Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2022, 4. Termin, 28.2.2023, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Welche Aussagen sind korrekt? Für eine reelle Folge (a_n) und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls
   (a) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (b) [true] in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen.
   (c) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$
   (d) [true] in jeder ε-Umgebung von a alle Folgenglieder a_n liegen.

2. (*Beschränkte Folgen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine reelle Folge (b_n) ist beschränkt, falls
   (a) [true] $\exists C > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\text{:} \quad -C \leq b_n \leq C \quad \forall n \geq N.$
   (b) [false] (b_n) einen Häufungswert hat.
   (c) [true] $\exists C > 0: \quad |b_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
   (d) [false] $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0\text{:} \quad |b_n| \leq C.$

3. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Mit dem Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet man
   (a) [true] die Folge $(s_k)_k$ mit $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$.
   (b) [true] $\lim_{k\to\infty} s_k$, falls er endlich ist.
   (c) [false] $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls er endlich ist.
   (d) [true] $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, falls er endlich ist.

4. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist **nicht** stetig in $a \in \mathbb{R}$, falls
   (a) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   (b) [true] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.
   (c) [true] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.
   (d) [true] es ein (Versager-) $\varepsilon > 0$ gibt, sodass es in jedem noch so kleinen „Sicherheitsintervall" $(a - \delta, a + \delta)$ (mindestens) ein x gibt mit $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

5. (*Lokale und globale Maxima.*) Welche Aussagen sind korrekt? Die Funktion $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $a \in \mathbb{R}$
   (a) [true] ein lokales Maximum, wenn es eine Umgebung U von a gibt, sodass $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in U$ gilt.
   (b) [false] ein globales Maximum, wenn es eine Umgebung U von a gibt, sodass $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in U$ gilt.
   (c) [true] ein lokales Maximum, wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
   (d) [false] ein striktes lokales Maximum, wenn es eine Umgebung U von a gibt, sodass $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in U$ gilt.

6. (*Potenzen.*) Sei $\mathbb{R} \ni x > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [true] $x^q = \sqrt[m]{x^n} \quad (q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q})$.
   (b) [false] $x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ mal}} \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$.
   (c) [true] $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
   (d) [false] $\log(x^\alpha) = x \log(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

7. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in einem Punkt ξ im Intervall I, falls

   (a) [true] $\lim\limits_{\xi \neq x \to \xi} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{x - \xi}$ existiert und endlich ist.

   (b) [false] es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ gibt sodass,
   $$f(\xi + h) - f(\xi) = \alpha\, h + r(h) \text{ und } \lim_{0 \neq h \to 0} r(h) = 0.$$

   (c) [false] $\lim\limits_{\xi \neq x \to \xi} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$ existiert (möglicherweise als uneigentlicher Grenzwert).

   (d) [false] der Graph von f in ξ keinen Knick hat.

8. (*Integrierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt? Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls
   ($\mathfrak{T}[a, b]$ bezeichnet den Raum der Treppenfunktionen auf $[a, b]$)

   (a) [false] Ober- und Unterintegral existieren.

   (b) [true] f eine Treppenfunktion ist.

   (c) [true] $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \;\middle|\; \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\ f \leq \varphi \right\} = \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \;\middle|\; \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\ \psi \leq f \right\}$

   (d) [false] $\inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt \;\middle|\; \varphi \in \mathfrak{T}[a, b],\ f \leq \varphi \right\} > \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \;\middle|\; \psi \in \mathfrak{T}[a, b],\ \psi \leq f \right\}$

2 Sätze & Resultate

9. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) [false] Es gibt monotone und beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

   (b) [false] Jede beschränkte Folge konvergiert.

   (c) [true] Jede konvergente Folge hat einen Häufungswert.

   (d) [true] Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

10. (*Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Eine reelle Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls

    (a) [true] $|a_n| < 1/n^2$.

    (b) [false] $a_n < 1/n^2$.

    (c) [false] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{n} = 0.$

    (d) [true] $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0.$

11. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

    (a) [false] Stetige Funktionen auf beliebigen Intervallen sind beschränkt.

    (b) [true] Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ hat einen Fixpunkt.

    (c) [false] Ist f stetig auf (a, b), so hat f dort ein Supremum und ein Infimum.

    (d) [true] Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) > 0$ so gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(x) > 0$ für alle $x \in (-\delta, \delta)$.

12. *(Lokale vs. globale Maxima)* Welche Aussagen sind korrekt? Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat

    (a) [true] auf jeden Fall ein globales Maximum.

    (b) [true] auf jeden Fall ein lokales Maximum.

    (c) [false] in jedem lokalen Maximum eine verschwindende Ableitung.

    (d) [false] in jedem globalen Maximum eine verschwindende Ableitung.

13. (*Exponentialfunktion und Logarithmus.*) Welche Aussagen sind korrekt?
    (a) [false] $\exp$ ist streng monoton wachsend und daher ist $\log$ als Umkehrfunktion von $\exp$ streng monoton fallend.
    (b) [true] $\exp$ erfüllt die Funktionalgleichung $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.
    (c) [true] $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty = -\lim_{x\searrow 0}\log(x)$.
    (d) [true] $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \le 1)$.
14. (*Eigenschaften differenzierbarer Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
    (a) [true] Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.
    (b) [false] Jede differenzierbare Funktion ist auch gleichmäßig stetig.
    (c) [false] Jede differenzierbare Funktion ist beschränkt.
    (d) [false] Jede differenzierbare Funktion ist monoton.
15. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Welche Aussagen sind korrekt? Die erste Aussage des HsDI kann geschrieben werden als
    (a) [false] $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = f(x)$.
    (b) [true] $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.
    (c) [false] $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx = f(x)$.
    (d) [true] $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx = f(t)$.
16. (*Zur Integralrechnung.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Mit integrierbar ist immer Riemann-integrierbar gemeint.)
    (a) [true] Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist f auch integrierbar.
    (b) [false] Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch integrierbar.
    (c) [~~false~~ true] Für integrierbare $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \le \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.
    (d) [true] Für jedes stetige $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b-a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

17. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?
    (a) [true] $\left(\dfrac{n^2}{3n}\right)_{n\ge 1}$ ist divergent.
    (b) [true] $\dfrac{n^3+4n^2}{3+n+n^3} \to 1 \ (n\to\infty)$.
    (c) [true] Falls (a_n) und (b_n) konvergieren und $a_n < b_n$ für alle n gilt, dann gilt $\lim a_n \le \lim b_n$.
    (d) [false] $\dfrac{(-1)^n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.
18. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
    (a) [true] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert.
    (b) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n}$ konvergiert.
    (c) [true] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ für $|q| < 1$.
    (d) [false] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert absolut.

19. *(Sinus und Cosinus).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$.

(b) [false] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\cos(x)-1}{x} = 1$.

(c) [false] $\cos(0) = 0$.

(d) [true] $\cos(-x) = \cos(x)$.

20. (*Stetige Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

(a) [true] $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(x)$.

(b) [true] $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$.

(c) [false] $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(1/x)\,(x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

(d) [true] $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sin(1/x)\,(x \neq 0), \quad f(0) = 0$.

21. (*Differenzierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Funktionen sind differenzierbar?

(a) [false] $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x-1|$.

(b) [true] $f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$.

(c) [false] $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x\sin(1/x)$ (für $x \neq 0$), $\quad f(0) = 0$.

(d) [false] $f:\ [0,\infty] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$.

22. (*Funktionsgrenzwerte.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x) = 0$.

(b) [true] $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ existiert nicht.

(c) [false] $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = -\infty$.

(d) [true] $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$.

23. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [false] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend, weil $f'(x) > 0$ für alle x gilt.

(b) [true] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = |x|$ hat in $x = 0$ ein (lokales und globales) Minimum, obwohl die Funktion dort nicht differenzierbar ist.

(c) [false] $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^2$ hat in $x = 0$ ein Minimum, weil $f'(0) = 0$ gilt.

(d) [true] $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x) = 1/x$ ist unbeschränkt.

24. (*Integrierbare Funktionen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Jede Treppenfunktion ist integrierbar.

(b) [true] $\sin$ ist auf $[-1,1]$ stetig und daher integrierbar mit $\int\limits_{-1}^{1} \sin(x)dx = 0$.

(c) [false] $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\ dx\ < \infty$.

(d) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\ dx\ < \infty$.

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Häufungswerte vs. Konvergenz.*) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (relle) Folge mit genau zwei verschiedenen Häufungswerten. Argumentieren Sie in eigenen Worten, warum (a_n) divergiert. Fertigen Sie eine Skizze an. (4 Pkte)

   (b) (*Konvergenz und Vorzeichen.*) Beweisen Sie (exakt), die folgende Aussage: Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Falls $c_n \geq 0$ für alle n gilt, dann ist auch $c := \lim_{n\to\infty} c_n \geq 0$. (3 Pkte)

   (c) (*Konvergenzprinzip für beschränkte, monotone Folgen.*) Es ist eine Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass jede monotone und beschränkte reelle Folge konvergiert. Argumentieren sie in eigenen Worten, warum diese Aussage stimmt und fertigen Sie eine Skizze an. (3 Pkte)

2. *Differenzierbare Funktionen*

   (a) (*Knicke zerstören die Differenzierbarkeit.*) Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ im Punkt $\xi = 0$ nicht differenzierbar ist. (2 Pkte)

   (b) (*Satz von Rolle.*) Formulieren Sie (exakt) den Satz von Rolle und erklären Sie seine Aussage anschaulich. Fertigen Sie dazu eine Skizze an. Schließlich erklären Sie anschaulich und in eigenen Worten, warum diese Aussage stimmt.
   (4 Pkte)

3. *Differenzieren & Integrieren*

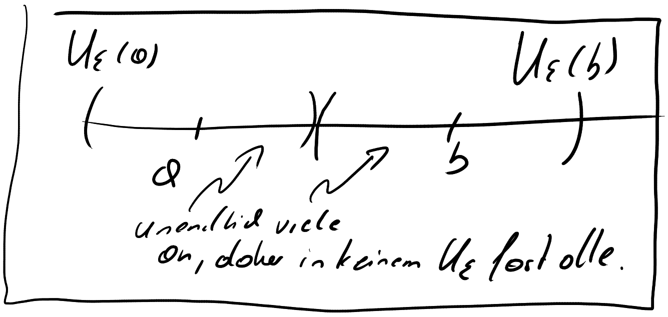
   (a) (*Kurvendiskussion.*) Formulieren Sie (genau!) die notwendige und die hinreichende Bedingung für lokale Extrema und geben Sie explizite Beispiele an, die zeigen, dass die notwendige Bedingung nicht hinreichend ist und die hinreichende nicht notwendig. (4 Pkte)

   (b) (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Der Hauptsatz besagt, dass Differenzieren und Integrieren „im Wesentlichen" Umkehroperationen sind. Erklären Sie, was es mit diesem „im Wesentlichen" auf sich hat. (4 Pkte)

2023-07-21

Teil 2: Offene Aufgaben

[1] (a) Seien a, b die beiden HW von (a_n). Dann ist $a \neq b$ und man kann disjunkte ε-Umgebungen $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ wähle (z.B.: $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$). Dann liegen sowohl



in $U_\varepsilon(a)$ als auch in $U_\varepsilon(b)$ unendlich viele der a_n. Daher liegen außerhalb von $U_\varepsilon(a)$ und auch außerhalb von $U_\varepsilon(b)$ mehr als endlich viele der a_n – ergo weder in $U_\varepsilon(a)$ noch in $U_\varepsilon(b)$ fast alle a_n. Damit ist weder a noch b Grenzwert. Darüberhinaus gibt es keinen HW und daher auch keinen GW, weil ein GW auch HW ist.

(b) $c_n \to c,\ c_n \geq 0 \overset{zz.}{\Longrightarrow} c \geq 0.$

Ang $c < 0 \Rightarrow \varepsilon := -c > 0$

$$c_n \to c \Rightarrow \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N(\varepsilon):\ \varepsilon > |c_n - c| = |\underbrace{c_n}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon}_{>0}| = c_n + \varepsilon \quad |-\varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 > c_n \text{ Widerspruch.} \qquad \square$$

(c) Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

Es genügt eine mon. wachsende und n.o. beschränkte Folge (x_n) zu betrachten. Wegen der Monotonie gilt $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$ d.h. die Folgenglieder wachsen (trifft immer $=$ zu, dann ist die Folge konstant und auch konvergent). Wegen der Beschränktheit gibt es ein Supremum a (der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder) und die Folge wird gegen dieses Supremum gequetscht.

Hier geht die Vollständigkeit ein?