Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$. Eine parametrisierte Kurve heißt *regulär*, falls ihr Geschwindigkeitsvektor nirgends verschwindet, $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Definition 2.1.7. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine *Parametertransformation* von c ist eine bijektive Abbildung $\varphi : J \to I$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall ist, so dass sowohl φ als auch $\varphi^{-1} : I \to J$ unendlich oft differenzierbar sind. Die parametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *Umparametrisierung* von c.

Definition 2.1.8. Eine Parametertransformation φ heißt *orientierungserhaltend*, falls $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle t und *orientierungsumkehrend*, falls $\dot{\varphi}(t) < 0$ für alle t.

Definition 2.1.9. Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von regulären parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie Umparametrisierungen voneinander sind.

Definition 2.1.10. Eine *orientierte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei diese als äquivalent angesehen werden, wenn sie durch *orientierungserhaltende* Parametertransformationen auseinander hervorgehen.

Definition 2.1.11. Eine *nach Bogenlänge parametrisierte Kurve* ist eine reguläre parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle t $\in I$.

Definition 2.1.15. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Länge von c.

Definition 2.1.17. Ein *Polygon* im $\mathbb{R}^n$ ist ein Tupel $P = (a_0, \ldots, a_k)$ von Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^n$, so dass $a_{i+1} \neq a_i$ für alle $i = 0, \ldots, k - 1$.

Definition 2.1.19. Eine parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißt *periodisch* mit *Periode* L, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + L) = c(t)$, $L > 0$, und es kein $0 < L' < L$ gibt, so dass $c(t + L') = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine Kurve heißt *geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

Definition 2.1.20. Eine geschlossene Kurve heißt *einfach geschlossen*, falls sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L hat, so dass $c|_{[0,L)}$ injektiv ist.

Proposition 2.1.13. Zu jeder regulären parametrisierten Kurve c gibt es eine orientierungserhaltende Parametertransformation φ, so dass die Umparametrisierung $c \circ \varphi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Lemma 2.1.14. Sind $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ Parametrisierungen nach der Bogenlänge derselben Kurve, so ist die zugehörige Parametertransformation $\varphi : I_1 \to I_2$ mit $c_1 = c_2 \circ \varphi$ von der Form

$$\varphi(t) = t + t_0$$

für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, falls c_1 und c_2 gleich orientiert sind. Falls c_1 und c_2 entgegengesetzt orientiert sind, ist sie von der Form

$$\varphi(t) = -t + t_0.$$

Lemma 2.1.16. Die Länge parametrisierter Kurven ändert sich nicht bei Umparametrisieren.

Proposition 2.1.18. (Längenapproximation durch Polygone). Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann gibt es für jedes (noch so kleine) $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ des Definitionsintervalls mit Feinheit kleiner als δ (d.h. $t_{i+1} - t_i < \delta$ für alle i) gilt:

$$|L[c] - L[P]| < \epsilon,$$

wobei $P = (c(t_0), c(t_1), \ldots, c(t_k))$.