

Blatt 2: Fachdidaktischer Bezugsrahmen/Funktionsbegriff

**5 Zwischenwertsatz: nicht auf  $\mathbb{Q}$ !** In dieser Aufgabe soll genauer untersucht werden, warum der Nullstellen-/Zwischenwertsatz der Analysis gilt, welche Voraussetzungen wesentlich sind und was das mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen zu tun hat. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Punkte:

- a) Geben Sie eine exakte Formulierung des Nullstellensatzes, vgl. Thm. 2.2.3 der „Analysis für das Lehramt“ vom Sommersemester.
- b) Werden die Voraussetzungen (1) Stetigkeit der Funktion und (2) Vollständigkeit des Definitionsbereichs wirklich benötigt? Warum (nicht)? Wo im Beweis gehen diese Voraussetzungen evtl. ein?
- c) Geben Sie eine schüler/innengerechte Erklärung des Sachverhalts, evtl. unter Verwendung des Beispiels (B.1).

**6 Stetigkeit in verschiedenen Gewändern.** Ziel dieser Aufgabe ist es den Stetigkeitsbegriff für reelle Funktionen zu reflektieren. Bearbeiten Sie die folgenden Punkte:

- a) Formulieren Sie den Begriff der Umgebungsstetigkeit, d.h. formulieren Sie die  $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition für die Stetigkeit.
- b) Geben Sie eine verbale Formulierung dieser Definition.
- c) Was stellen Sie sich unter einer stetigen Funktion vor? Was wäre eine adäquate Vorstellung für Schüler/innen etwa in der 7. Klasse?
- d) Was ist an dieser Vorstellung problematisch: „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph keine Sprünge hat“?
- e) Was ist an dieser Vorstellung problematisch: „Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph ohne abzusetzen durchgezeichnet werden kann“?

**7 Was ist hier passiert?** Betrachten Sie die folgenden beiden Wege eine Stammfunktion für  $\sin(2x)$  zu berechnen <sup>2</sup>:

- a)  $\int \sin(2x) dx = \int \sin(z) \frac{1}{2} dz = -\frac{1}{2} \cos(2x)$ , wobei  $z = 2x$  substituiert wurde.
- b)  $\int \sin(2x) dx = \int 2 \sin(x) \cos(x) dx = \int 2z \cos(x) \frac{dz}{\cos(x)} = \sin^2(x)$ , wobei der Doppelsinwinkelsatz und die Substitution  $z = \sin(x)$  verwendet wurde.

Was ist hier passiert? Stehen diese beiden Rechnungen im Widerspruch zueinander? Sind beide richtig? Wie müssen diese Ergebnisse richtig interpretiert werden?

**8 Weltbevölkerung und Getreideproduktion.** Die Entwicklung der Weltbevölkerung für den Zeitraum 1970 bis 2010 kann näherungsweise durch die Funktion

$$w(t) = 3691 e^{0,0156985 t} \quad (w(t) \text{ in Millionen, } t \text{ in Jahren})$$

beschrieben werden. Die Entwicklung der weltweiten Getreideproduktion in Millionen Tonnen kann im gleichen Zeitraum näherungsweise mit der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$g(t) = 0,004 t^4 - 0,281 t^3 + 6,04 t^2 - 0,3 t + 1193.$$

---

<sup>2</sup>Wir verwenden hier die Konvention aus Bemerkung 4.2.10 der „Analysis für das Lehramt“ vom Sommersemester für das sogenannte „unbestimmte Integral“.

Formulieren sie je zwei Aufgabenstellungen für den Unterricht, die auf die Vorstellung von (a) Wertepaaren, (b) Änderungsverhalten und (c) das Verhalten der Funktionen im Ganzen fokussieren. Arbeiten Sie jeweils entsprechende Lösungserwartungen aus.