1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

   (a) [false] Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.

   (b) [true] Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch Ihren Graphen beschrieben werden kann, der eine Menge von geordneten Paaren in $A \times B$ ist.

   (c) [false] Die Objektvorstellung beruht darauf, dass f Objekten in A Objekte in B zuordnet.

   (d) [true] Die Zuordnungsvorstellung bezieht sich darauf, dass durch f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet wird.

2. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Unter einer Grundvorstellung eines mathematischen Begriffs versteht man eine inhaltliche Deutung, die diesem Sinn gibt.

   (b) [false] Individuelle Grundvorstellungen haben normativen Charakter.

   (c) [true] Aspekte eines mathematischen Begriffs werden durch eine fachmathematische Analyse festgestellt.

   (d) [false] Primäre Grundvorstellungen beziehen sich auf mathematische Vorerfahrungen bzw. einfachere mathematische Begriffe.

3. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [false] Wenn (x_n) divergiert, dann ist (x_n) sicher unbeschränkt.

   (b) [false] Wenn (x_n) einen Häufungswert hat, dann konvergiert (x_n).

   (c) [false] Wenn (x_n) einen Häufungswert hat, dann ist (x_n) beschränkt.

   (d) [true] Wenn (x_n) bestimmt divergiert, dann ist (x_n) auch unbeschränkt.

4. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Die Grenzwertdefinition beruht stark auf dem Begriff des aktual Unendlichen.

(b) [false] Die Definition des Grenzwerts ist vor allem mit der Annäherungsvorstellung verbunden.

(c) [true] Die Annäherungsvorstellung zum Grenzwert ist eine „dynamische" Vorstellung.

(d) [true] Das potentiell Unendliche geht von der Vorstellung eines beliebig oft wiederholbaren Prozesses aus.

5. (*Differenzierbarkeit.*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Der Graph einer differenzierbaren Funktion hat keine Knicke.

   (b) [false] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so hat sie dort eine globale Stützgerade.

   (c) [false] Ist f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) > 0$, so hat sie dort eine positive Krümmung.

   (d) [true] Der Graph einer differenzierbaren Funktion hat keine Sprünge.

6. (*Integrierbarkeit.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Ist f integrierbar, dann sind Ober- und Untersummen beschränkt.

   (b) [false] Konvergieren Ober- und Untersummen, dann ist f sicher integrierbar.

   (c) [true] Das Riemannintegral von f ist (falls es existiert) der gemeinsame Limes von Ober- und Untersummen.

   (d) [true] Das Riemannintegral von f ist (falls es existiert) der Limes der Untersummen.

2 Sätze & Resultate

1. *(Rund um die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Das Cauchy-Prinzip besagt, dass jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat.

   (b) [true] Für das Intervallschachtelungsprinzip ist es essentiell, dass die Intervalle abgeschlossen sind.

(c) [true] Der Satz von Dedekind stellt sicher, dass der axiomatische Zugang zu den reellen Zahlen äuqivalent zur Konstruktion der reellen Zahlen aus den Axiomen der Mengenlehre ist.

(d) [false] Das Monotoniekriterium bleibt auch für Funktionen mit Definitionsbereich $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ gültig.

2. *(Folgen, Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) [true] Monoton wachsende und nach oben beschränkte Folgen haben einen Grenzwert.

   (b) [false] Es gibt konvergente Folgen mit zwei verschiedenen Häufungswerten.

   (c) [true] Die Summe zweier konvergenter Folgen ist ebenfalls konvergent und geht gegen die Summe der Grenzwerte der Einzelfolgen.

   (d) [true] Die Koeffizientenfolgen konvergenter Reihen sind Nullfolgen.

3. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [false] Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 auch integrierbar.

   (b) [false] Gilt $\lim_{x\nearrow x_0} f'(x) = \lim_{x\searrow x_0} f'(x)$, dann ist f in x_0 differenzierbar.

   (c) [true] Ist f auf $\mathbb{R}$ stetig und beschränkt, dann hat f auch ein Maximum auf $\mathbb{R}$.

   (d) [true] Ist f diffenzierbar und monoton steigend, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x.

4. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] f hat in x_0 ein Extremum, dann und nur dann, wenn $f'(x_0) = 0$.

   (b) [false] f hat in x_0 ein Extremum, dann und nur dann, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

   (c) [false] Hat f in x_0 eine waagrechte Tangente, dann hat sie in x_0 auch eine Extremstelle.

   (d) [true] f ist streng monoton wachsend, falls f' überall positiv ist.

5. *(Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) [true] Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

   (b) [true] Die Ableitungen zweier Stammfunktionen von f stimmen überein.

   (c) [false] Jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch differenzierbar.

   (d) [false] Ist f stetig auf $\mathbb{R}$ mit Stammfunktion F, dann gilt für $a < b \in \mathbb{R}$
   $$\int_a^b F(s)ds = f(b) - f(a)\,.$$

6. *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen über den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung sind korrekt? Der Haupsatz besagt:

   (a) [true] Das Bilden der lokalen Änderungsrate einer Funktion und das Integrieren sind (im Wesentlichen) inverse Operationen.

   (b) [true] Integrale kann man unter Zuhilfenahme einer Stammfunktion explizit ausrechnen.

   (c) [false] Jede integrierbare Funktion ist differenzierbar.

   (d) [false] Jede integrierbare Funktion ist stetig.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

1. *(Konvergente Folgen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt und auch korrekt aufgeschrieben?

   (a) [true] $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$ für $n \to \infty$.

   (b) [false] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 2.$

   (c) [false] $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0.$

   (d) [false] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1.$

2. *Reihen.* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] Für $|q| \le \frac{1}{2}$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum q^k$.

(b) [true] Die periodische Dezimalzahl $0.\bar{9}$ ist über die geometrische Reihe $0.9\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k$ definiert.

(c) [true] Jede Reihe der Form $\sum_k (a_k)(10)^{-k}$ mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ konvergiert.

(d) [false] $0.\bar{9} < 1$.

3. *(Vorzeichenmaschine mit Störung.)* Welche der folgenden Aussagen über die Folge

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

sind korrekt?

(a) [true] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

(b) [false] In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen fast alle Folgenglieder.

(c) [false] In jeder Umgebung von $x = -1$ liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

(d) [true] Es gibt eine Umgebung von $x = -1$, in der fast alle Folgenglieder liegen.

4. *(Maxima und Minima.)* Welche Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ hat ein globales Maximum.

(b) [false] Die Funktion $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat ein globales und ein lokales Maximum.

(c) [true] Die Funktion $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ hat ein globales Maximum in $x_0 = 0$.

(d) [true] Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ hat ein lokales Minimum, das gleichzeitig ein globales Minumum ist.

5. *(Die Funktion $f(x) = x^3$.)* Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

sind korrekt?

(a) [true] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(b) [true] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit nichtnegativer Ableitung.

(c) [true] f ist bijektiv.

(d) [false] f hat eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Umkehrabbildung.

6. *(Stückweise definierte Funktion.)* Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] f ist stetig auf $\mathbb{R}$ und nicht negativ.

(b) [true] $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = -1$

(c) [false] f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = -1$.

(d) [true] f hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.

I. AUFGABEN ZU FACHBEGRIFFEN DER ANALYSIS

$\boxed{1}$ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

(a)
$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx f(x)\cdot h$$
(1P)

(b) Die Funktion f muss auf dem dargestellten Intervall $I \in \mathbb{R}$ <u>stetig</u> sein. (1P)

(c) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall I und sei $a \in I$, dann ist die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ stetig differenzierbar und es gilt: $F' = f$.

Beweisskizze: Wir berechnen F' auf I:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$$

$\downarrow$

Bei diesem Schritt kann auf Basis der angeführten Überlegung die entsprechende Näherung erfolgen. (2P)

II. AUFGABEN ZUR FACHDIDAKTISCHEN REFLEXION

$\boxed{2}$ Supremum.

(a) $\sup(M) = s$ ist die kleinste obere Schranke von M. (1P)

(b) Diese Aussage spielt auf die Formulierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ an (Supremumsaxiom): Jede nach oben beschränkte, nicht leere Menge hat ein Supremum, daher hat jede nach oben beschränkte Menge wenn schon kein Maximum, dann wenigstens ein Supremum. (1P)

Zum Beispiel hat die Menge $M = (0;1)$ kein größtes Element, also kein Maximum, aber das Supremum $\sup(M) = 1$. (1P)

$\boxed{3}$ Graph einer Funktion.

(a) Elemente von $G(f)$: $(1,-1), (2,4), (3,-27), (4,256), \ldots$ (1P)

(b) Es wird vor allem der Paarmengenaspekt angesprochen, da dieser je direkt mit der Definition des Graphen $G(f)$ zu Tage tritt: Der Graph $G(f)$ ist die Menge von geordneten Paaren $(x, f(x))$ mit $x \in D$ und ist damit eine Teilmenge des kartesischen Produkts $D \times \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. (1P)

(c) Definitionsmenge von f: $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Funktionsgleichung: $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto (-x)^x$ (1P)

III. AUFGABEN ZUR UNTERRICHTSPRAXIS

$\boxed{4}$ Grundvorstellungen zum Integralbegriff.

(a) 1. Möglichkeit: Die Weglänge s entspricht der Fläche unter dem Graphen von v im Intervall $[0;20]$ – diese kann durch Kästchenzählen abgeschätzt werden, wobei ein Kästchen jeweils einem Wert von $0{,}5$ m entspricht.

Auf diese Weise erhält man ca. 40 m für s. (1P)

2. Möglichkeit: Die Länge s kann durch Berechnen des Flächeninhalts desjenigen Rechtecks abgeschätzt werden, das aus der Länge des Intervalls (20 m) und einem ungefähren Mittelwert von v (bei ca. $2{,}0$ m/s) gebildet wird.

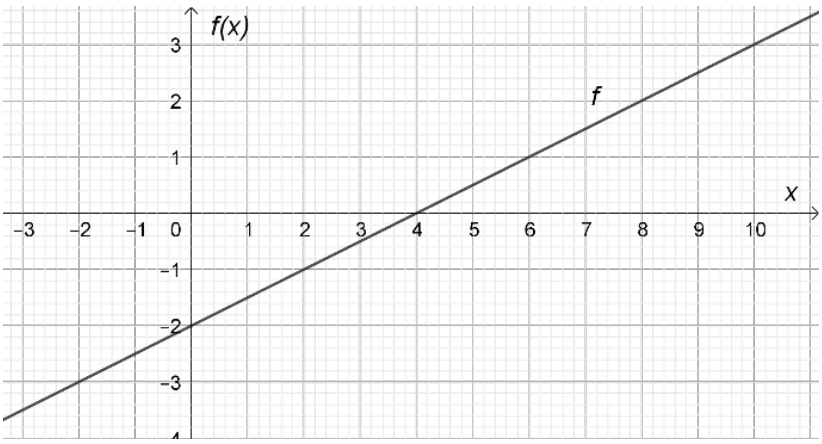
Auch dabei ergibt sich ca. 40 m für s. (1P)

(b) ad 1. Möglichkeit: Dabei liegt die Flächeninhaltsvorstellung verknüpft mit der Rekonstruktionsvorstellung zugrunde, weil mit dem Kästchenzählen die Fläche unter einer Berandung abgeschätzt wird bzw. der Weg aus der Geschwindigkeit (momentane Änderungsrate) rekonstruiert wird. (1P)

ad 2. Möglichkeit: Dabei liegt v.a. die Mittelwertsgrundvorstellung zugrunde, weil man die Fläche unter der Kurve durch das Produkt der Intervalllänge mit einem geeigneten Mittelwert von v bestimmt. (1P)

(c) 1) Rekonstruktionsgrundvorstellung – Trainingsaufgabe:

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt. Der Graph einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Punkt (1 | −1).



Aufgabenstellung:

Zeichne den Graphen dieser Stammfunktion F in das Koordinatensystem ein. (2P)

2) <u>Mittelwertgrundvorstellung – Trainingsaufgabe:</u>

Die Funktion $v: [0;10] \to \mathbb{R}, t \mapsto 0{,}5 \cdot t + 4$ ordnet für einen Körper jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t)$ zu (t in s, $v(t)$ in m/s).

Aufgabenstellung:

Zeichne den Graphen von v im Intervall $[2;6]$ in ein Koordinatensystem und zeige mithilfe des gezeichneten Graphen, dass das Integral $\int_2^6 v(t)\,dt$ dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen 4 und 6 entspricht. (2P)