3.6 Krümmung

A Einleitung: Krümmung ist ein (wenn nicht sogar der) der zentralen Begriffe der Differentialgeometrie. Dementsprechend gibt es viele verschiedene Krümmungskonzepte. Wir beginnen mit der

NORMALKRÜMMUNG

B Motivation: Wir betrachten folgende Situation

$p \in S \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Fläche

S orientierbar mit C^∞-Einheitsnormalenfeld N

$c: I \to S$ ein Kurvenstück durch p (d.h. $c(0) = p$)

bogenlängenparametrisiert (d.h. $\|\dot c(t)\| = 1 \; \forall t$)

Fassen $c: I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ als Raumkurve auf, dann gilt für die Krümmung $\kappa(0)$ von c in p (so haben wir das definiert)

$$\boxed{\ddot c(0) =: \kappa(0) \cdot n(0)}$$ ← Normalvektor an c in $t=0$; durch diese Gl. definiert

Weil $\|n(t)\| = 1 \; \forall t \Rightarrow$ $\boxed{\kappa(0) = \ddot c(0) / \|\ddot c(0)\|}$

Zerlege die Krümmung in 2 Teile

1) Krümmung von c innerhalb von S ⟶ geodätische K. von c in S; innere Geometrie von S

2) Krümmung von c die dadurch entsteht, dass S in $\mathbb{R}^3$ gekrümmt ist ⟶ Normalkrümmung von S in $\mathbb{R}^3$; äußere Geometrie von S

Dazu zerlegen wir $n(0)$ in einen Anteil tangential zu S und einen normal zu S, genauer

$$\boxed{n(0) = n(0)^{tang} + n(0)^{senk}.}$$

wobei natürlich $n(0)^{senk} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$ die Projektion auf den Normalvektor von S ist. Damit gilt

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0)\, n(0) = \kappa(0)\, n(0)^{tang} + \kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle N(p)$$

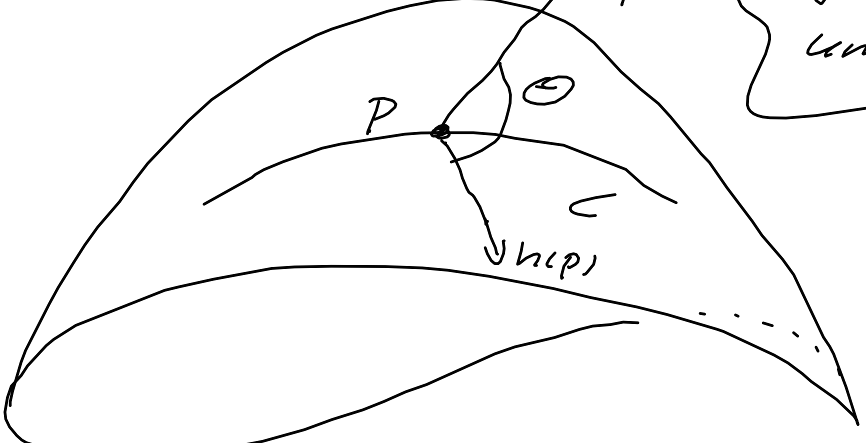
entspricht (1); später im Buch

entspricht (2); das machen wir zu unserer Def der Normalkr.

<u>DEF</u> (Normalkrümmung) Mit den Bezeichnungen von oben definieren wir die Normalkrümmung von $p \in S$ in Richtung (des Tangentialvektors) $\dot{c}(0)$ durch

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) := \langle \ddot{c}(0), N(p)\rangle = \begin{cases} \kappa(0)\langle n(0), N(p)\rangle & (\kappa(0) \neq 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Erinnerung: $n(t)$ ist ja nur definiert falls $\ddot{c}(t) \neq 0$ und $\kappa(t) \neq 0$



Falls $\kappa(0) \neq 0$ dann bezeichnen wir θ den $\measuredangle$ zwischen $n(0)$ und $N(p)$. Dann gilt

$$\boxed{\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) = \kappa(0) \cos\theta}$$

und insbesondere $|\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0))| \leq \kappa(0)$.

Klar, weil die Krümmung von c innerhalb von S verloren geht!

Unsere Def hat das folgende

PROBLEM: Wir benötigen die Kurve c. Das wirft die Frage auf ob κ_{nor} überhaupt eine Eigenschaft der Fläche S (und nicht etwa von c) ist. Dem ist aber so, wie der nächste Satz belegt, der auch eine Möglichkeit schafft κ_{nor} zu berechnen, ohne c zu verwenden. Der Schlüssel dazu ist es, sich zu erinnern, dass T_pS ja aus Tangentialvektoren von Kurvenstücken durch p besteht...

SATZ 3.6.1 (Meusnier) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Einheitsnormalenvektorfeld N und 2. Fundamentalform II.
Sei $p \in S$ und c ein Kurvenstück durch p (bogenlängenparametrisiert, $c(0) = p$)

Dann gilt für die Normalkrümmung von S in p in Richtung $\dot{c}(0)$

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) = \mathrm{II}(\dot{c}(0), \dot{c}(0))$$

Insbesondere ist $\kappa(p, X) = \kappa(X)$ für $X \in T_pS$ wohldefiniert, d.h. nicht vom X definierenden Kurvenstück abhängig!

Kurze Wh zu II: $\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ bilinear

$$\mathrm{II}_p(X,Y) = \mathrm{I}_p(W_p(X), Y)$$

1\. Fundamentalform:

$\mathrm{I}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ bilin

$\mathrm{I}_p(X,Y) = \langle X, Y \rangle$

$\mathbb{R}^3$-Skalarprodukt

Weingartenabbildung

$W_p : T_pS \to T_pS$

$W_p(X) = -d_pN(X)$

Differential des Einheitsnormalenvektorfeld

Genauer: ENVF gibt Gaußabbildung

$$N : S \longrightarrow S^2$$
$$p \longmapsto N(p) \perp T_pS \;\&\; \|N(p)\| = 1$$

Deren Differential ist (minus) die Weingartenabb

$$d_pN = -W_p : T_pS \longrightarrow T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pS$$
$$X \longmapsto W_p(X)$$

Diese Abb ist selbstadj., d.h. $\mathrm{I}_p(W_p(X),Y) = \mathrm{I}_p(X, W_p(Y))$

Nach lin. Alg. gibt es eine zugehörige bilin. Abb., diese ist die 2. Fundamentalform, also wie oben

$$\mathrm{II}_p(X,Y) = \mathrm{I}_p(W_p(X), Y) \qquad (X, Y \in T_pS)$$

<u>Beweis von 3.6.1:</u> $c(t)$ liegt in S $\Longrightarrow$

$$\langle N(c(t)), \dot{c}(t)\rangle = 0$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} 0 = \frac{d}{dt}\langle N(c(t)), \dot{c}(t)\rangle \Big|_{t=0}$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\big(N(c(t))\big)\Big|_{t=0}, \dot{c}(0)\right\rangle + \langle N(c(t)), \ddot{c}(t)\rangle$$

$$= \langle dN_p(\dot{c}(0)), \dot{c}(0)\rangle + \kappa_{nor}(p, \dot{c}(0))$$

$$= \langle -W_p(\dot{c}(0)), \dot{c}(0)\rangle + \kappa_{nor}(p, \dot{c}(0))$$

$$= -II_p(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) + \kappa_{nor}(p, \dot{c}(0))$$

$\square$

Lokale Formeln für I_p, II_p, W_p

(1) Lokale Gestalt von I_p (Wh Ro-Vortrag 2011-12-14)

$$g_{ij}(u) = I_p\big(D_uF(e_i), D_uF(e_j)\big) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle$$

(2) Lokale Gestalt von II_p (analoge Rechnung)

$$h_{ij}(u) = II_p\big(D_uF(e_i), D_uF(e_j)\big) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle$$

(3) Der Zusammenhang von I_p, W_p, II_p:

Mit $W_p(D_uF(e_i)) = \sum_{j=1}^{2} w_i^{\,j}(u)\, D_uF(e_j)$ gilt

$$h_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{2} w_i^{\,k}(u)\, g_{kj}(u)$$

bzw. mit $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$

$$w_i^{\,j}(u) = \sum_{k=1}^{2} h_{ik}(u)\, g^{kj}(u)$$

Beweise: (1) siehe 3.3, 3(c); Ro 2011-12-05

(2) $$h_{ij}(u) = \mathrm{II}_p(D_uF(e_i), D_uF(e_j)) \overset{3.5.6}{=} \mathrm{I}_p(W_p(D_uF(e_i)), D_uF(e_j)) =$$

$$N \perp S \Rightarrow \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u+te_j), N(F(u+te_j)) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} - \text{"} - = \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u_i}(u+te_j)\Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), d_pN \circ D_uF(e_j) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), N(p) \right\rangle + \left\langle D_uF(e_i), -W_p(D_uF(e_j)) \right\rangle$$

$$= \langle D_uF(e_j), W_p(D_uF(e_i)) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle$$

(3) $$h_{ij}(u) = \langle W_p(D_uF(e_i)), D_uF(e_j) \rangle$$

wieder

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{2} \omega_i^{\ k}(u) D_uF(e_k), D_uF(e_j) \right\rangle$$

Def $\omega_i^{\ k}$

$$= \sum_{k=1}^{2} \omega_i^{\ k}(u) \langle D_uF(e_k), D_uF(e_j) \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \omega_i^{\ k}(u) g_{kj}(u)$$

Multiplikation mit $g^{jl}(u)$ liefert

$$\sum_{j=1}^{2} h_{ij}(u) g^{jl}(u) = \sum_{k,j=1}^{2} \omega_i^{\ k}(u) \underbrace{g_{kj}(u) g^{jl}(u)}_{\delta_k^{\ l}}$$

$$\Rightarrow \omega_i^{\ l}(u) = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}(u) g^{jl}(u)$$