Sphärische Geometrie

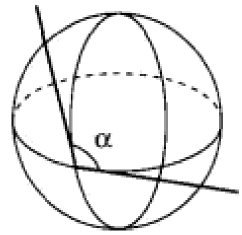
– eine erste „andere“ Geometrie

Abstract:

Wir geben einen Einblick in die Grundlagen der sphärischen Geometrie. Dabei werden Großkreise, Dreiecke und die „Geraden“ auf einer Kugel definiert. Zu beweisen sind drei fundamentale Sätze: „Fläche eines Dreiecks auf der Kugeloberfläche“, „Das sphärische Pythagoräische Theorem“ und „Das sphärische Sinus-Theorem“. Abschließend werden die Unterschiede zur Euklidischen Geometrie aufgezeigt.

Definition: Großkreis

Ein Großkreis ist ein Kreis auf der Kugel, dieser entsteht durch einen Schnitt der Kugeloberfläche mit einer Ebene die durch den Kugelmittelpunkt verläuft.
(Bsp: Äquator und Längenkreise)



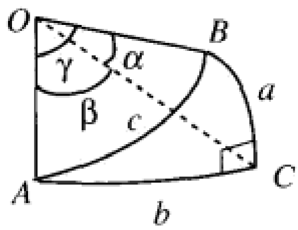
Theorem 1: Fläche eines Dreiecks auf der Kugeloberfläche

Auf einer Kugel mit Radius R gilt für ein Δ ABC mit den Winkeln α, β und γ:
Fläche(Δ ABC) = R²(α+β+γ-π)

Theorem 2:Das sphärische Pythagoräische Theorem

Für ein rechtwinkeliges Δ ABC auf einer Kugel mit Radius R, dem rechten Winkel beim Eckpunkt C und den Seiten a,b,c gilt:

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right)=\cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)$$



Theorem 3: Das sphärische Sinus-Theorem

Sei Δ ABC ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel mit Radius R;
a, b und c die Seitenlängen und <A, <B und <C die Winkel im entsprechenden Eckpunkt, dann gilt:

$$\frac{\sin\left(\frac{a}{R}\right)}{\sin(<A)}=\frac{\sin\left(\frac{b}{R}\right)}{\sin(<B)}=\frac{\sin\left(\frac{c}{R}\right)}{\sin(<C)}$$

Vergleich: Sphärische Geometrie und Euklidische Geometrie

Winkelsumme eines Dreiecks bestimmt die Fläche
Pythagoräischer LS sieht anders aus, geht aber analytisch in den ebenen Pythagoräischen LS über
Ein sphärisches Dreieck hat 6 Bestimmungsstücke (3 Seiten, 3 Winkel), 3 davon reichen aus, um das Dreieck eindeutig festzulegen → ähnliche Dreiecke sind somit kongruent

Literatur:

■ McCleary, John „Geometry from a differentiable viewpoint“ Cambridge University Press
■ Netz, Heinrich „Formeln der Mathematik“ Hanser
■ Tranacher, Harald Diplomarbeit „Sphärische Kegelschnitte – didaktisch aufbereitet“
http://www.geometrie.tuwien.ac.at/theses/pdf/diplomarbeit_tranacher.pdf [Zugriff 07.10.11]
■ Abbildungen Overhead: www.mathepedia.de [Zugriff 10.10.11]