremum in (0, 0)
```

(b) Auf Einheitskreis

```
Methode 1 : Einsetzen
```

```
f1[y_] := y (1 - y^2)
Plot[f1[y], {y, -1, 1}]
```



Weil auf [-1, 1] zu diskutieren (!! !)
lok. Max./ Min in - / +1

```
Solve[f1'[y] == 0, y]
```

$$\left\{\left\{y \to -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{y \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

```
f1''[1/Sqrt[3]]
f1''[-1/Sqrt[3]]
```

$-2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}$

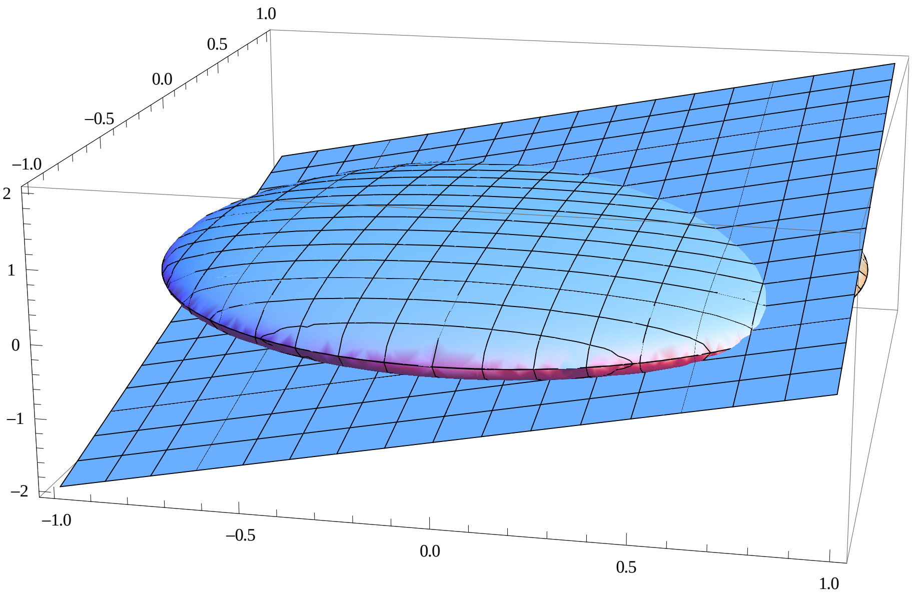
Daher lok. Max./ Min. in + / -1/ Sqrt[3]

Daher insgesamt lok. Max./ Min.(auch global) in
(+/ -Sqrt[2/ 3], 1/ Sqrt[3]) / (+/ -Sqrt[2/ 3], -1/ Sqrt[3])
und lok. Max./ Min. in (0,-/ +1)

Aufgabe 101

Zwei Skizzen zur Illustration :

```
Plot3D[{Sqrt[(1 - y^2 - x^2) / 2], -Sqrt[(1 - y^2 - x^2) / 2], x + y}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```



```
Plot3D[{Sqrt[(1 - y^2 - x^2) / 2], -Sqrt[(1 - y^2 - x^2) / 2], x + y}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```