NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2020/21
3. Termin, 29.6.2021
GRUPPE B

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Teil 2: Offene Aufgaben

Die vorliegende Prüfung ist als „Open book exam" konzipiert, d.h. Sie sind explizit dazu eingeladen ihre Vorlesungsnotizen und vor allem das Skriptum zu verwenden. Einige der Aufgaben beziehen sich direkt auf die Notation im Skriptum!

Beim offenen Teil der Prüfung können Sie, wie schon beim Multiple Coice-Teil, maximal 18 Punkte erreichen. Die genauen Punktezahlen sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(3)	(7)	(8)	(18)	(36)	

I Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Differenzierbarkeit und Ableitung.*
   Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in einem Punkt x_0 im Intervall I, falls

$$\lim_{x_0 \neq x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert und endlich ist.}$$

   Betrachten Sie die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

   (a) Zeigen Sie direkt aus der (obigen) Definition die Nichtdifferenzierbarkeit von f in $x_0 = 1$. (2 Pkte)

   (b) Erklären Sie anschaulich, warum f in $x_0 = 1$ nicht differenzierbar ist. (1 Pkt)

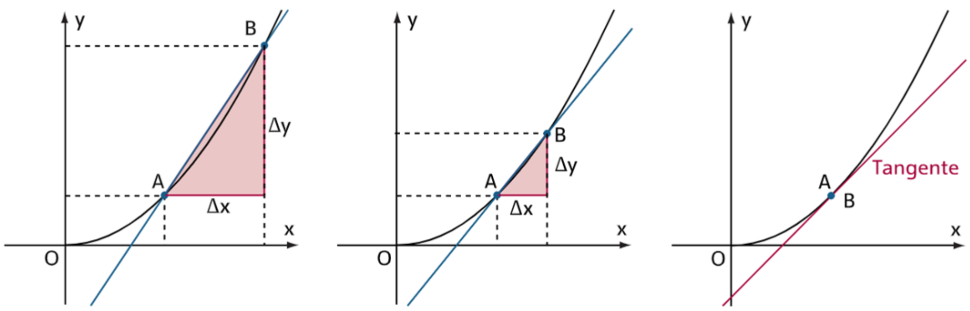
II Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

2. *Das Tangentenproblem.*
   Im Schulbuch *Dimensionen, Mathematik 7* findet sich folgende Erklärung zum Begriff der Tangente an einen Funktionsgraphen in einem Punkt:

Tangente im Punkt eines Funktionsgraphen

In der historischen Entwicklung der Differentialrechnung hat es auch einen anderen geometrischen Zugang zum Differentialquotienten gegeben, der aber in engem Zusammenhang mit den bisherigen Überlegungen steht:
Wie kann die Steigung der Tangenten an den Graph einer Funktion in einem bestimmten Punkt bestimmt werden?

Im vorigen Abschnitt *Differenzenquotient* hast du zuerst die Steigung einer Sekante s[A;B] mithilfe des Differenzenquotienten $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ermittelt. Die Steigung der Tangente im Punkt A erhältst du, indem du den Punkt B immer näher gegen A wandern lässt, also die Differenz Δx beliebig klein werden lässt.



Die Steigung der Tangente im Punkt A kann als **Grenzwert der Sekantensteigungen** der Sekanten s[A; B] aufgefasst werden.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen:

(a) Welcher Tangentenbegriff wird hier angesprochen. (1 Pkt)

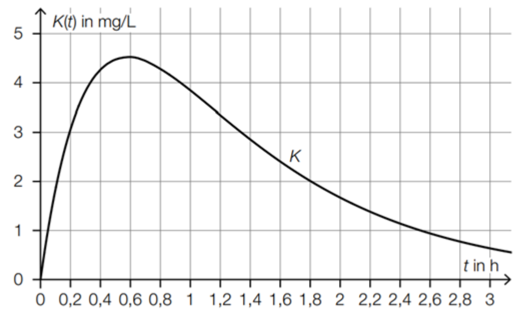
(b) Beschreiben Sie kurz in eigenen Worten das Spannungsverhältnis zwischen den beiden Tangentenbegriffen und dem damit verbundenen Paradigmenwechsel der im Zugang über das Tangentenproblem zur Differentialrechnung gemacht wird/werden muss. (3 Pkte)

(c) Ergänzen Sie den obigen Text um einen Absatz, in dem das oben angesprochene Spannungsverhältnis schüler*innengerecht thematisiert wird. (3 Pkte)

III Aufgaben zur Unterrichtspaxis

3. *Grundvorstellung zum Funktionsbegriff.*
Eine Aufgabe aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung (AHS) vom 20.Mai 2021 bezog sich auf den folgenden Funktionsgraphen:

Lea trinkt eine Tasse Kaffee. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K dargestellt, die modellhaft die Konzentration $K(t)$ von Koffein in Leas Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Trinken des Kaffees beschreibt (t in h, $K(t)$ in mg/L).



Quelle: `https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4516&token=9b89940707d3fa0dd48c831ece5a41e06a867c66`

Betrachten Sie folgende Beschreibung:

Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.

Bearbeiten Sie jetzt die folgenden Aufgabenstellungen:

(a) Benennen Sie die angesprochene Grundvorstellung zum Funktionsbegriff. (1 P)

(b) Beschreiben Sie diese Grundvorstellung im Kontext des obigen Beispiels einmal aus der Perspektive der Definitionsmenge und einmal aus der Perspektive der Zielmenge. (2 Pkte)

(c) Finden Sie zu obiger Angabe aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung eine Übungsaufgabe für Ihre Schüler*innen (etwa 9. Schulstufe), die die angegebene Grundvorstellung trainiert. (1 Pkte)

4. *Rechnungen/Beweise in „gutem Stil".*
Eine Lehrkraft stellt Ihren Schüler*innen (6. Klasse AHS) folgende Aufgabe:

> Überprüfe, ob die folgende Aussage richtig ist: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
>
> $$n^2 - 4n + 3 < n^2 - 3n. \tag{1}$$

Eine Schülerin gibt folgende Bearbeitung ab:

Beh: $n^2 - 4n + 3 < n^2 - 3n$

Bew: $(n-1)\cdot(n-3) < n\cdot(n-3)$

$n - 1 < n$ w.A. $\forall n \in \mathbb{N}$

Kontrolle für $n = 5$:

$25 - 20 + 3 < 25 - 15$

$8 < 10$ w.A.

und für $n = 100$

$10000 - 400 + 3 < 10000 - 300$

$9603 < 9700$ w.A.

$\rightarrow$ die Behauptung stimmt

Bearbeiten Sie jetzt die folgenden Aufgabenstellungen:

(a) Klären Sie, ob die angegebene Aussage (1) richtig ist. (1 Pkt)

(b) Ist die Bearbeitung durch die Schülerin korrekt? Argumentieren Sie. (1 Pkt)

(c) Führen Sie den Beweis „in gutem Stil" durch und stellen Sie dafür die Aussage gegebenenfalls richtig. (2 Pkte)