1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Funktionen: injektiv, surjektiv & bijektiv.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist

   (a) [false] eine Zuordnung von Elementen $a \in A$ und $b \in B$, wobei jedem $b \in B$ genau ein Element $a \in A$ zugeordnet ist.

   (b) [true] injektiv, falls jedes $b \in B$ nur einem $a \in A$ zugeordnet ist.

   (c) [false] bijektiv, falls jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet ist.

   (d) [true] surjektiv, falls jedes $b \in B$ einem $a \in A$ zugeordnet ist.

2. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [false] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (b) [true] Wenn (x_n) beschränkt ist, dann hat (x_n) einen Häufungswert.

   (c) [true] Wenn (x_n) monoton und beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) [true] Wenn (x_n) monoton und konvergent ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.

3. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition reeller Folgen: Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die Definition nimmt wesentlich auf den Iterationsaspekt Bezug.

   (b) [true] Die Definition bedient die Objektvorstellung.

   (c) [true] Die Definition bedient die Zuordnungsvorstellung.

   (d) [true] Der Aufzählungsaspekt wird in der Definition kodiert, indem die Definitionsmenge $\mathbb{N}$ ist.

4. (*Zum Grenzwert.*) Sei (x_n) eine reelle Folge. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Sprechweise „fast alle Folgenglieder liegen in einer Umgebung U" meint: $\exists N :\ \forall n \geq N : x_n \in U$.

   (b) [true] Die Sprechweise „fast alle Folgenglieder" meint alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

(c) [false] x_n konvergiert gegen x, falls in jeder ε-Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen.

(d) [false] x ist Grenzwert von x_n, falls die Folgenglieder x_n dem Wert x immer näher kommen.

5. (*Differenzierbarkeit.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Wenn der Graph von f in x_0 keinen Knick hat, dann ist f in x_0 differenzierbar.

   (b) [false] Wenn der Graph von f in x_0 keinen Sprung hat, dann ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) [true] f ist in x_0 differenzierbar, falls der Differenzenquotient von f bei x_0 einen endlichen Limes hat.

   (d) [false] f ist in x_0 differenzierbar, falls f auf $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist und der rechtsseitige und der linksseitige Limes von f' gegen x_0 übereinstimmen.

6. (*Integralbegriff.)* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $[a = x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n = b]$ eine Unterteilung von $[a,b]$ in n gleichlange Teilintervalle der Länge $L = (b-a)/n$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die n-te Obersumme von f auf $[a,b]$ ist gegeben durch

$$O_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x)|\, |x_{i+1} - x_i|.$$

   (b) [true] Die n-te Untersumme von f auf $[a,b]$ ist gegeben durch

$$U_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)\, (x_{i+1} - x_i).$$

   (c) [true] Haben Ober- und Untersummen von f auf $[a,b]$ einen gemeinsamen Limes, so ist das Riemannintegral von f auf $[a,b]$ als dieser gemeinsame Wert definiert.

   (d) [true] Das Riemannintegral einer stetigen Funktion f auf $[a,b]$ kann mittels einer Stammfunktion berechnet werden.

2 Sätze & Resultate

1. *(Folgen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] Jede beschränkte Folge (x_n) hat zumindest einen Häufungswert.

   (b) [true] Jede beschränkte Folge (x_n) hat ein Supremum und ein Infimum.

   (c) [false] Jede nicht konvergente Folge (x_n) hat mehrere verschiedene Häufungswerte.

   (d) [true] Jede Folge (x_n) mit zwei verschiedenen Häufungswerten divergiert.

2. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $\sum x_n$ die Reihe mit Koeffizienten x_n. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Ist (x_n) beschränkt, so konvergiert $\sum x_n$.

   (b) [false] Gilt $x_n \to 0$, so konvergiert $\sum x_n$.

   (c) [true] Konvergiert die Reihe, so bilden ihre Glieder eine Nullfolge.

   (d) [true] Falls $\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \infty$, dann gilt $x_n \to 0$.

3. *(Stetige Funktionen & Grenzwerte.)* Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Gilt $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(x)$, dann ist f stetig in 0.

   (b) [true] Gilt $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(x)$ ist endlich, dann ist f stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$.

   (c) [false] Gilt $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1} f(x)$, dann ist f stetig in 1.

   (d) [true] f divergiert in 0, falls es für alle $C \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U von 0 gibt, sodass für alle $0 \neq x \in U$ gilt, $f(x) > C$.

4. *(Eigenschaften von Funktionen, 1.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Wenn f in x_0 ein Maximum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

   (b) [false] Wenn f in x_0 ein Maximum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

(c) [true] Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat f in x_0 eine waagrechte Tangente.

(d) [false] Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat f in x_0 einen Extremwert.

5. *(Eigenschaften von Funktionen, 2.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Ist f streng monoton steigend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (b) [true] Ist f monoton steigend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (c) [true] Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f monoton wachsend.

   (d) [true] Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f monoton wachsend.

6. *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$ und $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Funktion F ist stetig.

   (b) [false] Die Funktion F ist differenzierbar aber mit unstetiger Ableitung.

   (c) [true] Es gilt $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

   (d) [true] Die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. *(Die Nullfolge $1/n$.)* Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ konvergiert klarerweise gegen 0. Aber welche der folgenden Argumentationen sind korrekt?

   (a) [true] In jeder ε-Umgebung von 0 liegen fast alle Folgenglieder von $\frac{1}{n}$.

   (b) [true] Es gilt $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ und weil $\frac{1}{\sqrt{n}}$ gegen 0 geht, ist $\frac{1}{n}$ nach dem Sandwich-Lemma eine Nullfolge.

   (c) [false] Für beliebiges N können wir nach dem Archimedischen Axiom immer ein $\varepsilon > 0$ finden, mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$ und somit gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

   (d) [true] Für beliebiges $\varepsilon > 0$ können wir nach dem Archimedischen Axiom ein N finden, mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$ und somit gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

2. *(Konvergente & divergente Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

(a) [true] $\dfrac{(-1)^n}{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) [false] $\dfrac{(-1)^n}{n}$ ist divergent.

(c) [false] $(1 + \dfrac{1}{n})^n = e$.

(d) [false] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n - 3}{3n^2 - 4} \to \dfrac{2}{3}$.

3. *(Betragsfunktion.)* Die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|$ ist stetig aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Welche der folgenden Argumentationen sind korrekt?

   (a) [false] f ist differenzierbar auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ und daher auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

   (b) [true] Es gilt $|x| \to 0$ für $x \to 0$ und daher ist $|x|$ stetig in $x_0 = 0$.

   (c) [false] Der Differenzenquotient für $|x|$ in $x_0 = 0$ existiert nicht und daher ist $|x|$ dort auch nicht differenzierbar.

   (d) [true] Der Graph von $|x|$ hat bei $x_0 = 0$ einen Knick und daher ist die Funktion dort nicht differenzierbar.

4. *(Ableitung, 1.)* Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die Polynomfunktion $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + d$.

   (b) [true] Jede rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit p und q Polynomfunktionen ist nach der Quotientenregel auf ihrem maximalen Definitionsbereich differenzierbar.

   (c) [false] Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist für alle $x \in (0, \infty)$ differenzierbar mit Ableitung $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} + \sqrt{h}} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

   (d) [true] Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist differenzierbar und es gilt nach Quotientenregel $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

5. *($f(x) = x^4$.)* Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] f hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, weil $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$ gilt.

   (b) [false] f hat kein lokales Maximum, weil $f''(x) \geq 0$ gilt.

   (c) [true] f hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minumum, weil f auf $(-\infty, 0)$ monoton fallend und auf $(0, \infty)$ monoton wachsend ist.

   (d) [true] f hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, obwohl $f''(0) = 0$ gilt.

6. *(Ableitung, 2.)* Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] f ist stetig auf $\mathbb{R}$

   (b) [true] f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

   (c) [true] f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 1$.

   (d) [false] f ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar weil der Graph dort einen Knick hat.

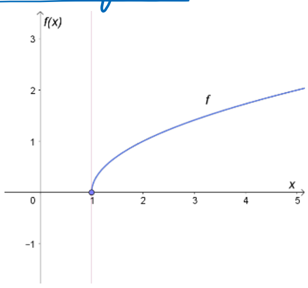
I. Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

$\boxed{1}$ Differenzierbarkeit und Ableitung

(a) Für $x_0 = 1$ gilt $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \to \infty \quad (x \to 1)$

Daher ist $\sqrt{x-1}$ in $x=1$ nicht differenzierbar. (2P)

(b) Die Funktion f hat gegen $x_0 = 1$ hin einen unbeschränkten Anstieg und hätte eine senkrechte Tangente, was nicht sein kann/darf.



(1P)

II. Aufgaben zur Fachdidaktischen Reflexion

$\boxed{2}$ Das Tangentenproblem.

(a) Die Tangente in einem Punkt wird als Grenzlage benachbarter Sekanten beschrieben. Damit wird der analytische Tangentenbegriff – Tangente als lokale Schmiegegerade – angesprochen.

(1P)

(b) Der analytische Tangentenbegriff, bei dem die Tangente als jene Gerade erklärt wird, die sich der Kurve lokal um den Berührpunkt anschmiegt, steht im Spannungsverhältnis zum geometrischen Tangentenbegriff, bei dem die Tangente als globale Stützgerade aufgefasst wird, also jene Gerade, die mit der Kurve genau einen Punkt gemeinsam hat. (2P)

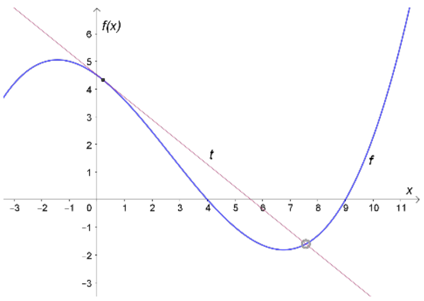
Um zu verstehen, dass die Kurvensteigung lokaler Natur ist, und eine Tangente nicht notwendigerweise genau einen Punkt mit einer Kurve gemeinsam haben muss, muss dieser Paradigmenwechsel von der globalen zur lokalen Sicht beim Zugang über das Tangentenproblem vollzogen werden.

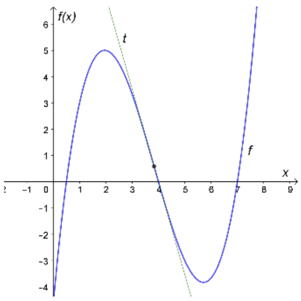
(1P)

(c) Mögliche Ergänzung:

Die Tangente als Grenzlage benachbarter Sekanten versteht die Tangente als lokale Schmiegegerade, also als bestapproximierende Gerade. Aus dieser Sicht heraus wird verständlich, warum eine Tangente nicht nur den Berührpunkt mit der Kurve gemeinsam haben muss bzw. warum sie diese schneiden kann.

Die beiden nachstehenden Grafiken veranschaulichen dies:





(3P)

III. Aufgaben zur Unterrichtspraxis

3 Grundvorstellung zum Funktionsbegriff

(a) Die angesprochene Grundvorstellung ist die Kovariationsvorstellung. (1P)

(b) Bei dieser GV geht es um das „Miteinander-Variieren" zweier Größen.

→ aus der Perspektive der Definitionsmenge:

Wie verhält sich die Konzentration $K(t)$ bei fortschreitender Zeit t?

→ aus der Perspektive der Zielmenge:

Wie muss sich die Zeit t ändern, damit die Konzentration $K(t)$ einen bestimmten Wert erreicht?

(2P)

(c) Eine mögliche Übungsaufgabe:

Ändert sich die Konzentration $K(t)$ von Koffein vor/nach dem Zeitpunkt $t = 0{,}6$ gleichmäßig oder nimmt sie zunächst stärker zu/ab und dann immer weniger stark?

(1P)

$\boxed{4}$ Rechnungen/Beweise in „gutem Stil".

(a) Die Aussage (1) ist nicht richtig, weil sie für $n \leq 3$ nicht zutrifft. (1P)

(b) Die Bearbeitung der Schülerin ist nicht korrekt, weil

→ die Division durch $(n-3)$ für $n=3$ keine Äquivalenzumformung ist.

→ sich für $n<3$ bei der Division durch $(n-3)$ das Vorzeichen ändert.

(1P)

(c) mögliche Richtigstellung der Aussage:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n>3$ gilt:

$$n^2 - 4n + 3 < n^2 - 3n. \qquad (1P)$$

Beweis „in gutem Stil":

$$\begin{aligned} & n^2 - 4n + 3 < n^2 - 3n \\ \Leftrightarrow \quad & (n-1)\cdot(n-3) < n\cdot(n-3) \\ \overset{n>3}{\Leftrightarrow} \quad & n-1 < n \quad \text{w.A.} \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n>3. \end{aligned} \qquad (1P)$$