Blatt 9: Winkelfunktionen[1]

1 *Grundeigenschaften der Winkelfunktionen.*
Diese Aufgabe dient zur Wiederholung und Festigung wichtiger Aussagen aus der Vorlesung.

(a) Wie lautet die Eulersche Formel? Beweise sie!

(b) Beweise $\sin^2(x) + cos^2(x) = 1$.

(c) Zeige $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$

(d) Formuliere und beweise die Additionstheoreme.

(e) Definiere die Zahl π.

2 *Weitere Eigenschaften der Winkelfunktionen.*
Zeige die folgenden Formeln:

(a) (Doppelwinkelformeln)
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

(b) (Halbwinkelformeln)
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \qquad (x \in [0, 2\pi])$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \qquad (x \in (-\pi, \pi))$$

(c) (Produktformeln)
$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x-y)$$
$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x-y)$$
$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x-y)$$

3 *Rationale Darstellung der Winkelfunktionen.*
Sei $\alpha \in (-\pi, \pi)$. Zeige:

(a) Für $\alpha \neq 0$ gilt $\dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

(b) $\forall \alpha\ \exists! t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $t = \dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

[1] Diese Aufgaben beziehen sich noch auf den Stoff der „Einführung in die Analysis" Kapitel **2** §3 vom Sommersemester 2012. Die Vorlesungsausarbeitung dazu befindet sich auf der Materialienseite `http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA.html`.

Roland Steinbauer, September 2012

(c) Es gelten die Formeln $\cos(\alpha) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(\alpha) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Bemerkung. Mit den Formeln aus (c) erhalten wir

$$\{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) : \ -\pi < \alpha < \pi\} \ = \ \{\frac{(1-t^2, 2t)}{1+t^2} \ : \ t \in \mathbb{R}\},$$

was eine Parametrisierung des Einheitskreises mittels rationaler Funktionen ergibt. Deshalb sind diese Formeln fixer Bestandteil der Trickkiste „Intergrationstechniken”.

$\boxed{4}$ *Periodizität des Cosinus—von hinten aufgezäumt.*
Verwende ausschließlich(!) die Additionstheoreme, die Positivität von $\sin(x)$ auf $(0, 2]$, die Definition von π und Eulersche Formel aus der Vorlesung um zu zeigen, dass cos eine 2π-periodische Funktion ist, d.h.

$$\cos(x + 2\pi) \ = \ \cos(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{5}$ *Werte der Winkelfunktionen.*
Berechne (natürlich **ohne** Taschenrechner) die exakten Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für

(a) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ *Tipp:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$.

(b) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ *Tipp:* Setze $z = e^{i\pi/3}$ und löse $z^3 + 1 = 0$.

(c) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ *Tipp:* Verwende (b) und Vo. $\boxed{2}$ Kor. 3.23.

$\boxed{6}$ *Winkeldreiteilung.*
Zeige die Formel

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).$$

Tipp: Verwende Aufgabe $\boxed{1}$ (c).
Bemerkung. Mit $\alpha = 3x$ wird aus obiger Formel $4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3) = \cos(\alpha)$, sodass die Dreiteilung des Winkels α äquivalent zum Lösen der Gleichung 3. Grades $4t^3 - 3t = \cos(\alpha)$ ist. Durch Betrachten dieser Gleichung kann man zeigen, dass ein allgemeiner Winkel α **nicht** mittels Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann. Aber das ist eine Geschichte der Algebra...

$\boxed{7}$ *Oszillation.*
Gegeben sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

(a) $f_1(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $f_2(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $f_3(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Skizziere die Graphen von f_i $(i = 1, 2, 3)$ und berechne $\lim_{x\to 0} f_i$.

Roland Steinbauer, September 2012