FUNKTIONALANALYSIS

Sommersemester 2023

Roland Steinbauer

LVA: 250 090-1 VO, 3SWS/5ECTS

0 VORBEMERKUNGEN

0.1. BEGRIFFSBESTIMMUNG: Was ist & was soll die FA?

Wie immer ist es schwer/unmöglich eine Definition zu geben. Am ehesten könnte

heißt: Eingrenzung
Einsperren ist aber nicht erwünscht ...

ein Leitmotiv der FA

angegeben werden:

Verschmelzung algebraischer mit analytischen/topologischen Strukturen

Das klingt abstrakt & blutleer

JA!

NEIN: große Anwendungsrelevanz

0.2 FA im (ANWENDUNGS)KONTEXT

Die Ursprünge der FA liegen in Problemen der Anwendungswiss. v.a. der Physik (historisch gesehen die wichtigste; heute?)

Die folgende Skizze die FA im Kontext darstellen

FA 2

ist ein Versuch ohne Anspruch auf Vollständigkeit / Exklusivität:

Schwingungslehre
Elektromagnetismus
Potentialtheorie
Quantenmechanik
Integralgleichungen
Anwendungen in Physik / Chemie

FA

Theorie der (Part.) Diffgl.
Numerik
Wahrscheinlichk.-Theorie
Approximationsth.

ANWENDUNGEN
in NAWI-TECHNIK
& WIRTSCHAFTSWISS

Die Funktion & Nützlichkeit der FA als math. Disziplin besteht im Herausschälen / Bereitstellen des abstrakten Kerns / der wesentlichen Grundbegriffe im Zusammenhang dieser Problemfelder (konkretes: später).

Im hist. Zusammenhang: Kreislauf von Anwendung – Theorie – neue Anwendung – neue Theorie usw.

0.3 ABSCHWEIFUNG: Vom Nutzen der Abstraktion

Isolieren der richtigen Begriffe, Sichtbarmachung von Zusammenhängen (entdecken!!!)

Jede ausgereifte Theorie entwickelt eine Fülle nichttrivialer Aussagen aus wenigen Grundbegriffen [W] – und nicht umgekehrt!

0.4 HISTORISCHE BEMERKUNGEN

Gärungsphase [H]: 1890–1940

Anfänge in Italien: Peano, Volterra

Polnische Schule (Lwow): Banach, Steinhaus, Mazur, Schauder, Orlicz, Ulam

→ „Théorie des opérations linéaires"
1932 → FA als eigenständige Disziplin

dazwischen: Fredholm, Fréchet, Hilbert, Schmidt, Riesz, Hahn.

Lesetipps:
- [H], Kap XIX: Ein Blick auf die werdende FA
- Dieudonné, History of FA, North Holland, Amsterdam 1981

0.5 INHALTE DER FA – Etwas konkreter

Grundidee

(i) fasse Funktionen, Folgen, ... als Punkte eines Vektorraumes auf (Funktionenräume, Folgenräume, ...)

(ii) Löse analytische Probleme durch Studium dieser Räume & ihrer Abbildungen

Konsequenz: Nichttriviales entsteht nur, wenn die Räume mit einer topologischen Struktur versehen werden; damit können die wesentlichen analytischen Eigenschaften (Stetigkeit, Konvergenz) gefasst werden.

↳ Zusammenspiel: algebraischer Methoden mit analytisch/topologischen Methoden

Inhalt der FA ganz allgemein:

Studium topologischer VR und der Abb. zwischen ihnen

VR-Operationen stetig

Etwas mehr im Detail unterscheiden wir

FA 5

normierte / nichtnormierte FA

Top der VR induziert von Norm / Skalarprodukt

Top induziert von Familien von Halbnormen (lokalkonvexe VR)

lineare / nichtlineare FA

lineare, stetige Abb zw. den resp. VR

nichtlin. Abb zw den resp. Räumen (Fixpunktsätze, ...)

0.6 INHALTE DER VO:

Grundlagen der normierten linearen FA

[1] BANACH- UND HILBERTRÄUME: Grundlage & Bsp

[2] NORMIERTE VR UND STETIGE LIN ABB.

[3] HILBERTRÄUME UND SPEKTRALTHEORIE

[4] HAUPTSÄTZE DER FA (Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, offene Abb, abg. Graph)

0.7 Ein Text zur Einstimmung

FA6

[M. Grosser, Mathematik für Physik 4 (Funktionalanalysis, 1997); leicht gekürzt]

Besinnen wir uns auf eine der ursprünglichen Aufgaben der Mathematik in Anwendungssituationen, nämlich etwas „auszurechnen", d.h. die Lösung eines in mathematische Ausdruckweise übersetzten Problems zu ermitteln.

Besteht die Lösung in einem Zahlenwert, so ist es langfristig gesehen wenig sinnvoll, das gegebene Problem als einzelnes anzugehen: In den meisten Fällen wäre das zu schwierig oder insofern unrationell, weil man man beim nächsten Problem wieder von vorne weg zu überlegen beginnen müßte. Viel sinnvoller ist es, die Menge aller in Frage kommenden (reellen, komplexen) Zahlen mit den dort relevanten Rechenoperationen und Strukturen (Ordnung, Nähe und Distanz, Approximation) zu untersuchen und außerdem die Abbildungen dieser Menge (in einer gegebenen Gleichung entspricht ja jede Seite einer Funktion in der gesuchten Unbekannten) zu studieren. Das geschieht in der Analysis der Funktionen einer (reellen beziehungsweise komplexen) Variablen.

Analoges gilt, falls die Lösung in einem Zahlenvektor beziehungsweise in einem n-Tupel von Zahlen besteht: Wiederum bringt einen das endlose Studium von jeweils gegebenen Einzelfällen kaum weiter. Nützlicher ist es zum Beispiel im Falle linearer Gleichungssysteme, die allgemeine Lösbarkeit einschlägiger Probleme auf der Basis eines gründlichen Studiums endlichdimensionaler Vektorräume und linearer Abbildungen zu untersuchen. Im Falle nichtlinearer Gleichungen beziehungsweise Abbildungen müssen die Methoden der Analysis von Funktionen mehrerer Variabler herhalten.

Genauso stellt sich die Situation dar, wenn die Lösung eines Problems in einem noch „komplizierteren" mathematischen Objekt wie etwa einer Folge oder einer Funktion besteht. Das ist unter anderem in den unzähligen Situationen der Fall, wo eine Differential- oder eine Integralgleichung gelöst werden muß (beispielsweise zur Ermittlung der Bahn eines Himmelskörpers, der Ausbreitung einer Erdbebenwelle, der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems, der Schwingung einer Membran einer gewissen Gestalt und so weiter). In einer solchen Situation ist es noch viel schwieriger, eine einzelne Aufgabe in einem „singulären Gewaltakt" zu lösen. Hier muß jeweils eine geeignete Gesamtheit von Funktionen, Folgen etc. mit den relevanten Strukturen (ein gewisser „Raum") sowie die passende Art von Abbildungen zwischen solchen Räumen studiert werden. Diese Räume sind meist komplizierter als die vertrauten Räume $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ oder Teilmengen von diesen. Im Falle von Gesamtheiten von Folgen oder Funktionen handelt es sich oft um Vektorräume. Diese sind in der Regel unendlichdimensional, sodaß die typischen Methoden, die für endlichdimensionale Räume und deren lineare Abbildungen entwickelt worden sind, oft nicht mehr greifen (natürlich genau dann nicht mehr, wenn irgendwie die Endlichdimensionalität benutzt wurde, wie etwa bei der Verwendung eines Dimensionsformel).

Beim Studium unendlichdimensionaler Vektorräume ergibt sich selbst im Falle bloß linearer Abbildungen eine weitere Schwierigkeit gegenüber der endlichdimensionalen Theorie: Dort konnte jeder Vektor durch eine endliche Linearkombination von Elementen einer Basis dargestellt werden. Die Theorie war rein algebraisch; die typischen Bestandteile einer „Analysis" wie Konvergenz von Vektoren und Stetigkeit der involvierten Funktionen blieben dem Studium der „nichtlinearen" Phänomene vorbehalten und spielten in der linearen Algebra somit kaum eine Rolle. Im Fall unendlichdimensionaler Vektorräume ist das jedoch anders: Will man ein Element des betreffenden Raumes durch eine fixe „Basismenge" von Grundelemen-

FA 7

ten darstellen (wie zum Beispiel in der Theorie der Fourierreihen eine gegebene periodische Funktion [Schwingung] durch bestimmte Sinus- und Kosinusfuntionen [Grund- und Oberschwingungen], dann muß man sich mit unendlichen Summen statt endlicher Linearkombinationen einlassen; das involviert aber sofort die Konvergenzfrage: Was heißt im vorliegenden Raum „Die Partialsummen nähern sich der Summenfunktion immer mehr an"? Wann sind zwei Funktionen als „nahe zueinander" zu bezeichnen? Das Problem besteht nicht darin, eine vernünftigen Vorschlag für einen Abstandbegriff für Funktionen zu machen (zum Beispiel wäre doch bei reellen Funktionen der senkrechte Maximalabstand der Graphen, also $\|f-g\|_\infty = \sup|f(x)-g(x)|$ sicher einen Versuch wert), sondern aus den vielen zur Verfügung stehenden Varianten die dem jeweiligen Problem angemessene herauszufinden. So zeigt sich etwa, daß der ebengenannte Vorschlag den Nachteil hat, daß man auf ein Skalarprodukt in dem betreffenden Funktionenraum verzichten muß und es daher kein Analogon zum Begriff der Orthonormalbasis gibt; überdies ist es in physikalischen Problemstellungen sinnvoll, den Abstand zwischen zwei Funktionen [physikalischen Abläufen] durch die Energiedifferenz zwischen diesen beiden auszudrücken, und die ist meist durch einen Ausdruck der Art $\int|f-g|^2$ (die Quadratwurzel daraus wäre dann $\|f-g\|_2$) gegeben. (Diese letzte Aussage ist in den Details weder mathematisch noch physikalisch exakt, sie führt aber auf die richtige Spur.) Dabei kann man noch von Glück sprechen, wenn solche Reihendarstellungen durch „Basiselemente" überhaupt möglich sind, oft kann oder will man die Lösung nur durch geeignete einfachere Objekte mit einer gewissen Genauigkeit annähern. Wiederum ist hier ein Abstands- oder zumindest ein allgemeinerer Begriff von Benachbartheit notwendig, um von Konvergenz sprechen zu können. Die vorliegenden unendlichdimensionalen Vektorräume müssen also stets mit derartig passenden metrischen oder topologischen Strukturen ausgerüstet werden. (Eine solche stand uns zwar auch schon im endlichdimensionalen Fall mit der euklidischen Norm zur Verfügung, allerdings haben dort Konvergenz- beziehungsweise Approximationsfragen in der linearen Theorie aus den oben angeführten Gründen kaum eine Rolle gespielt.) Das hat nun zur Folge, daß die auftretenden linearen Abbildungen die vorhandenen Konvergenzen respektieren, also stetig sein müssen: Aus der Konvergenz [sukzessive besseren Approximation] der Argumente muß die Konvergenz [sukzessive bessere Approximation] der Bilder folgen. Im endlichdimensionalen Fall ist dieses Problem keine Erwähnung wert: Die Konvergenz spielt in der linearen Theorie kaum eine Rolle, und überdies sind alle linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen automatisch stetig: Sie sind sogar differenzierbar, da sie ja optimal durch sich selbst linear approximiert werden können. In unendlichdimensionalen Räumen mit Konvergenzbegriff gibt es aber im Regelfall immer unstetige lineare Abbildungen; daher müssen speziell die stetigen linearen Abbildungen genau bestimmt und studiert werden. Eine unangenehme aber umso wichtigere Ausnahme tritt in der Quantenmechanik auf: Dort sind gerade die wichtigsten Operatoren, nämlich der Orts- und der Impulsoperator, unstetig auf dem Hilbertraum der möglichen Zustände des Systems, genaugenommen sind sie gar nicht auf allen Zuständen dieses Raums definiert!

Fassen wir zusammen, so haben wir oben die Theorie der unendlichdimensionalen Vektorräume mit passenden Distanz- oder Konvergenzbegriffen zusammen mit den entsprechenden stetigen linearen Abbildungen („Operatoren") in ihrer Wichtigkeit herausgestellt. Diese bildet das Thema der (linearen) Funktionalanalysis, die um die Jahrhundertwende konkrete Gestalt angenommen hat. Darüberhinaus gibt es natürlich noch die nichtlineare Funktionalanalysis, bei der auch nichtstetige Operatoren ins Auge gefaßt werden. Dieses Gebiet ist naturgemäß schwieriger, hat aber gerade in letzter Zeit an Wichtigkeit gewonnen.

1 Banach- und Hilberträume: Grundlagen & Beispiele

§1.1. Normierte Vektorräume: Grundbegriffe

1.1. Notation (Grundkörper)

Wir verwenden gleichzeitig reelle und komplexe Vektorräume (VR) und schreiben für den Grundkörper $\mathbb{K}$. Es gilt also

$$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$$

1.2 Def (Normierte VR) Sei V ein $\mathbb{K}$-VR.

(i) Eine Norm auf V ist eine Abb

$$\| \ \| : V \to \mathbb{K}$$

mit den Eigenschaften ($v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$)

(N1) $\|v\| \geq 0$,

$\|v\| = 0 \iff v = 0$ (positiv definit)

(N2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ (homogen)

(N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Δ-Ungleichung)

(ii) Wir nennen das Paar $(V, \| \ \|)$ einen normierten Vektorraum (NVR).

(iii) Gilt in (N1) nur $\Leftarrow$ (d.h. $\|v\|=0$ i.A. $\not\Rightarrow$ $v=0$) so heißt $\|\ \|$ <u>Halbnorm</u>.

FA 9

Halbnormen werden oft mit p statt $\|\ \|$ bezeichnet.
Ein Paar (V,p) heißt <u>halbnormierter VR</u>

<u>1.2 ABsp (NVR)</u> (Beweise siehe Analysis bzw. UE)

(i) Normen auf $\mathbb{K}^n$

$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x|x\rangle_{St}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (Euklidische/2-Norm)

$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (1-Norm)

bzw allgemeiner für $1 \leq p < \infty$

$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$ (p-Norm)

$\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|)$ (∞-/Supremumsnorm)

(ii) X eine Menge; $\mathcal{B}(X) := \{f: X \to \mathbb{C} \text{ beschränkt}\}$

mit $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ (Supremumsnorm)

(iii) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$; $\mathcal{C}([a,b]) := \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

mit $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ (p-Norm)

1.VO 2.3.23

Speziell wiederum $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$.

2. VO
6.3.23

FA 10

1.3 BEOBACHTUNG (2 einfache Konsequenzen aus (N1)–(N3))

(i) "$\Leftarrow$" in (N1) folgt schon aus (N2), denn

$$\|0\| = \|\underset{\in \mathbb{K}}{0} \cdot \underset{\in V}{0}\| \overset{(N2)}{=} |0|\,\|0\| = 0\,\|0\| = 0$$

(ii) Es gilt die verkehrte Δ-Ungleichung

$$\big|\,\|v\| - \|w\|\,\big| \le \|v-w\|, \qquad (1.1)$$

denn (wörtlich wie in der Analysis für $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$)

$\|v\| = \|v-w+w\| \overset{(N3)}{\le} \|v-w\| + \|w\| \Rightarrow \|v\| - \|w\| \le \|v-w\|$

$\|w\| = \dots \qquad \Rightarrow \|w\| - \|v\| \le \|w-v\|.$

Weil $\|v-w\| \overset{(N2)}{=} |-1|\,\|w-v\| \Rightarrow (1.1)$.

1.4. BEMERKUNG (Topologische Begriffe für NVR)

Jeder NVR wird vermöge der Def

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

ein metrischer Raum (siehe Analysis/Top.), daher sind automatisch die Begriffe Konvergenz, Cauchy-Folge (CF), Beschränktheit, Kompaktheit, etc. definiert.

Natürlich können wir diese Begriffe direkt mittels der Norm formulieren. Insbesondere definieren, behaupten und beweisen wir in völliger Analogie zum Fall des $\mathbb{K}^n$:

(i) $x = \lim_{n\to\infty} x_n :\Longleftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ in $\mathbb{R}$, i.e.,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N: \|x_n-x\|<\varepsilon$$

(ii) $(x_n)_n$ heißt Cauchy-Folge (CF) $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n\geq N: \|x_n-x_m\|<\varepsilon$$

(iii) $B\subseteq V$ heißt beschränkt $:\Longleftrightarrow \exists C: \|v\|\leq C\ \forall v\in B$

(iv) Jede konvergente Folge ist CF, denn

$\|x_n-x_m\| \overset{(N3)}{\leq} \|x_n-x\|+\|x-x_m\| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 \leq \varepsilon$ für m,n groß genug.

(v) Jede CF ist beschränkt, denn

$$\|x_n\| \leq \max(\|x_1\|, \dots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\|+1) \quad \forall n\geq N,$$

mit N passend zu $\varepsilon=1$.

(vi) $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k :\Longleftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$

$\sum x_k$ heißt absolut konvergent $:\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$

(vii) Die Vektorraumoperationen und die Norm sind stetig, i.e.,

$x = \lim x_n,\ y = \lim y_n \Rightarrow x+y = \lim(x_n + y_n)$

$x = \lim x_n,\ \lambda = \lim \lambda_n \Rightarrow \lambda x = \lim(\lambda_n x_n)$
in $\mathbb{K}$

$x = \lim x_n \Rightarrow \|x\| = \lim \|x_n\|$ (Beweis UE)

(viii) $\sum x_k < \infty \Rightarrow \lim x_n = 0$

(Beweis UE)

1.5 WARNUNG (Konvergenz vs. CF)

In $\mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$ gilt

(x_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ (x_n) ist CF.

I.A. gilt jedoch nur 1.4(iv) (d.h. (x_n) CF $\overset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow}$ x_n konv.)

Es ist eine wesentliche Eigenschaft eines NVR, wenn alle CF konvergieren, die den Beweis vieler nicht-trivialer Aussagen erlaubt – sie verdient einen Namen

1.6. DEF (Banachraum)

Ein NVR $(V, \|\ \|)$ heißt vollständig, falls jede CF einen Limes in V hat.

Ein vollständiger NVR heißt Banach-Raum ((B)-Raum).

1.6A. BSP: ((B)-Räume)

(i) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$

(ii) $(C_b(X, \mathbb{R}^m) = \{f: X \to \mathbb{R}^m \text{ stetig, beschr}\}, \|\ \|_\infty)$

siehe auch 1.28 unten

1.7 SATZ (Vollständigkeit NVR – v. Neumann/Weyl)

Sei $(V, \|\ \|)$ ein NVR. TFAE (the following are equivalent)

(i) $(V, \|\ \|)$ ist vollständig

(ii) Jede abs. konv Reihe ist konvergent

Das macht nicht vollst. Räume „unsympathisch“

Beweis: $\boxed{(i) \Rightarrow (ii):}$ Sei $\sum a_k$ abs. konv, $n > m$.

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \Big\| = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big\| \overset{(NS)}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\| = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|}_{< \varepsilon \text{ für } m,n \text{ groß}} \quad (*)$$

$\sum a_k$ abs konv $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|$ CF $\Rightarrow$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ CF } \overset{(i)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ konvergiert.}$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i):}$ Sei $(x_n)_n$ CF. Für $\varepsilon_k = 2^{-k}$ wähle N_k so dass

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-k} \quad \forall m,n \geq N_k$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k : \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k} \ \forall k \in \mathbb{N}$

Setze $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty$ ($\sum \frac{1}{2^k}$ ist konv. Major.)

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \sum y_k$ konv, d.h. $\exists\, y \in V$:

$$0 = \lim_{K \to \infty} \Big\| y - \sum_{k=1}^{K} y_k \Big\| = \lim \| y - (x_{n_{K+1}} - x_{n_1}) \|$$

Teleskopsumme

$\Rightarrow (x_{n_k})_k$ konv. $\Rightarrow (x_n)_n$ konv.

$\square$

[Der letzte Schritt genauer (UE): | FA 14

$(x_n)_n$ CF, $\exists (x_{n_k})_k$ mit $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$ $\Rightarrow x_n \to x$,

denn $\|x_n - x\| \le \underbrace{\|x_n - x_{n_k}\|}_{\substack{<\varepsilon/2 \ n,k \text{ groß} \\ \text{weil } (x_n)_n \text{ CF}}} + \underbrace{\|x_{n_k} - x\|}_{\substack{<\varepsilon/2 \ k \text{ groß} \\ \text{weil } x_{n_k} \to x}} < \varepsilon$ f. n groß

]

---

§1.2 VR MIT SKALARPRODUKT

1.8 DEF (Prähilbertraum) Sei V ein VR über $\mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$].

(i) Ein Skalarprodukt (SP) auf V ist eine Abb

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \ [\mathbb{C}]$$

mit den Eigenschaften ($v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ [$\mathbb{C}$])

(S1) $\langle v_1 + v_2 | w \rangle = \langle v_1 | w \rangle + \langle v_2 | w \rangle$ (linear im 1. Argument)
$\langle \lambda v | w \rangle = \lambda \langle v | w \rangle$

(S2) $\langle v | w_1 + w_2 \rangle = \langle v | w_1 \rangle + \langle v | w_2 \rangle$ (linear [konjugiert linear] im 2. Arg.)
$\langle v | \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v | w \rangle$

(S3) $\langle v | w \rangle = \overline{\langle w | v \rangle}$ (symmetrisch [selbstadjungiert/Hermitesch])

(S4) $\langle v | v \rangle \ge 0$ (positiv definit)
$\langle v | v \rangle = 0 \iff v = 0$

FA 15

1.8.A Bem (zur Def. des SP)

(i) Offensichtlich folgt (S2) aus (S1) und (S3). Obige Formulierung dient aber zur Deutlichmachung von (S2)

(ii) Viele Quellen – vor allem in der Physik – definieren (S1) resp. (S2) mit resp. ohne Komplexkonjugation; genauer wird definiert

(S1') $\langle \lambda v | w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$

(S2') $\langle v | \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$.

Das ändert natürlich nichts im Aufbau der Theorie.

FA 16A

(iv) $\mathcal{C}[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \}$

mit $\langle f | g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$

[(S1) - (S3) sind leicht nachzurechnen. Für (S4) $\langle f | f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ siche [siehe Analysis]]

[Beweis in den UE]

Einfügen in 1. S.

(ii) Wir nennen das Paar $(V, \langle \mid \rangle)$ einen Euklidischen [unitären] VR (EVR [UVR]) bzw. in beiden Fällen Prähilbertraum (PHR)

FA16

1.9. BSP (Skalarprodukte)

(i) $\mathbb{R}^n$, $\langle x \mid y \rangle_{st} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(ii) $\mathbb{C}^n$, $\langle x \mid y \rangle_{st} := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

} (Standardskalarprod., (SSP))

(iii) Die allgemeinste Form eines Skalarprodukts auf $\mathbb{K}^n$ ist (vgl. Lin. Algebra)

$$(\ast) \quad \langle x \mid y \rangle := \langle x \mid Ay \rangle_{st} = \overline{y}^t A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y_j}$$

mit A symmetrische [hermitesche] ($\Leftarrow$ (S3)) und positiv definite ($\Leftarrow$ (S4)) $(n \times n)$-Matrix ((S1), (S2) ergeben sich automatisch aus der Gestalt von $\langle \mid \rangle$, i.e. aus $(\ast)$.)

siehe p16A

1.10 PROP (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

In einem Prähilbertraum $(V, \langle \mid \rangle)$ gilt $\forall v, w \in V$

$$|\langle v \mid w \rangle|^2 \leq \langle v \mid v \rangle \langle w \mid w \rangle. \qquad (CS)$$

Gleichheit gilt genau dann wenn v, w lin. abhängig sind.

FA17

Beweis: $\boxed{1.\text{ FALL:}}$ $w=0 \Rightarrow 0\le 0$; Gleichheit und v,w sind lin. abh.

$\boxed{2.\text{ FALL:}}$ $w\neq 0$, $\lambda := \frac{\langle v|w\rangle}{\langle w|w\rangle} \Longrightarrow$

$$0 \le \langle v-\lambda w | v-\lambda w\rangle$$

$$= \langle v|v\rangle - \lambda\langle w|v\rangle - \bar\lambda\langle v|w\rangle + |\lambda|^2\langle w|w\rangle$$

$$= \langle v|v\rangle - \frac{|\langle v|w\rangle|^2}{\langle w|w\rangle} - \frac{|\langle v|w\rangle|^2}{\langle w|w\rangle} + \frac{|\langle v|w\rangle|^2}{\langle w|w\rangle^2}\langle w|w\rangle$$

$$= \langle v|v\rangle - \frac{|\langle v|w\rangle|^2}{\langle w|w\rangle}$$

$$\Longrightarrow |\langle v|w\rangle|^2 \le \langle v|v\rangle\langle w|w\rangle$$

Gleichheit $\overset{(S4)}{\Longrightarrow} v-\lambda w = 0 \Rightarrow v=\lambda w$ also l. a.

Umgekehrt $v=\mu w \Rightarrow |\langle v|w\rangle| = |\langle \mu w|w\rangle| = |\mu|\,|\langle w|w\rangle|$

und $\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle = |\mu|^2\langle w|w\rangle^2 \Rightarrow$ Gleichheit. $\square$

1.11 MOTIVATION ($\langle\,|\,\rangle$ vs $\|\ \|$)

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen Skalarprodukten und Normen. In $\mathbb{K}^n$ gilt ja (vgl. 1.2A(i)) das SSP $\langle\,|\,\rangle_{st}$ definiert via $\|x\|_2^2 := \langle x|x\rangle_{st}$ eine Norm. Diese Aussage bleibt auch i.A. richtig. Umgekehrt muß eine Norm aber nicht von einem SP abstammen; genauer sehen wir in 1.12 – 1.16.

FA 18

1.12 PROP + DEF ($\langle\,|\,\rangle \Rightarrow \|\ \|_2$)

Auf jedem Prähilbertraum $(V, \langle\,|\,\rangle)$ definiert

$$\|v\|_2 := \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

eine Norm. Somit wird $(V, \|\ \|_2)$ zum NVR.

Wir nennen $\|\ \|_2$ die Euklidische oder 2-Norm. Wegen 1.10 gilt: $|\langle v|w\rangle| \leq \|v\|_2 \|w\|_2$ (CS)

Beweis: $\boxed{(N1):}$ folgt sofort aus (S4)

$\boxed{(N2):}$ $\|\lambda v\|_2^2 = \langle \lambda v|\lambda v\rangle \overset{(S1)(S2)}{=} \lambda\bar\lambda \langle v|v\rangle = |\lambda|^2 \|v\|_2^2$

$\boxed{(N3):}$ $\|v+w\|_2^2 = \langle v+w|v+w\rangle \overset{(S1)(S2)}{=} \langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle$

$$\overset{(S3)}{=} \langle v|v\rangle + 2\operatorname{Re}\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle$$

$(z+\bar z = a+bi+a-bi = 2a)$

$$\leq \langle v|v\rangle + 2|\langle v|w\rangle| + \langle w|w\rangle$$

$$\overset{(CS)}{\leq} \|v\|_2^2 + 2\|v\|_2\|w\|_2 + \|w\|_2^2 = (\|v\|_2 + \|w\|_2)^2.$$

□

2. VO 6.3.23

3. VO; 9.3.23

1.13 PROP (Polarisierungsidentitäten/formeln)

In einem Prähilbertraum kann das SP durch die 2-Norm ausgedrückt werden. Genauer gilt für

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad \langle v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|_2^2 - \|v-w\|_2^2\right)$ (PO)

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad \langle v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|_2^2 + i\|v+iw\|_2^2 - \|v-w\|_2^2 - i\|v-iw\|_2^2\right)$. (PO')

Beweis: einfaches Ausrechnen der rechten Seiten. [UE]

□

1.14 SATZ (Parallelogrammgleichung; $\| \, \|$ $\leftrightarrow$ $\langle \, | \, \rangle$)

Ein NVR $(V, \| \, \|)$ ist genau dann ein Prähilbertraum, falls die Parallelogrammgleichung

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \qquad (\square)$$

gilt.

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ In einem Prähilbertraum gilt $(\square)$; Ausrechnen der linken Seite (siehe UE).

$\boxed{\Leftarrow}$ Wir beweisen nur den Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$; der Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ folgt analog. (siehe z.B [Weidmann, Satz 1.18]). Wir setzen wie in (PO)

$$\langle v | w \rangle := \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) \qquad (*)$$

und zeigen (S1)–(S4) unter Verwendung von $(\square)$.

(S1):

$$\|v_1+v_2+w\|^2 \overset{(\square)}{=} 2\|v_1+w\|^2 + 2\|v_2\|^2 - \|v_1+w-v_2\|^2 =: \alpha$$

$$\|v_1+v_2+w\|^2 = 2\|v_2+w\|^2 + 2\|v_1\|^2 - \|v_2+w-v_1\|^2 =: \beta$$

$$\Longrightarrow \|v_1+v_2+w\|^2 = \frac{\alpha+\beta}{2} = \|v_1+w\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_2+w\|^2 + \|v_1\|^2$$
$$- \frac{1}{2}(\|v_1+w-v_2\|^2 + \|v_2+w-v_1\|^2) \qquad (\Delta)$$

Analog

$$\|v_1+v_2-w\|^2 = \|v_1-w\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_2-w\|^2 + \|v_1\|^2$$
$$- \frac{1}{2}(\|v_1-w-v_2\|^2 + \|v_2-w-v_1\|^2) \qquad (\Delta')$$

$$\Longrightarrow \underline{\langle v_1+v_2 | w \rangle} \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}(\|v_1+v_2+w\|^2 - \|v_1+v_2-w\|^2)$$

$$\overset{(\Delta),(\Delta')}{=} \frac{1}{4}\left(\|v_1+w\|^2+\|v_2+w\|^2-\|v_1-w\|^2-\|v_2-w\|^2\right)$$ FA 20

$$\overset{(*)}{=} \langle v_1|w\rangle + \langle v_2|w\rangle$$

Insbesondere gilt auch $\langle \lambda v|w\rangle = \lambda\langle v|w\rangle$ für $\lambda \in \mathbb{N}$.
Wegen (*) auch für $\lambda=0$ und $\lambda=-1$ ($4\langle -v|w\rangle \overset{(*)}{=}$
$=\|-v+w\|^2-\|-v-w\|^2 \overset{(N2)}{=} -\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\right) \overset{(*)}{=} -4\langle v|w\rangle$) also
auf $\mathbb{Z}$. Daher auch für $\lambda=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, denn $(m,n\in\mathbb{Z})$

$$n\langle \lambda v|w\rangle = n\left\langle m\tfrac{v}{n}\middle|w\right\rangle = m\langle v|w\rangle = n\lambda\langle v|w\rangle.$$

Die Funktionen $\lambda \mapsto \langle \lambda v|w\rangle$ und $\lambda\mapsto\lambda\langle v|w\rangle$ $(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ sind stetig wegen 1.4(viii) und (*). Da sie auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen, stimmen sie auch auf $\mathbb{R}$ überein.
($f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig $f|_\mathbb{Q}=g|_\mathbb{Q} \Rightarrow f=g$, denn sei $x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists (q_n)_n\in\mathbb{Q}$, $q_n\to x$ und $f(x)=f(\lim q_n)=\lim f(q_n)=$
$=\lim g(q_n)=g(\lim q_n)=g(x)$.
)

(S2): folgt analog

(S3), (S4) folgen direkt aus (*). $\square$

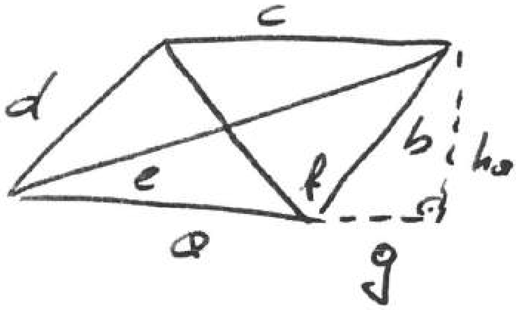
1.15 Bsp (Normen, die nicht von einem SP kommen)

Im $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$ analog) erfüllen $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_\infty$ <u>nicht</u> die $\square$-Gleichg; daher stammen sie nicht von einem SP ab. Genauer für $v=\binom{1}{0}$, $w=\binom{0}{1}$:

$\|v+w\|_1^2+\|v-w\|_1^2=2^2+2^2=\underline{\underline{8}}$; $2(\|v\|_1^2+\|w\|_1^2)=2\cdot 2=\underline{\underline{4}}$

$\|v+w\|_\infty^2+\|v-w\|_\infty^2=1^2+1^2=\underline{\underline{2}}$; $2(\|v\|_\infty^2+\|w\|_\infty^2)=2(1+1)=\underline{\underline{4}}$

[Der Name rührt im Übrigen vom Spezialfall der 2-Norm im $\mathbb{R}^2$ her; dort gilt das Parallelogrammgesetz:



$$e^2=h_a^2+(a+g)^2$$
$$f^2=h_a^2+(a-g)^2$$
$$b^2=h_a^2+g^2$$

[UE]

$$\Rightarrow e^2+f^2=2h_a^2+2a^2+2g^2=2(a^2+b^2)$$

]

<u>1.16 Bem</u> (PHR als NVR)

Nach 1.12 können wir jeden PHR mit $\|\ \|_2$ als NVR auffassen. Das werden wir in Zukunft auch <u>stillschweigend</u> tun. Insbesondere gilt in PHR 1.3(ii) und 1.4(i)–(viii). Zusätzlich zu 1.4(vii) ist das SP <u>gemeinsam</u> <u>stetig</u> (d.h. gleichzeitig in beiden Slots) i.e.,

$$\boxed{x=\lim x_n,\ y=\lim y_n \Rightarrow \langle x|y\rangle=\lim\langle x_n|y_n\rangle},$$

denn $|\langle x|y\rangle-\langle x_n|y_n\rangle| \overset{(\Delta)}{\le} |\langle x|y-y_n\rangle|+|\langle x_n-x|y-y_n\rangle|+|\langle x-x_n|y\rangle|$

$$\overset{(CS)}{\le} \|x\|_2\underbrace{\|y-y_n\|_2}_{\to 0}+\underbrace{\|x_n-x\|_2}_{\to 0}\underbrace{\|y-y_n\|_2}_{\to 0}+\underbrace{\|x-x_n\|_2}_{\to 0}\|y\|_2$$

$$\to 0.$$

1.17 BEM (Sesquilinearformen, vgl. Lin. Algebra). V ein $\mathbb{K}$ VR. FA22

Eine Abb
$$s: V \times V \to \mathbb{K}$$
heißt <u>Sesquilinearform</u> (SLF), falls (S1) und (S2) gelten.
Analog zum Fall $\| \|_2$ aus SP definieren wir die zu s gehörige <u>Quadratische Form</u> (QF) via
$$q(v) = s(v,v) .$$

Für QF gilt die <u>▱-Gleichung</u>. Ebenso kann – aber <u>nur</u> im <u>komplexen Fall</u> – s aus q zurückgewonnen werden: Es gilt für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ die <u>Polarisierungsidentität</u> (vgl. (PO'))
$$s(v,w) = \frac{1}{4}\left(q(v+w) + i q(v+iw) - q(v-w) - i q(v-iw)\right)$$
Im Fall z.B. $\mathbb{R}^2$ gilt für $s(v,w) = v_1 w_2 - w_1 v_2$ für die Q- $q(v) = s(v,v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^2$ aber $s \neq 0$.
Eine SLF heißt <u>symmetrisch</u> ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) bzw. <u>hermitesch</u> ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) falls $s(v,w) = \overline{s(w,v)}$. Symm SLF (BLF) können aus q mittels (PO) zurückgewonnen werden.
Eine SLF heißt <u>strikt positiv</u>, falls $s(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$
Eine strikt pos. symm. resp. hermitesche SLF ist ein <u>SP</u>, denn $s(0,0) = s(\overset{\mathbb{K}, V_2}{0 \cdot 0}, 0) = 0 \cdot s(0,0)$. Es gilt also die CS-Ungl. $|s(v,w)| \leq (q(v)\, q(w))^{1/2}$.

Achtung verwendet Konvention wie in 1.8A(iii)

Für weitere Details siehe [Weidmann 1.2].

Vollständigkeit spielt natürlich auch im Rahmen von PHR eine wichtige Rolle. Wir definieren

1.18 DEF (Hilbertraum)

Ein PHR heißt Hilbertraum ((H)-Raum), falls er bzgl. $\|\,\|_2$ vollständig ist. (Also jede CF bzgl $\|\,\|_2$ auch konvergent im Raum ist.)

1.19 Notiz (Sprachübungen-Zusammenfassung)

(i) Jeder (H)-Raum ist auch (B)-Raum aber nicht umgekehrt.

(ii) Ein (H)-Raum ist ein vollständiger PHR.

(iii) Ein (B)-Raum ist genau dann ein (H)-Raum, wenn die ▱-Gleichung gilt.

(iv) In jedem (H)-Raum konvergieren abs. konv. Reihen.

1.20 Bem (Zur Ordnung der Begriffe)

Wir setzen die hier definierten Begriffe in den Rahmen der Räume aus der Topologie(-Vorlesung).

(i)

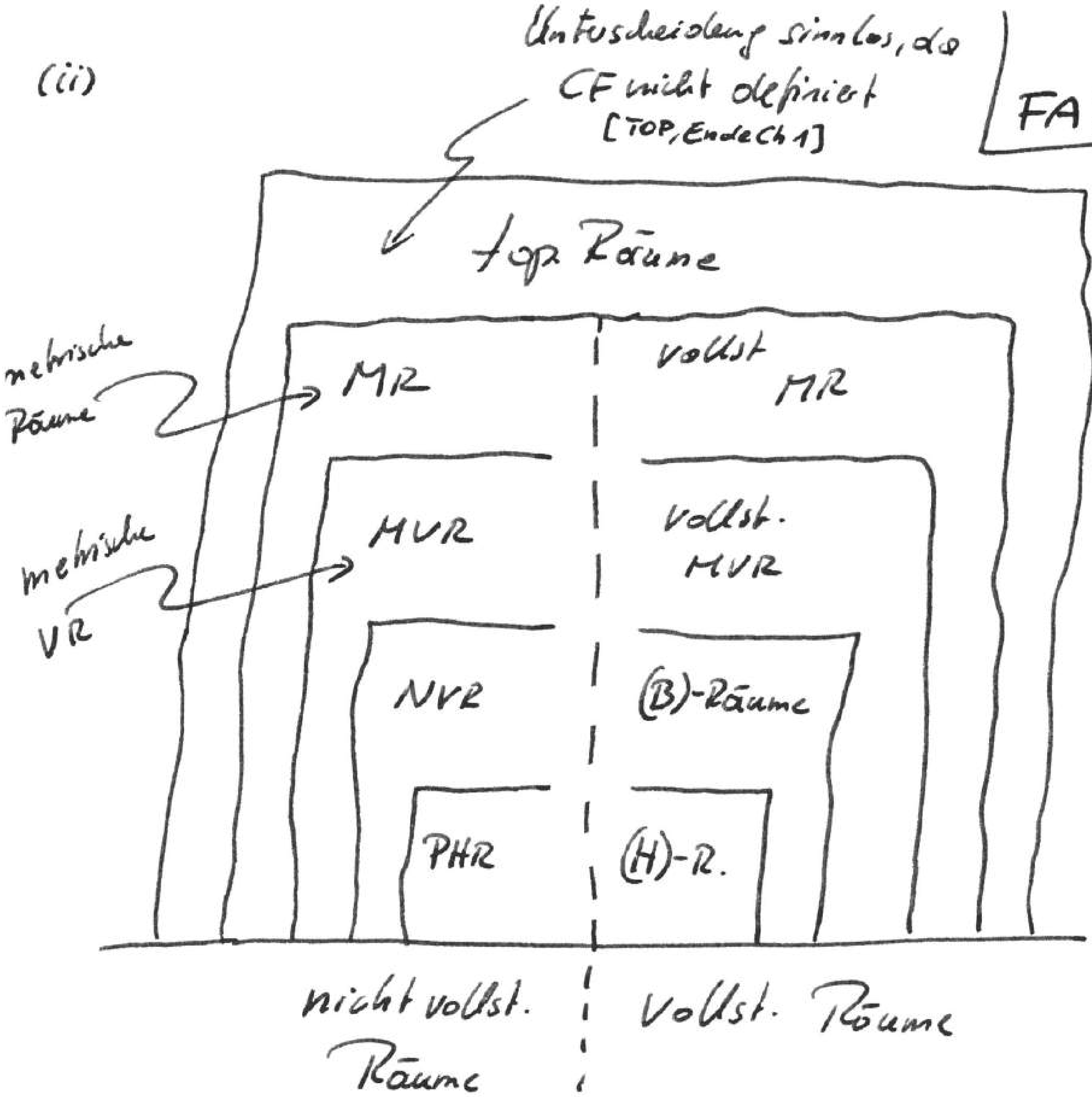
$\|\,\|^2 = \langle\,\rangle$ $\qquad$ $d(x,y) = \|x-y\|$ $\qquad$ $\mathcal{O} = \{d\text{-offene Mengen}\}$

$$\text{PHR} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{NVR} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{M(V)R} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \text{top. Raum}$$

nur wenn ▱-Gl $\qquad$ nein; z.B. diskr. Metrik $\qquad$ z.B. Top. d. pktw. Konv

(ii)

FA 24



Unterscheidung sinnlos, da CF nicht definiert [TOP, Ende Ch 1]
top Räume
metrische Räume
MR
vollst MR
metrische VR
MVR
vollst. MVR
NVR
(B)-Räume
PHR
(H)-R.
nicht vollst. Räume
Vollst. Räume

§ 1.3 Beispiele

FA 25

07.07.17

1.20A Motivation (Folgenräume)

Die naheliegendste Idee $\mathbb{K}^n$ auf den unendlich-dimensionalen Fall zu verallgemeinern wäre wohl

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{K}, i \in \mathbb{N} \},$$

der Raum aller Folgen bzw. der Raum der endlichen Folgen

$$c_{00} := \{ x = (x_1, \dots x_k, 0, \dots 0 \dots) \; x_i \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N} \}.$$

Es stellt sich aber heraus, dass der erste Raum zu groß, der zweite zu klein ist; genauer gilt:

(i) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ kann auf keine Weise zu einem NVR gemacht werden, sodass aus der Konvergenz bzgl. $\| \|$ die Konvergenz in jeder Koordinate folgt.
("Es gibt keine vernünftige Norm auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.")

(ii) c_{00} kann auf keine Art zu einem (B)-Raum gemacht werden. D.h. es gibt keine $\| \|$ auf c_{00}, in der c_{00} vollständig wird.

(Beweise siehe UE)

Wir müssen also Räume zwischen c_{00} und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ansehen.

1.21 DEF (Folgenräume) Wir definieren

(i) den Raum der konvergenten Folgen

$$c := \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \lim x_n \;\exists\}$$

(ii) den Raum der Nullfolgen

$$c_0 := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \lim x_n = 0\}$$

(iii) den Raum der beschränkten Folgen

$$\ell^{\infty} := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \exists C : |x_i| \le C \;\forall i\}$$

mit $\|x\|_{\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

(iv) den Raum ℓ^1 (sprich: klein ℓ^1)

$$\ell^1 := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\} \text{ mit } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

(v) den Raum ℓ^2 (sprich: klein ℓ^2)

$$\ell^2 := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\} \text{ mit } \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

(vi) allgemein für $1 \le p < \infty$ den Raum ℓ^p (sprich: klein ℓ^p)

$$\ell^p := \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\} \text{ mit } \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$$

[Für die analogen Normen auf $\mathbb{R}^n$ siehe Analysis resp. UE]

1.22 SATZ (Folgenräume)

(i) Alle Räume aus Def 1.21 sind mit den jeweiligen Normen (B)-Räume.

(ii) ℓ^2 ist der einzige (H)-Raum.

(iii) Es gelten die (echten) Inklusionen

$$\ell^1 \subsetneq \ell^p \subsetneq \ell^2 \subsetneq \ell^q \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty \qquad \begin{pmatrix} 1<p<2, \\ 2<q<\infty \end{pmatrix}$$

Beweis: $\boxed{\text{zu } \ell^2:}$ Für $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2}$ brauchen wir

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty, \qquad (*)$$

für $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \bar{y}_i$ brauchen wir

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i y_i| < \infty. \qquad (**)$$

Klarerweise gilt $(**) \Rightarrow (*)$ (setze $y=x$); wir brauchen aber $(*) \Rightarrow (**)$ (siehe Def 1.21 (v)). Dies gilt aber und wir haben den 3-fachen Glücksfall:

(a) $(*) \Rightarrow (**)$

(b) $x = (x_i)_i$ mit $(*)$ bilden einen VR

(c) Dieser ist vollst. NVR mit $\| \, \|_2$.

ad (b) Es ist lediglich zz, dass ℓ^2 TVR   **FA 28**

von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist, also: $x, y \in \ell^2, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow x+y, \lambda x \in \ell^2$.

Sei also $\sum |x_i|^2 < \infty$, $\sum |y_i|^2 < \infty$, dann gilt

$$\underline{\sum |x_i+y_i|^2} \leq \sum (|x_i|+|y_i|)^2 \leq \underbrace{\sum |x_i|^2}_{<\infty} + 2\sum \underbrace{|x_i||y_i|}_{\leq \frac{1}{2}(\underbrace{|x_i|^2}_{<\infty} + \underbrace{|y_i|^2}_{<\infty})} + \underbrace{\sum |y_i|^2}_{<\infty} < \infty$$

und

$$\underline{\sum |\lambda x_i|^2} = |\lambda|^2 \sum |x_i|^2 \underline{< \infty}.$$

ad (a) $\alpha := \sum |x_i|^2 < \infty$, $\beta = \sum |y_i|^2 < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |x_i \overline{y_i}| = \sum_{i=1}^{N} |x_i||y_i| \underset{CS \text{ in } \mathbb{R}^N}{\leq} \sqrt{\sum^N |x_i|^2} \sqrt{\sum^N |y_i|^2} \leq \sqrt{\alpha\beta} \quad \forall N$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i \overline{y_i}| \leq \sqrt{\alpha\beta} < \infty$$

ad (c) (S1)–(S3) ist klar, (S4) ist leicht $\left(\sum |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i\right)$.

Also ist ℓ^2 PHR. Es bleibt zz:

<u>ℓ^2 ist vollst.</u>: Sei $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ CF in ℓ^2; (ACHTUNG <u>Notation</u> für „Doppelfolgen" $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$)

Wir betrachten die fixe Koordinate Nr. k:

FA 29

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| \le \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_2 \Rightarrow (x_k^{(n)})_n \text{ CF in } \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \exists\, x_k := \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} \in \mathbb{K}$$

Wir definieren (den prospektiven Limes der $x^{(n)}$ als)

$$x := (x_1, x_2, \ldots) = (x_k)_{k=1}^{\infty}$$

und zeigen $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ in ℓ^2, d.h. $\|x^{(n)} - x\|_2 \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0 \overset{CF}{\Longrightarrow} \exists N(\varepsilon)\ \forall m,n \ge N: \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_2 < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \forall m,n \ge N\ \forall M: \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^2} < \varepsilon$$

$$\overset{m\to\infty}{\Longrightarrow} \quad \forall n \ge N\ \forall M: \sqrt{\sum_{k=1}^{M} |x_k - x_k^{(n)}|^2} \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \ge N: \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^2} \le \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon=1,\, N(1)}{\Longrightarrow} \quad x - x^{(N(1))} \in \ell^2 \underset{(b)}{\Rightarrow} x \in \ell^2$$

$$\Rightarrow \quad \forall n \ge N \quad \|x - x^{(n)}\|_2 \le \varepsilon$$

(Schematisch:

3.VO.
9.3.23

$$\begin{array}{ccccccc} x^{(1)} = (& x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \ldots, & x_k^{(1)}, & \ldots &) \\ x^{(2)} = (& x_1^{(2)}, & \ldots & \ldots & x_k^{(2)}, & \ldots &) \\ \ell^2 \downarrow & \downarrow \mathbb{K} & \downarrow \mathbb{K} & & \downarrow \mathbb{K} & & \\ x := (& x_1, & x_2, & \ldots, & x_k, & \ldots &) \end{array}$$

)

$\boxed{\text{zu } c_0, c, \ell^\infty}$ Nullfolgen konvergente, konvergente FA 30

4. VO. 27.3.23

Folgen sind beschränkt (1.4 (iv), (v)) also: $\underline{c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty}$.

Summen und Vielfache von Null-, konvergenten, beschr. Folgen sind wieder Null-, konv., beschränkte Folgen also sind $\underline{c_0, c, \ell^\infty \text{ VR}}$.

$\boxed{\ell^\infty \text{ ist (B)-Raum:}}$ [ÜE] [(N1)-(N3) sind klar (Für die Δ-Ungl:

$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \Rightarrow \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$).

Sei $(x^{(n)})_n$ CF in ℓ^∞. Betrachte fixe Koordinate Nr. k:

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty \Rightarrow (x_k^{(n)})_n \text{ CF in } \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \exists\, x_k := \lim_n x_k^{(n)} \in \mathbb{K}$$

Definiere $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ und zeige $x^{(n)} \to x$ in ℓ^∞.

$\underline{\text{Sei } \varepsilon > 0} \overset{CF}{\Longrightarrow} \underline{\exists N(\varepsilon)}\ \forall m,n \geq N: \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall m,n \geq N\ \forall i: |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon$$

$$\overset{m\to\infty}{\Longrightarrow} \forall n \geq N\ \forall i: |x_i - x_i^{(n)}| \leq \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon=1,\, N(1)}{\Longrightarrow} x - x^{N(1)} \in \ell^\infty \underset{VR}{\Rightarrow} \underline{x \in \ell^\infty}$$

$$\Leftarrow \forall n \geq N\ \ \underline{\|x - x^{(n)}\|_\infty \leq \varepsilon}\ ]$$

Für die weitere Behandlung von c_0, c benötigen wir:

1.23 Prop (Teilräume von (B)- und (H)-Räumen)

(i) Jeder TR eines NVR [eines VR mit SP] ist wieder NVR [VR mit SP].

(ii) Ein TR W eines (B)-Raumes [(H)-Raumes] V ist genau dann (B)-Raum [(H)-Raum] wenn W abg. ist

$\left[(x_n)_n \in W,\ x_n \xrightarrow{\text{in } V} x \Rightarrow x \in W \right]$

Beweis (i) Schränke $\|\ \|$ $[\langle\ \rangle]$ auf TR ein $\Rightarrow$ (N1)-(N3) [(S1)-(S4)] gelten.

(ii) zz W vollst $\Leftrightarrow$ W abg

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei $(x_n)_n \in W$, $\|x_n - x\| \xrightarrow{V} 0 \overset{1.4(iv)}{\Longrightarrow} (x_n)_n$ CF in V

also CF in $W \overset{\text{vollst}}{\Longrightarrow} \exists y \in W : \|y - x_n\| \to 0$.

Außerdem gilt $x = y \in W$, denn

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \to 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $(x_n)_n$ CF in $W \Rightarrow$ CF in $V \overset{\text{vollst}}{\Longrightarrow} \exists x = \lim x_n \in V$

$\overset{\text{abg}}{\Longrightarrow} x \in W \Rightarrow W$ vollst.

$\square$

Fortsetzung Beweis 1.22: $\boxed{c \text{ ist vollst}}$

FA 32

070719

1.23 $\Rightarrow$ es genügt zz: $c \subseteq \ell^\infty$ abg.

Sei also $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots) \in c$ mit

$$x = (x_1, x_2, \dots) = \lim_n x^{(n)} \text{ in } \ell^\infty \quad (*)$$

zz: $\boxed{x \in c, \text{ d.h. } \exists \alpha = \lim_i x_i}$

Bemerke zunächst allgemein: $\boxed{z = (z_1, z_2, \dots) \in c \Rightarrow |\lim z_i| \le \|z\|_\infty}$ $(**)$.

(Denn $|\lim z_i| \overset{|\,|\text{ stetig}}{=} \lim |z_i| \le \sup |z_i| = \|z\|_\infty$.)

Da $x^{(n)} \in c \Rightarrow \exists \alpha_n := \lim_i x_i^{(n)}$ $\quad (***)$

$\overset{(**)}{\Rightarrow} |\alpha_n - \alpha_m| \le \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty$

$\overset{1.4(iv)}{\Rightarrow} (\alpha_n)_n$ ist CF in $\mathbb{K}$

$\Rightarrow \exists \alpha := \lim_n \alpha_n$ $\quad (****)$

Beh: $\alpha = \lim x_i$

Denn sei $\varepsilon > 0$; wähle N: $\forall n \ge N$: $\|x^{(n)} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{ok wegen}\\ (*)\end{smallmatrix}\right)$

und $|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{ok wegen}\\ (****)\end{smallmatrix}\right)$

wähle K: $\forall k \ge K$: $|x_k^{(N)} - \alpha_N| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\begin{smallmatrix}\text{ok wegen}\\ (***)\end{smallmatrix}\right)$

$$\Rightarrow \forall k \ge K: |x_k - \alpha| \le \underbrace{|x_k - x_k^{(N)}|}_{\le \|x - x^{(N)}\|_\infty} + |x_k^{(N)} - \alpha_N| + |\alpha_N - \alpha|$$

$$\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

FA 32A

$\boxed{c_0 \text{ vollst.:}}$ analog zum Fall c. [UE]

[UE]

[Wir gehen den Beweis von c durch; dann gilt für $x = \lim x^{(n)}$ in ℓ^∞ mit $x^{(n)} \in c_0$:

$\alpha_n = 0 \ \forall \alpha_n \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow x \in c_0$]

$\boxed{c_0, c, \ell^\infty \text{ sind keine (H)-Räume}}$

Analog zum Fall des $\mathbb{R}^n$ (vgl. 1.15):

$v = (1,0,0,\dots)$, $w = (0,1,0,0,\dots)$ beide $\in c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$

und verletzen die $\square$-Glg. für $\| \|_\infty$.

$\boxed{\text{zu } \ell^1}$

FA 33

$\boxed{\ell^1 \text{ ist NVR:}}$

Δ-Ungl. Beweisschritt (A)

$$x, y \in \ell^1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i| \overset{(A)}{\leq} \sum_{i=1}^{N} |x_i| + \sum_{i=1}^{N} |y_i| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$\Rightarrow x + y \in \ell^1 \text{ und (N3)}$$

$$x \in \ell^1, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_n| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

$$\Rightarrow \lambda x \in \ell^1 \text{ und (N2)}$$

(N1) ist klar.

$\boxed{\ell^1 \text{ ist vollst.:}}$ Sei $(x^{(n)})_n$ CF in ℓ^1. Betrachte fixe Koord. Nr. k:

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leq \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_1 \Rightarrow (x_k^{(n)})_n \text{ CF in } \mathbb{K}$$

$$\Rightarrow \exists\, x_k := \lim_n x_k^{(n)} \in \mathbb{K}$$

[VL]

Definiere $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ und zeige $x^{(n)} \to x$ in ℓ^1.

Sei $\underline{\varepsilon > 0} \overset{CF}{\Longrightarrow} \underline{\exists N(\varepsilon)}\ \forall m, n \geq N : \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_1 < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \forall m, n \geq N\ \forall p : \sum_{i=1}^{p} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon$$

$$\overset{m \to \infty}{\Longrightarrow} \quad \forall n \geq N\ \forall p : \sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^{(n)}| \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \forall n \geq N : \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}| \leq \varepsilon)$$

$$\overset{\varepsilon = 1, N(1)}{\Longrightarrow} \quad x - x^{N(1)} \in \ell^1 \Rightarrow \underline{x \in \ell^1}$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{\forall n \geq N : \|x - x^{(n)}\|_1 \leq \varepsilon}$$

ℓ^1 kein (H)-Raum: Analog zum $\mathbb{R}^n$-Fall (vgl. 1.15): $v=(1,0,\dots)$, $w=(0,1,0,\dots)$ verletzen die $\square$-Ungl.

Zu ℓ^p:

ℓ^p ist (B)-Raum! Völlig analog zum ℓ^1-Fall; NUR in Beweisschritt Ⓐ (siehe p.33, oben) ist die Δ-Ungl für $|\ |$ durch die Minkowski-Ungleichung zu ersetzen:

[LVE]

1.24 Bem (Minkowski- und Hölder-Ungleichung: Alte Bekannte im neuen Gewand)

(i) Die Minkowski-Ungleichung (MU) für $\mathbb{K}^n$ lautet [Analysis]:

Für $1\le p<\infty$, $n\in\mathbb{N}$ und $x,y\in\mathbb{K}^n$ gilt:

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |y_i|^p} \quad \text{bzw } \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

Verwenden wir dies in Ⓐ so erhalten wir (N3) für $(\ell^p, \|\ \|_p)$, also eine Version der MU für ℓ^p. Für ℓ^1, ℓ^∞ folgt (N3) sofort aus (N3) für $|\ |_{\mathbb{K}}$; daher erhalten wir die Minkowski-Ungleichung für ℓ^p ($1\le p\le\infty$): $\forall x,y\in\ell^p$, $p\in[1,\infty]$: ← übliche Schreibweise

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

FA 35

(ii) Im $\mathbb{K}^n$-Fall wird die HU mittels der <u>Hölder-Ungleichung</u> bewiesen (siehe Analysis). Letztere lautet (Analysis): $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (i.e. $q = \frac{p}{p-1}$ der sog. <u>konjugierte Index</u>), $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q} = \|x\|_p \|y\|_q$$

Die Hölder-Ungleichung (HU) wird ihrerseits aus der gewichteten Ungleichung vom geometrischen u. arithmetischen Mittel gewonnen. Der Beweis aus der Analysis gilt wortwörtlich auch für ℓ^p $(1 < p < \infty)$ (siehe auch [W, p 10]). Schreiben wir für $x = (x_i)_i \in \ell^p$, $y = (y_i)_i \in \ell^q$: $xy = (x_i y_i)_i$ so erhalten wir also $(1 < p < \infty)$

$$\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q .$$

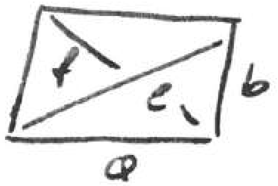
Außerdem gilt für $x \in \ell^1$, $y \in \ell^\infty$: $\|xy\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i|| = \|y\|_\infty \|x\|_1$. Definieren wir den zu 1 konjugierten Index als ∞ und umgekehrt (i.e. schreiben wir für $\frac{1}{\infty} = 0$) so erhalten wir die <u>HU für Folgen</u>: Es gilt für

$x \in \ell^p$, $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $y \in \ell^q$

$$\boxed{\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q .}$$

Fortsetzung Beweis 1.22: | FA 36

$\boxed{\ell^p \text{ kein (H)-Raum:}}$ Wäre ℓ^p ein (H)-Raum, dann würde für das Einheitsquadrat gelten: $2(\|a\|_p^2+\|b\|_p^2) = \|e\|_p^2+\|f\|_p^2$



$$2(1^2+1^2) = \left(\sqrt[p]{1^p+1^p}\right)^2 + \left(\sqrt[p]{1^p+1^p}\right)^2$$
$$4 = 2\sqrt[p]{4}$$
$$2 = \sqrt[p]{4}$$
$$2 = p.$$

Vergleich der Räume Haben schon gezeigt (p.30), $c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$.

Sei nun $1 \le p < q < \infty$ und $x \in \ell^p$:

Fall 1: $\|x\|_p \le 1 \Rightarrow$ alle $|x_i| \le 1 \Rightarrow$ alle $|x_i|^q \le |x_i|^p$
$\Rightarrow x \in \ell^q$ und $\|x\|_q \le \|x\|_p$.

Fall 2: $x \neq 0 \Rightarrow y := x/\|x\|_p$ hat $\|y\|_p = 1 \overset{\text{Fall 1}}{\Rightarrow} y \in \ell^q, \|y\|_q \le 1$
$\Rightarrow x \in \ell^q$ und $\|x\|_q \le \|x\|_p$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\ell^p \subseteq \ell^q \text{ und es gilt } \|x\|_q \le \|x\|_p \ \forall x \in \ell^p}$

Sei schließlich $q < \infty$, $x \in \ell^q \Rightarrow \|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q \ge (\sup |x_i|)^q$
$\Rightarrow \|x\|_\infty \le \|x\|_q$; außerdem $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q < \infty \Rightarrow x_i \to 0$
$\Rightarrow x \in c_0$ also insges.: $\boxed{\ell^q \subseteq c_0 \text{ und } \|x\|_\infty \le \|x\|_q}$!

□

1.24 ABEM (Weitere ℓ^p-Räume) FA 36A

(i) Die Theorie der ℓ^p-Räume funktioniert natürlich auch für endliche Folgen $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Als VR ergibt sich dabei immer (d.h. $\forall p$) der $\mathbb{K}^n$; aber mit der jeweiligen $\| \ \|_p$. Wir kommen also auf 1.2A(i) zurück. Eine oft verwendete Schreibweise ist $(\mathbb{K}^n, \| \ \|_p) = \ell^p(n)$.

(ii) Die Theorie der ℓ^p-Räume funktioniert auch auf größeren/beliebigen Indexmengen. Wegen der möglichen Überabzählbarkeit definieren wir für I eine Menge $(p<\infty)$

$$\ell^p(I) := \left\{ f: I \to \mathbb{K} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(i) \neq 0 \text{ für höchstens abz. viele } i, \text{ und} \\ \sum_{i\in I} |f(i)|^p < \infty \end{array} \right\}.$$

und

$$\ell^\infty(I) := \{ f: I \to \mathbb{K} \mid f \text{ beschränkt} \}$$

mit $\|f\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^\infty |f(i)|^p}$ $(p<\infty)$ bzw

$\|f\|_\infty := \sup_{i\in I} |f(i)|$

Es gilt dann $\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$ $(1 \le p \le \infty)$.

1.25 MOTIVATION (Funktionenräume)

Klarerweise sind in der Analysis Funktionenräume noch wichtiger als Folgenräume; insbesondere für die Theorie von PDEs ist ein Studium von (vollständigen!) Funktionenräumen essentiell.

Wir beginnen mit den (einfacheren) Räumen stetiger/diffbarer Fkt.

1.26 DEF (Räume stetiger Funktionen)

Sei $a<b\in\mathbb{R}$. Wir definieren die Räume

(i) $\mathcal{C}[a,b] := \{f:[a,b]\to\mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\} \equiv \mathcal{C}^0[a,b]$

(ii) $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}) := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid f \text{ stetig+beschr.}\} \equiv \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$

(iii) $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid f \text{ stetig}, \underset{(|x|\to\infty)}{f\to 0}\} \equiv \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$

mit $\|f\|_\infty := \sup_x |f(x)|$

(iv) $\mathcal{C}^1[a,b] := \{f:[a,b]\to\mathbb{C} \mid f, f' \text{ stetig}\}$ mit $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

(v) $\mathcal{C}^k[a,b] := \{f:[a,b]\to\mathbb{C} \mid f, f', \dots, f^{(k)} \text{ stetig}\}$

$$\text{mit } \|f\| = \sum_{i=1}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty$$

1.27 BEM (Allgemeinere Domänen)

In obiger Def ist (i) statt $[a,b]$ jeder kompakte top. Hausdorffraum sinnvoll; insbes. jede kp Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(ii) Statt $\mathbb{R}$ jeder lokalkompakte top T_2-Raum sinnvoll; insbes. jede offene TM des $\mathbb{R}^n$. (vgl. Topologie)

(iii) WARNUNG: Andere Kombinationen sind mit Vorsicht zu genießen. z.B. ist $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ mit $\|\ \|_\infty$ kein NVR: da $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ nicht existieren muß, ist $\|\ \|_\infty$ keine Norm auf $\mathcal{C}(\mathbb{R})$!

1.28 SATZ (Räume stetiger Funktionen)

(i) Alle Räume aus Def 1.26 sind mit den entsprechenden Normen (B)-Räume.

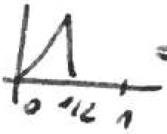
(ii) Keiner dieser Räume ist ein (H)-Raum.

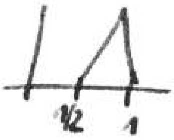
(iii) Es gelten die (echten) Inklusionen $(k>1)$

$$\mathcal{C}^k[a,b] \subseteq \mathcal{C}^1[a,b] \subseteq \mathcal{C}[a,b] \quad \text{und}$$
$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R}).$$

Beweisskizze: Die Normeigenschaften sind leicht zu sehen. (vgl. Forster Bd 2, §2, Bsp (2.5) ff)

Die Vollständigkeit von $\mathcal{C}^0[a,b]$, $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ folgt, da der glm. Limes stetiger Fkt stetig ist. $\mathcal{C}_0$ ist abg. TR von $\mathcal{C}_b$ (analog zu $c_0 \subseteq \ell^\infty$).

$\|\ \|_\infty$ kommt nicht von einem SP; 

$= f$, $g =$ 

verletzen die □-Gleichung.

Bspl der Räume $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^k$ siehe etwa [W, p.7]. □

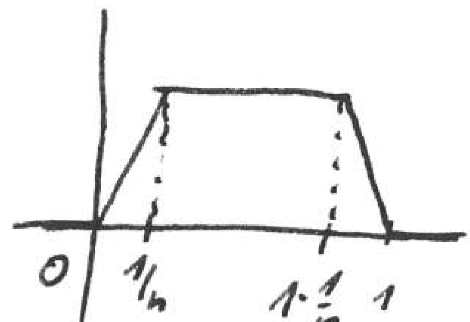
1.29 MOTIVATION (Ein (H)-Raum von Fkt?)

Bisher haben wir erst einen unendlichdim (H)-Raum kennengelernt – nämlich ℓ^2. Für Anwendungen wird aber dringendst ein (H)-Raum v. Funktionen benötigt (Quantenmechanik!)
Aus 1.8(iv) kennen wir den PHR $\mathcal{C}[a,b]$ mit $\int f\bar{g}$.
Dieser ist aber nicht vollständig!

Genauer betrachten wir $\mathcal{C}[-2,2]$ und die Folge f_n mit

[VE]

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 & 1/n \leq x \leq 1 - 1/n \\ n(1-x) & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$



Dann gilt (Beweis in UE)

(i) f_n ist CF bzgl $\| \ \|_2$

(ii) f_n kann in $\mathcal{C}[-2,2]$ keinen Grenzwert haben (dieser ist nämlich unstetig).

Um doch zu einem vollständigen Raum zu gelangen könnte man die abstrakte Vervollständigung des MR $(\mathcal{C}[a,b], \| \ \|_2)$ betrachten [vgl. Topologie]. Allerdings wäre dann nicht klar, ob alle Elemente als Funktionen aufgefasst werden könnten.

FA 40

Ebensowenig bringt die Verwendung von $R[a,b]$ (Raum der R-Intbaren Fkt). $\| \|_2$ wäre nur mehr eine HN und außerdem kann die Vollständigkeit ebensowenig erreicht werden ▷

Die (eindeutige) Lösung für unser Problem ist die Verwendung des Lebesgue-Integrals. Dies liefert nicht nur einen (H)-Raum v. Fkt (nämlich L^2) sondern eine zu den ℓ^p-Räumen analoge Theorie von Räumen integrierbarer Fkt (L^p-Räume).

Allerdings muß das oben angesprochene "HN-Problem" hier per Hand bzw. durch einen mathematischen Standardhandgriff gelöst werden.

Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung des L-Integrals (eigentl. Stoff der Analysis-VO)

Ende 4. VO
27.3.23

AUSGETEILT

1.30 EXKURS: DAS LEBESGUE-INTEGRAL

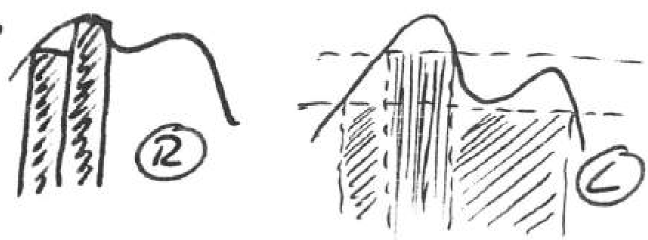
FA 41

020725

hier nur für Defbereich $\mathbb{R}$; analog für $\mathbb{R}^n$; allgemeiner für Maßräume, siehe Analysis

• Die Idee: Riemann vs. Lebesgue - längs- vs. quergestreift

Das L-Integral spielt das Integrieren auf das Problem zurück, möglichst komplizierten Mengen einen „Inhalt" - ein MASS - zuzuordnen ...



• DEF: Maß eines Intervalls $m([a,b)) = b-a = m([a,b]) =$ usw

Maß disj. Vereinigung von Intervallen $m(\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]) = \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i,b_i])$

• Mit gewissem technischem Aufwand läßt sich m auf kompliziertere Teilmengen von $\mathbb{R}$ ausdehnen - und zwar auf die Familie $\mathcal{L} \subseteq P(\mathbb{R})$ der Lebesgue-meßbaren Mengen.

• DEF $\mathcal{L}$ ist die kleinste Familie, die

1) alle Intervalle enthält
2) mit jedem $A \subseteq \mathbb{R}$ auch $\mathbb{R} - A$ enthält
3) mit jeder Familie $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ enthält
4) alle Nullmengen (siehe unten) enthält

} $\mathcal{L}$ ist eine σ-Algebra

• Nicht alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind meßbar; offene, abg. Mengen sind meßbar.

• DEF $N \subseteq \mathbb{R}$ heißt Nullmenge: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Folge offener Intervalle (a_i, b_i), die N überdeckt und Gesamtmaß $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$ hat.

Jede endliche, abzählbare Menge ist Nullmenge; es gibt aber auch überabzählbare Nullmengen (Cantormenge).

• Sprechweise fast überall: $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mit Ausnahme höchstens
(fü) einer Nullmenge

FA62

L-MASS

• **SATZ**: Die Erweiterung von m auf $\mathcal{L}$ erfüllt

1) $m(\emptyset)=0$
2) $m(\dot{\bigcup} A_i)=\sum^{\infty} m(A_i)$, $A_i \in \mathcal{L}$ paarw. disj
3) $m(A)=\inf\{m(G) \mid G \text{ offen} \supseteq A\}$ $A \in \mathcal{L}$
4) $m(N)=0$ für Nullmenge

} m ist Maß auf $\mathcal{L}$

∘ **DEF** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt $\boxed{L\text{-meßbar}}$ $:\iff \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}: \{x \mid \alpha \le f(x) < \beta\} \in \mathcal{L}$

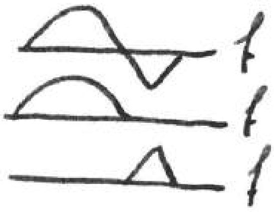
∘ **SATZ** 1) f stetig $\Rightarrow$ meßbar; $\mathbb{1}_A$ meßbar $\iff A \in \mathcal{L}$; endliche LK von char Fkt L-meßbarer Menge sind meßbar [A3, 36.4]

2) f_k meßbar $\Rightarrow |f|$, $\min(f_1,f_2)$, $\max(f_1,f_2)$, $\sup(f_k)$, $\inf(f_k)$ meßbar

3) Punktweise Limiten meßbarer Fkt sind meßbar. [A3, 36.5]

4) f meßbar $\Rightarrow$ f ist pktw Limes von Treppenfkt [A3, 36.6]

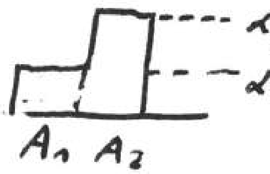
∘ **DEF**: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f^+=\max(f,0)$
$f^-=\max(-f,0)$



$f=f^+-f^-$
$|f|=f^++f^-$

∘ **DEF**: 1) $f=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ $A_i \in \mathcal{L}$ paarw. disj $m(A_i)<\infty$

$$\boxed{\int f := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i m(A_i)}$$



L-INTEGRAL [A3, 36.7]

3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, L-meßbar, $f\ge 0$

$$\boxed{\int f := \lim_m \int u_m}$$

wobei $u_m := \sum_{k=0}^{m2^m} \frac{k}{2^m} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^m} \le f < \frac{k+1}{2^m}\}}$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, L-meßbar, $\int|f|<\infty$

$$\boxed{\int f := \int f^+ - \int f^-}$$

[4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, L-meßbar, $\int|f|<\infty$ zerlege $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$

FA 63

DEF: Der VR der L-intbaren Fkt ist definiert als

$$\boxed{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ L-meßbar}, \int |f| < \infty \}}$$

Analog für Maßräume $\rightsquigarrow \mathcal{L}^1(E, \mu)$

- Das L-Int ist eine Verallgemeinerung des R-Int (d.h.: f R-intb ⇒ f L-intb und $\int_R f = \int f$). Es können aber mehr Fkt L-integriert werden: vor allem „wildere" Fkt - gemäß seiner Konstruktion kommt das L-Int mit stark oszillierenden, unstetigen Fkt zurecht; zB: $\int 1_{\mathbb{Q}} = 0$, $\int_R 1_{\mathbb{Q}}$ $\not\exists$.

Wozu brauchen wir diese „wilden" Fkt? In der Praxis auftretende Fkt sind doch immer „hübsch" (stkw. stetig, R-intb...)

Garnicht: $\mathcal{L}^1$ ist deswegen ein guter Raum, weil dort starke Sätze gelten, v.a. über Vertauschen von $\int$ und lim; z.B.:

- **SATZ** (Monotone Konvergenz)
  $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ L-meßbar, $f = \lim f_n$ (pktw.) ⇒ f L-meßbar und
  $$\boxed{\lim \int f_n = \int \lim f_n} \in [0, \infty]$$

- **SATZ** (Dominierte Konvergenz) $f_1, f_2, \ldots$ L-meßbar, $f_n \to f$ pktw. f.ü. & für n: $|f_n| \le g \in \mathcal{L}^1$ ⇒ $f_n, f \in \mathcal{L}^1$ und $\boxed{\lim \int f_n = \int \lim f_n}$

- **SATZ** (Fubini) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ ⇒

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \Big) dy = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \Big) dx}$$

1.31 BEM ($\|\ \|_1$ und das „HN-Problem")

Auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ können wir nun definieren $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$.
Allerdings ist $\|\ \|_1$ auf $\mathcal{L}^1$ nur eine Halbnorm: $\|f\| \Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ f.ü. (aber nicht $f=0$). Um diese „peinliche Kleinigkeit" auszuräumen identifiziert man alle $f \in \mathcal{L}^1$ mit $f=0$ f.ü. mit der Nullfunktion. Formaler ausgedrückt bildet man in $\mathcal{L}^1$ Klassen bzgl. der Äquivalenzrelation.

$$\boxed{f \sim g :\Leftrightarrow f - g = 0 \text{ f.ü.}}$$

Der entstehende Raum wird mit L^1 bezeichnet; also $L^1 = \mathcal{L}^1/\sim$, und der Umstand dass Elemente in L^1 strenggenommen Klassen von $\mathcal{L}^1$-Fkt sind wird fast immer unterdrückt: Man spricht von L^1-Fkt. Dies wollen wir auch in der folgenden Definition für L^1- bzw L^p-Räume tun; für eine ganz penible Darstellung siehe [W, p. 16-18]

1.32 DEF (Räume integrierbarer Fkt) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

(i) $L^1(I) := \{ f : I \to \mathbb{C} \mid L\text{-meßbar}, \int |f| < \infty \}$

5. VO
30.3.23

mit $\|f\|_1 := \int_I |f(x)|\,dx$

(ii) $L^2(I) := \{ f : I \to \mathbb{C} \mid L\text{-meßbar}, \int |f|^2 < \infty \}$

mit $\langle f | g \rangle := \int_I \overline{f(x)}\, g(x)\,dx$

(iii) Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir allgemeiner

$$\mathcal{L}^p(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{C} \;\middle|\; \mathcal{L}\text{-meßbar}, \int |f|^p < \infty \right\} \text{ mit}$$

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_I |f(x)|^p \, dx}$$

$\exists C : |f(x)| \leq C$ f.ü.

(iv) $\mathcal{L}^\infty(I) := \{ f : I \to \mathbb{C} \mid \mathcal{L}\text{-meßbar}, f \text{ f.ü. beschränkt} \}$

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \equiv \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} |f| := \inf_{\substack{N \subseteq I \\ m(N)=0}} \sup_{x \in I \setminus N} |f(x)| = \inf_{\substack{N \subseteq I \\ m(N)=0}} \|f|_{I \setminus N}\|_\infty$$

„essentielles sup"

lt Def $\exists N \subseteq I, m(N)=0$ sodass $f|_{I \setminus N}$ beschr.

1.33 BEM (Zur Def der $\mathcal{L}^p$-Räume)

(i) Wir werden für $\| \; \|_{\mathcal{L}^\infty}$ auch oft $\| \; \|_\infty$ schreiben. Diese Schlamperei ist insofern ungefährlich, da für $f \in \mathcal{C}^0$ gilt $\|f\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$.

(ii) Statt I mit dem Lebesgue-Maß ist jeder Maßraum (E, μ) sinnvoll; insbesondere jede offene/abg Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit dem $\mathcal{L}$-Maß. Wir schreiben meist $\mathcal{L}^p$ für $\mathcal{L}^p(I)$.

1.34 SATZ (Eigenschaften der $\mathcal{L}^p$-Räume)

(i) Für $p \in [1, \infty]$ gilt: $\mathcal{L}^p(I)$ ist ein (B)-Raum

(ii) $\mathcal{L}^2(I)$ ist der einzige (H)-Raum

(iii) Ist $m(I) < \infty$, dann gilt $(1 < q < 2, 2 < p < \infty)$

$$\mathcal{C}^0_b(I) \subseteq \mathcal{L}^\infty(I) \subseteq \mathcal{L}^p(I) \subseteq \mathcal{L}^2(I) \subseteq \mathcal{L}^q(I) \subseteq \mathcal{L}^1(I)$$

1.35 Bem (Hölder- und Minkowski-Ungl. für L^p) FA 46

(i) Analog zum diskreten Fall beweist man aus der gew. Ungl. zw geom. u. arith. Mittel die Hölder-Ungl. für L^p mit $1 < p < \infty$, i.e. $f \in L^p$, $g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\boxed{\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \,.}$$

[W, I.1.6]

Ebenso wie im diskreten Fall muß $p=1$, $q=\infty$ (bzw umgekehrt) extra behandelt werden: Für jede Nullmenge N gilt

$$\int_I |fg| = \int_{I \setminus N} |f||g| \leq \sup_{x \in I \setminus N} |f(x)| \int |g| \Rightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 \,.$$

Also gilt die HU für alle L^p-Räume $1 \leq p \leq \infty$

Für $p=2=q$ heißt die HU – wenig überraschend – CS-Ungleichung.

(ii) Ganz analog zum diskreten Fall folgert man aus der HU die Minkowski-Ungleichung für L^p; i.e. $\forall p \in [1,\infty]$, $f,g \in L^p$

$$\boxed{\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p}$$

Beweis $(p<\infty)$: $\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p \leq \int |f+g|^{p-1} (|f|+|g|)$

$$\overset{HU}{\leq} \left(\int |f+g|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right)$$

$$= \|f+g\|_p^{p-1} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \qquad \square$$

[W, p16]

FA47

Beweisskizze 1.34: Die $\boxed{\text{VR-Eigenschaften}}$ folgen aus der MU bzw. Eig. d. Integrals ($\int cf = c\int f$).

$\boxed{\text{Normeigenschaften:}}$ (N3) ist die MU; (N2) siehe Analysis (N1) gilt lt. Konstruktion der L^p-Räume.

Im Fall $\boxed{L^2}$ gelten (S1)-(S4) aus denselben Gründen plus der Linearität des Integrals [Analysis]

Bleibt also die $\boxed{\text{Vollständigkeit}}$ zu zeigen.

$\boxed{\text{Fall } p<\infty:}$ Wir verwenden 1.7. Sei also $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p =: \alpha < \infty$.

Es genügt zz, dass $\sum f_k$ konvergiert (i.e. $\|\sum f_k\|_p < \infty$).

Betrachte die (evtl. ∞-wertige, meßbare) Fkt

$$\hat{g}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|$$

Satz ü mon. Konv

sowie $\hat{g}_n(t) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)| \in L^p$, da $\|\hat{g}_n\|_p \overset{MU}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq \alpha$

Es gilt $\hat{g}_n^p \to \hat{g}^p$ pktw monoton $\Longrightarrow \int \hat{g}^p = \lim \int \hat{g}_n^p \leq \alpha^p < \infty$ (*)

$\Rightarrow \hat{g} \in L^p \Rightarrow \exists$ reellwertige meßbare Fkt g mit

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \quad \text{f.ü}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| < \infty$ f.ü $\overset{\mathbb{K} \text{ vollst}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ konv. f.ü, i.e. auf $I \setminus N$

Setze nun $f(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) & \text{auf } I \setminus N \\ 0 & \text{auf } N \end{cases}$

Dann ist f meßbar (und unser prospektiver Limes der $\sum f_k$ in L^p).

Es gilt $f \in L^p$, denn $|f| \le \hat{g} \Rightarrow$ FA48

$$\int_I |f|^p \le \int \hat{g}^p \overset{(*)}{<} \infty .$$

Schließlich gilt $\|f - \sum_{k=1}^n f_k\|_p \to 0$ nach dominierter Konvergenz,

genauer definiere $h_n := |\sum_{k=n}^\infty f_k|^p \Rightarrow h_n \to 0$ f.ü. und

$$0 \le h_n \le \left(\sum_{k=n}^\infty |f_k|\right)^p \le \hat{g}^p \in L^1$$

$\overset{1.30}{\Longrightarrow} \int_I h_n \to 0$, i.e. $\sum_{k=1}^n f_k \to f$ in L^p.

Fall $p=\infty$: Sei (f_n) CF in $L^\infty \Rightarrow \exists$ Nullmenge N:
$\|(f_n - f_m)|_{I\setminus N}\|_\infty \le \varepsilon \Rightarrow (f_n)_n$ ist CF im VR der beschränkten Fkt auf $I\setminus N$.

Dieser ist (B)-Raum (analog zu ℓ^∞) $\Rightarrow \exists g: I \to \mathbb{C}$ beschränkt mit $\|(f_n - g)|_{I\setminus N}\|_\infty \to 0$. Definiere $f(t) = g(t)$ auf $I\setminus N$, $f(t) = 0$ auf $N \Rightarrow f$ meßbar, beschränkt also $\in L^\infty$ und

$$\|f_n - f\|_{L^\infty} \le \|(f_n - f)|_{I\setminus N}\|_{L^\infty} = \|(f_n - g)|_{I\setminus N}\|_{L^\infty} \to 0$$

also $f_n \overset{L^\infty}{\longrightarrow} f$.

L^2 ist der einzige (H)-Raum: Analog zu Beweis 1.22 (p.36)

Für f, g $\boxed{1}\boxed{1}$ gilt $\square$-Glg dann und nur dann, wenn $p=2$.

Schachtelung der L^p-Räume: Für $1 \le p \le q \le \infty$, $u \in L^q \Rightarrow u \in L^p$ mit
$\|u\|_p = m(I)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$ wegen Hö. $\square\square\square\square$

1.36 BEM (Räume, die $\boxed{\text{so}}$ nicht funktionieren) FA 49

Folgende Räume lassen sich nicht zufriedenstellend im Rahmen der Theorie der normierten VR behandeln; man braucht unendliche Familien von Halbnormen ($\rightsquigarrow$ lokalkonvexe VR)

c_{00} ... finite Folgen ... sodass ein vollständiger Raum entsteht

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ... alle Folgen ... mit koordweise Konv. (vgl. 1.20)

$\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ ... stetige Fkt mit kp. Träger ... sodass ein vollst. Raum entsteht

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ... ... glm. Konv. auf kp. Teilmengen

$\mathcal{C}^\infty[a,b]$ ... ... glm Konv. in allen Abl. auf kp. Teilmengen

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ... glatt m. kp. Träger ... sodass ein vollst. Raum entsteht

FA 50

070730

2 Normierte Vektorräume und Stetige Lineare Operatoren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns weiter mit einigen Grundlagen NVR und den „strukturerhaltenden" Abb.: stetigen und linearen Operatoren.

Im §2.1 beschäftigen wir uns mit endlichdimensionalen NVR und der Eigenschaft der Separabilität.

§2.1 Eigenschaften normierter Vektorräume

2.1. Motivation (Äquivalenz von Normen)

In vielen Situationen ist es sinnvoll mehrere Normen auf einem VR zu betrachten (vgl. elegante Beweise v. Picard-Lindelöf)

Aus der Analysis wissen wir andererseits, dass auf $\mathbb{R}^n$ je zwei Normen äquivalent sind [Analysis],

d.h. $c_1 \|v\| \leq \|v\|^{\sim} \leq c_2 \|v\| \quad \forall v \in V$.

In unendlich-dimensionalen VR ist das i.A. nicht der Fall (vgl. 2.5).

Wir beginnen mit der offiziellen Definition.

2.2 DEF (Äquivalenz v. Normen) Zwei Normen $\|\ \|$, $\|\ \|^\sim$ auf dem $\mathbb{K}$-VR V heißen äquivalent falls
$\exists C_2 \geq C_1 > 0$:
$$C_1 \|v\| \leq \|v\|^\sim \leq C_2 \|v\| \quad \forall v \in V.$$

2.3 SATZ (Charakterisierung der Äquivalenz v. Normen)
Seien $\|\ \|$, $\|\ \|^\sim$ Normen auf dem VR V. TFAE

(i) $\|\ \|$ und $\|\ \|^\sim$ sind äquivalent.

(ii) Für alle Folgen $(x_n)_n$ in V gilt:
$(x_n)_n$ konv. bzgl. $\|\ \|$ $\iff$ $(x_n)_n$ konv. bzgl. $\|\ \|^\sim$.

(iii) Für alle Folgen $(x_n)_n$ in V gilt:
$(x_n)_n$ $\|\ \|$-Nullfolge $\iff$ $(x_n)_n$ $\|\ \|^\sim$-Nullfolge.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar. Wir zeigen
(iii) $\Rightarrow$ (i): Indirekt ang. $\nexists C_2$ mit $\|v\|^\sim \leq C_2\|v\|$ $\forall v \in V$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists v_n \in V$ mit $\|v_n\|^\sim > n\|v_n\|$

Definiere $w_n := \frac{v_n}{n\|v_n\|}$ $\Rightarrow \|w_n\| = \frac{1}{n} \to 0$

aber $\|w_n\|^\sim > 1 \not\to 0$ ↯ zu (iii)

Analog für C_1. $\square$

2.4. Bem (Die geometrische Bedeutung von 2.2) FA 52

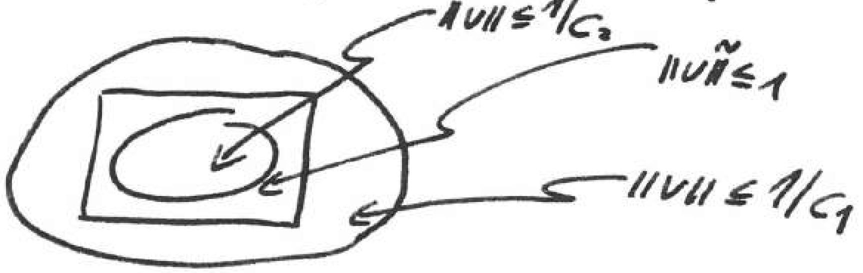
Geometrisch bedeutet

$$C_1 \|v\| \le \|v\|^\sim \le C_2 \|v\| \quad \forall v \in V$$

dass die $\|\ \|^\sim$-Norm Einheitskugel $\{v \mid \|v\|^\sim \le 1\}$

(i) in einer $1/C_1$-Kugel bzgl. $\|\ \|$ enthalten ist $\left(\|v\| \le \frac{1}{C_1}\|v\|^\sim \le \frac{1}{C_1}\right)$

(ii) eine $1/C_2$-Kugel bzgl. $\|\ \|$ enthält. $\left(\|v\| \le 1/C_2 \Rightarrow \|v\|^\sim \le C_2\|v\| \le 1\right)$



2.5 Bsp (Äquivalente bzw Inequivalente Normen)

(i) Auf $\mathbb{R}^n$ gilt: $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$ und

$$1/\sqrt{n}\,\|x\|_2 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2$$

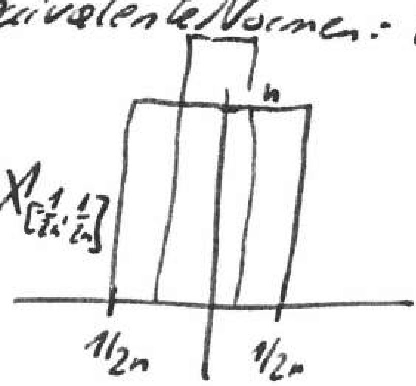
(Beweis siehe [VE])

(ii) In unendlich-dim VR gibt es inequivalente Normen: z.B. $L^\infty[-1,1]$ mit $\|\ \|_\infty$, $\|\ \|_1$

Sei f_n wie in der Skizze; $f_n = n\chi_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$

$\|f_n\|_\infty = n$, $\|f_n\|_1 = 1$

$\Rightarrow \nexists C_1$ wie in (*)



(iii) Es kann in unendlich-dim VR auch äquiv. Normen geben:

zB $C^1[a,b]$ mit $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ (vgl. 1.26 iii)

und $\|f\|^\sim := \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$

Dann gilt: $\|f\|^{\sim} \leq \|f\| \leq 2\|f\|^{\sim}$ $\forall f \in C^1[a,b]$.

FA 53

2.6 BEM (Äquivalenz v. Normen vs. Äquivalenz von Metriken)

(i) Satz 2.3. besagt, dass äquivalente Normen vom top. Standpunkt aus denselben MR erzeugen[1]. Insbesondere besitzen $(V, \|\ \|)$ und $(V, \|\ \|^{\sim})$ dieselben CF. Also gilt

$$(V, \|\ \|) \text{ vollständig} \iff (V, \|\ \|^{\sim}) \text{ vollständig.}$$

(ii) <u>WARNUNG</u>! In MR ist die Situation komplizierter. Versieht man eine Menge X mit zwei Metriken d_1 und d_2, die dieselben konvergenten Folgen besitzen so müssen die CF <u>nicht</u> übereinstimmen.

<u>z.B.</u>: $\mathbb{R}$ mit $d_1(x,y) := |x-y|$, $d_2(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$

($d_1(x,y)$ klein $\Rightarrow$ $d_2(x,y)$ klein weil arctan stetig

$d_2(x,y)$ klein $\Rightarrow$ $d_1(x,y)$ klein; MWS für arctg)

$x_n = n$ ist d_2-CF und $(\mathbb{R}, d_2)$ ist nicht vollständig

Dieses Bsp ist möglich, da $id: (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d_1)$ zwar stetig aber nicht glm stetig ist.

Im Gegensatz dazu besagt 2.2, dass $\|\ \|^{\sim}$ auf $(V, \|\ \|)$ glm stetig ist!

[1] d.h. genauer: Die beiden erzeugten MR haben dieselbe Topologie.

2.7 Bem (Vom Nutzen äquivalente Normen) FA 54

In manchen Fällen ermöglicht der Übergang zu einer äquivalenten Norm, die Eigenschaften der gegebenen Norm zu verbessern. Eine elegante Version des Beweises des Satzes von Picard-Lindelöf etwa verwendet den Banachschen Fixpunktsatz für die zur $\|\ \|_\infty$-Norm äquivalente Norm

$$\|f\|_\alpha := \sup_{a\le t\le b} |f(t)|\, e^{-\alpha t}.$$

So kann leichter (ohne Verwenden der Lipschitz-Konstante der rechten Seite) die Kontraktionseigenschaft des zur ODE äquivalenten Integraloperators gezeigt werden. (Vgl. z.B.: A. Kriegl, Skriptum Analysis 2).

2.8 SATZ (Äquivalenz von Normen in endl. dim VR)

5. VO 30.3.23

Auf einem endl. dim VR sind je zwei Normen äquivalent.
Insbesondere ist $\|\ \|$-Konvergenz gleichbedeutend mit koordinatenweiser Konvergenz.

Beweis: [Heuser, Analysis 2, Satz 109.8] $\square$

2.9 KOR (Unmittelbare Konsequenzen von 2.8)

6. VO 17.4.23

(i) In endl. dim NVR gilt: abg + beschr. Mengen sind kp.

(ii) Alle endl. dim NVR sind vollständig.

(iii) Endl. dim TR von NVR sind abg.

Beweischen & Motivation:

(ii) klar weil $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$ vollst. [Analysis], dann 2.8.

(iii) folgt aus (ii) und 1.23(ii).

(i) $A \subseteq V$ beschr. + abg. bzgl. $\|\ \| \overset{2.8}{\Longrightarrow}$ A beschr. + abg. bzgl. $\|\ \|_2$.

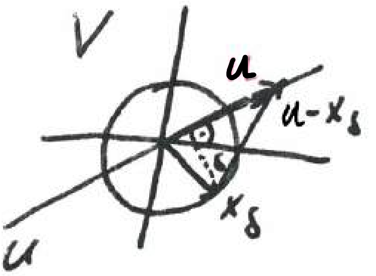
Mit Heine-Borel [Analysis] (vgl. auch [Topologie]) folgt das Resultat.

Unser nächstes Ziel ist es zu sehen, dass (i) die endl. dim NVR charakterisiert. Dazu benötigen wir folgendes Lemma, das auch unabhängig davon von Interesse ist.

echte Teilmenge

2.10 Lemma (Riesz) V NVR, $U \subsetneq V$ abg TR, $0<\delta<1$

$\Longrightarrow \exists\, x_\delta \in V$ mit $\|x_\delta\|=1$ und $\|u-x_\delta\|\geq\delta\ \ \forall u\in U$



Beweis: $\exists\, x\in V\setminus U$; $d:=\inf\{\|x-u\| \mid u\in U\}$

$\Longrightarrow d>0$, denn sonst $\exists\, (x_n)_n$ in U mit $x_n\to x\in\overline{U}=U$

Also $\frac{d}{\delta}>d \Longrightarrow \exists\, u_\delta\in U: \|x-u_\delta\|\leq\frac{d}{\delta}$

Setze $x_\delta=\frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|}$, dann gilt $\|x_\delta\|=1$ und $\forall u\in U$

$$\|x_\delta-u\| = \left\|\frac{x}{\|x-u_\delta\|}-\frac{u_\delta}{\|x-u_\delta\|}-u\right\| = \frac{1}{\|x-u_\delta\|}\left\|x-\underbrace{(u_\delta+\|x-u_\delta\|u)}_{\in U}\right\|$$

$$\geq \frac{d}{\|x-u_\delta\|} \geq \delta.$$

□

2.11 SATZ (Charakterisierung endl. dim NVR)

Sei V ein NVR. TFAE

(i) $\dim V < \infty$.

(ii) Die Einheitskugel $B := \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt.

(iii) Jede beschränkte Folge in V besitzt einen Häufungswert. (Bolzano Weierstraß)

Beweis: (i) ⇒ (ii): wegen 2.9 (i)

(ii) ⇒ (iii): Sei $\|x_n\| \leq c \Rightarrow \frac{1}{c} x_n \in B$, B kp. metrischer Raum

$\overset{\text{BW [TOPOLOGIE]}}{\Longrightarrow} \frac{1}{c} x_n$ hat HW $\Rightarrow x_n$ hat HW.

(iii) ⇒ (i): Indir ang $\dim V = \infty$. Sei $x_1 \in V$, $\|x_1\| = 1$;

Setze $U_1 = \operatorname{span}^{(*)}(x_1) \Rightarrow U_1$ endl dim $\overset{2.9(iii)}{\Longrightarrow} U_1$ abg

außerdem $U_1 \neq V$

$\underset{\delta = 1/2}{\overset{2.10}{\Longrightarrow}} \exists x_2 \in V$ mit $\|x_2\| = 1$ und $\|x_1 - x_2\| \geq 1/2$

Nun setze $U_2 = \operatorname{span}(x_1, x_2)$ und wende 2.10 erneut an usw.

Induktiv ergibt sich eine Folge $(x_n)_n$ mit $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ und $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$ $\forall m \neq n$; also ist keine Teilfolge von $(x_n)_n$ CF

$\overset{1.4(iv)}{\Longrightarrow} (x_n)_n$ hat keine konv. TF ↯ zu (iii).

$\square$

(*) Zur Erinnerung: $A \subseteq V$ ($\mathbb{K}$-VR). Dann heißt der kleinste TR von V, der A enthält, $\operatorname{span}(A)$ oder $\operatorname{lin}(A)$, der Span oder die lin. Hülle von A [Lin. Alg.]; es gilt $\operatorname{span} A = \{$endl. LK von Elementen in $A\}$.

2.12 ERINNERUNG & MOTIVATION (Separabilität) | FAST

In top. Räumen, insbesondere in MR X definieren wir (vgl [Topologie])

$Y \subseteq X$ heißt dicht $:\Leftrightarrow \overline{Y} = X$

[$\Leftrightarrow$ jede nichtleere offene Teilmenge / jede Umgebung in X enthält einen Pkt aus Y

$\Leftrightarrow$ jedes $x \in X$ ist Limes einer Folge in Y

X heißt separabel $:\Leftrightarrow$ X besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge

Ist ein Raum separabel, so ist seine Analyse leichter – es steht ein mächtiges technisches Werkzeug zur Verfügung!

Daher ist es wichtig Kriterien f. Separabilität anzugeben.

Es gilt
- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ist separabel ($\mathbb{Q}^n$ bzw $\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ dicht)
- Teilmengen sep. Räume sind sep
- jedes $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist separabel

Für NVR haben wir folgendes Kriterium

2.13 LEMMA + DEF (Separable NVR)

Sei V NVR. TFAE

(i) V separabel

(ii) $\exists\, U \subseteq V$ abzählbar mit $\overline{\operatorname{span} U} = V$

Mengen mit der Eigenschaft, dass der Abschluß der lin. Hülle der ganze Raum ist heißen (in der Literatur oft) **totale Menge** (z.B. [Weidmann]).

Das Lemma besagt also, dass ein Raum genau dann separabel ist, falls es eine abzählbare totale Teilmenge gibt.

Beweis: (i) ⇒ (ii): ist klar, denn $\overline{U} = V \Rightarrow \overline{\operatorname{span} U} \supseteq \overline{U} = V$

(ii) ⇒ (i): Wir betrachten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sonst ersetze im Folgenden $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Sei U total & abz.

Setze $W := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}, x_i \in U \} \Rightarrow W$ abzählbar.

Wir zeigen $\overline{W} = V$, genauer $\forall x \in V \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in W: \|x-y\| < \varepsilon$.

Sei also $x \in V$ und $\varepsilon > 0$.
Sei zunächst $y_0 \in \operatorname{span} U$, also $y_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in U$ mit $\|x - y_0\| < \varepsilon/2$. Dann wähle $\lambda_i' \in \mathbb{Q}$ mit $|\lambda_i - \lambda_i'| \leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|}$.

Für $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' x_i \in W$ gilt dann

$$\|x-y\| \leq \|x-y_0\| + \|y_0 - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \max |\lambda_i - \lambda_i'| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

2.14 Bsp (Separable und nicht separable NVR)

(i) ℓ^p ist separabel für $1 \leq p < \infty$.

Wir zeigen ℓ^p ist der Abschluß des Spans der Einheitsvektoren – natürlich ist der Abschluß bzgl. $\| \, \|_p$ zu bilden!

FA 59

Sei $A := \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (dann ist übrigens $\operatorname{span} A = c_{00}$ und wir erhalten auch $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p} = \ell^p$).

Sei also $x = (x_n)_n \in \ell^p$, dann gilt

$$\|x - \sum_{k=1}^{m} x_k e_k\|_p = \Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \ (m\to\infty) \quad (*)$$

(ii) ℓ^∞ ist nicht separabel

(Zunächst bemerke, dass $(*)$ in ℓ^∞ nicht funktioniert!?)

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ definiere

$$\ell^\infty \ni \chi^M_n := \begin{cases} 1 & n \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

dann $\Delta := \{\chi^M \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$; Δ ist überabzählbar ($|2^{\mathbb{N}}| = \aleph_1$)

Es gilt $\|\chi^M - \chi^{M'}\|_\infty = 1$ falls $M \neq M'$

Sei nun $A \subseteq \ell^\infty$ abzählbar $\Rightarrow \forall x \in A$: $\underbrace{\{y \in \ell^\infty \mid \|x-y\|_\infty \leq 1/4\}}_{=: B_{\frac14}(x)}$ enthält höchstens ein $\chi^M \in \Delta$, denn sonst wäre

$$\|\chi^M - \chi^{M'}\|_\infty \leq \|\chi^M - x\|_\infty + \|x - \chi^{M'}\|_\infty \leq 1/2 \ \lightning.$$

$\Rightarrow A$ nicht dicht.

(iii) L^∞ ist nicht separabel (analog zu ℓ^∞)

(iv) c_0 ist separabel (ähnlich (i); siehe UE)

Unser nächstes Ziel ist es die Separabilität von L^p $1 \leq p < \infty$ zu zeigen; dafür benötigen wir

2.15 SATZ (Weierstraßscher Approximationssatz) FA 60

Der (Teil)raum $P[a,b]$ der Polynomfunktionen auf $[a,b]$ liegt dicht in $(\mathcal{C}^0[a,b], \|\ \|_\infty)$.

Beweis: In jedem Analysis-Buch; oder z.B. [W, I.2.10]
Stichwort: Bernstein-Polynome. □

2.16 KOROLLAR (Separabilität von $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{L}^p$)

(i) $\mathcal{C}^0[a,b]$ ist separabel

(ii) $\mathcal{L}^p[a,b]$ ist separabel für $1 \le p < \infty$

Beweis: (i) klar, denn $\mathcal{C}^0[a,b] = \overline{\operatorname{span}\{t^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$.

(ii) Schritte: Zunächst bemerke $A \subseteq B$ dicht $B \subseteq C$ dicht $\Rightarrow A \subseteq C$ dicht

[natürlich alles bzgl. derselben Topologie! $\forall c \in C\ \forall \varepsilon > 0\ \exists b \in B: \|c-b\| < \varepsilon/2$; $\forall b \in B\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ \|a-b\| < \varepsilon/2$
$\Rightarrow \forall c \in C\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A: \|a-c\| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$]

Schritt 1: $\mathcal{C}^0[a,b] \subseteq \mathcal{L}^p[a,b]$ dicht

Maßtheorie $\Rightarrow$ $\overline{\operatorname{span}\{\chi_A \mid A \text{ L-meßbar}\}} = \mathcal{L}^p$ (Treppenfkt dicht in $\mathcal{L}^p$)

Regularität des L-Maßes $\Rightarrow$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ L-meßbar $\forall \varepsilon > 0\ \exists O \supseteq A$ offen und $m(O \setminus A) < \varepsilon$ $\Rightarrow \|\chi_A - \chi_O\|_p = m(O \setminus A)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$

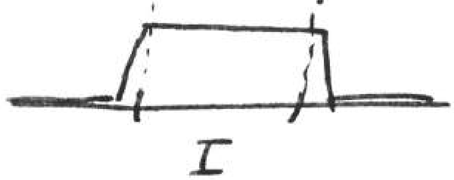
$\Rightarrow \overline{\operatorname{span}\{\chi_O \mid O \subseteq \mathbb{R} \text{ offen}\}} = \mathcal{L}^p$

$O \subseteq \mathbb{R}$ offen ist abz. Vereinigung disj. offener Intervalle $I_j \Rightarrow m(O) = \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j)$

$\Rightarrow \chi_O \in \overline{\operatorname{span}\{\chi_I \mid I \subseteq \mathbb{R} \text{ offenes Intervall}\}}$

$\Longrightarrow$ Es genügt zz: $\forall I \subseteq [a,b]$ offenes Intervall $\exists f \in C^0$ mit $\|f - \chi_I\|_p < \varepsilon$

Das geht natürlich so



Schritt 2: $P[a,b] \subseteq L^p[a,b]$ dicht (Achtung nicht: $P \subseteq C^0 \subseteq L^p$ alle dicht; fertig weil $\|\,\|_\infty$ vs $\|\,\|_p$!)

Schritt 1 $\Rightarrow \forall f \in L^p \ \exists (f_n)_n \in C^0: \|f_n - f\|_p \to 0$

2.15 $\Rightarrow \forall f_n \ \exists g_n \in P[a,b]: \|f_n - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \|f - g_n\|_p \leq \underbrace{\|f - f_n\|_p}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n - g_n\|_p}_{\leq (b-a)^{1/p} \|f_n - g_n\|_\infty \to 0.} \quad \square$$

2.16 A Bsp (Weitere (nicht)-separable Räume)

(i) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen oder abg $\Rightarrow L^p(\Omega)$ separabel $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$ nicht separabel

(ii) T kp T_2-Raum: $(C^0(T), \|\,\|_\infty)$ separabel $\Leftrightarrow T$ metrisierbar

6. VO 17.4.23

Ohne Beweis – z.T. sehr aufwendig...

7. VO 24.6.23

§2.2 STETIGE LINEARE OPERATOREN

FA 62

070806

In diesem Paragraphen beginnen wir das Studium von „strukturerhaltenden/angepassten" Abbildungen zwischen NVR. Wir beginnen mit einer Sprechweise

2.17 DEF (Operator)

(i) Eine stetige & lineare Abbildung zw. NVR heißt stetiger (linearer) Operator.

(ii) Ist der Zielraum $\mathbb{K}$, so sagen wir Funktional statt Operator.

2.18 ERINNERUNG (zur Stetigkeit; vgl. Topologie)

Ein stetiger Operator $T : E \to F$ erfüllt eine/jede der äquivalenten Bedingungen

(i) $\forall x \in E \; \forall x_n \to x$ (in E) $\Rightarrow Tx_n \to Tx$ (in F)

(ii) $\forall x_0 \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 :$

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$$

(iii) $\forall O \subseteq F$ offen $\Rightarrow T^{-1}(O) := \{x \in E \mid Tx \in O\}$ offen in E

Schreibweise Tx statt $T(x)$

2.19 Motivation (Wozu Stetigkeit?)

(i) Approximationen und Reihendarstellungen sind in der Praxis von größter Wichtigkeit, z.B.

- $x = (x_1, \dots) \in \ell^1$ approximiert durch $x^{(n)} := (x_1, \dots x_n, 0, \dots 0)$ für $n \to \infty$; Darstellung $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$
- $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ approximiert durch Bernsteinpolynome p_n mit $\|p_n - f\| \to 0 \ (n \to \infty)$
- $f \in \mathcal{C}^0[0, 2\pi]$ dargestellt durch seine Fourierreihe [A1§14]

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n t + b_n \sin 2\pi n t)$$

In all diesen Fällen will man $Tx = T \lim x_n$ als $\lim(Tx_n)$ schreiben können; das ist gerade (i) von oben!

(ii) Jede lin Abb $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von der Gestalt $x \mapsto Ax$ mit $A \in M(m,n)$ also automatisch stetig (bzgl. $\|\ \|_1$ und daher bzgl. jeder Norm; Satz 2.8).

Im ∞-dim Fall gibt es aber auch unstetige lin. Abb!

z.B.: $T : (\mathcal{C}^1[0,2\pi], \|\ \|_\infty) \to (\mathcal{C}^0[0,2\pi], \|\ \|_\infty)$

$$f \mapsto f'$$

$f_n(t) = \frac{1}{n}\cos 2\pi n t \in \mathcal{C}^\infty[0,2\pi] \subseteq \mathcal{C}^1[0,2\pi]$ **FA 64**

$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$

Aber: $f_n' = -2\pi \sin 2\pi n t \in \mathcal{C}^\infty[0,2\pi] \subseteq \mathcal{C}^0[0,2\pi]$

$$\|f_n'\|_\infty = \|(Tf)_n\|_\infty = 2\pi \not\to 0.$$

Wir geben nun folgende einfach zu sehende Charakterisierung stetiger Operatoren

2.20 SATZ (Charakterisierung stetiger Operatoren)

Seien E, F NVR. $T: E \to F$ linear: TFAE

(i) T ist stetig bei 0.

(ii) T ist (überall) stetig.

(iii) T ist glm. stetig.

Beweis: (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\varepsilon > 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: \ T(B_\delta(0)) \subseteq B_\varepsilon(T(0)) \overset{T \text{ lin.}}{=} B_\varepsilon(0)$

Daher $\|x-y\| \leq \delta \Rightarrow x-y \in B_\delta(0) \Rightarrow T(x-y) \in B_\varepsilon(0)$

$\Rightarrow Tx - Ty \in B_\varepsilon(0) \Rightarrow \|Tx - Ty\| \leq \varepsilon.$ □

Als nächstes untersuchen wir die Beziehung zwischen stetigen & beschränkten lin. Abb.; deren die folgende

2.21 DEF (Beschränkte Mengen und Abb). E, F NVR

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt <u>beschränkt</u>, falls sie in einem Vielfachen der Einheitskugel enthalten ist. $\circ E := \{x \in E : \|x\| \le 1\}$

(ii) $T: E \to F$, linear heißt <u>beschränkt</u>, falls die Bilder beschränkter Mengen beschränkt sind.

2.22 BEM (Zur Beschränktheit von Operatoren)

(i) <u>WARNUNG</u>: Beschränktheit wird hier <u>anders</u> verwendet als für etwa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$! So ein f heißt ja beschränkt, falls $\exists C : |f(x)| \le C \ \forall x \in \mathbb{R}$, also die unbeschränkte Menge $\mathbb{R}$ auf die beschränkte Menge $[-C, C]$ abgebildet wird.

(ii) Offensichtlich genügt es für die Beschränktheit von T, zu verlangen, dass $T(\circ E)$ beschränkt ist:

$A \subseteq E$ beschr $\Rightarrow A \subseteq \lambda \circ E \Rightarrow$

$$T(A) \subseteq T(\lambda \cdot \circ E) = \lambda \cdot \underbrace{T(\circ E)}_{\subseteq \mu \circ F} \subseteq (\lambda\mu) \circ F.$$

2.23 SATZ (stetig $\Leftrightarrow$ beschränkt) FA 66

Seien E, F NVR, $T: E \to F$ linear. TFAE

(i) T ist stetig.

(ii) T ist beschränkt.

(iii) $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Zu $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$: $T(B_\delta(0)) \subseteq oF$;

$oE = \frac{1}{\delta} B_\delta(0) \Rightarrow T(oE) \underset{T \text{ lin}}{=} \frac{1}{\delta} T(B_\delta(0)) \subseteq \frac{1}{\delta} oF$.

Mit 2.22 (ii) $\Rightarrow T$ beschränkt.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Wegen (ii) $\exists \mu$: $T(oE) \subseteq \mu oF$; also für $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq \mu \Rightarrow \sup \|Tx\| \leq \mu < \infty$.

(iii)$\Rightarrow$(i): $\|T \frac{x}{\|x\|}\| \leq \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| =: \alpha < \infty$ wegen (iii)

$\Rightarrow \|Tx\| \leq \alpha \|x\| \underset{T \text{ lin}}{\Rightarrow} T(B_{\frac{\varepsilon}{\alpha}}(0)) \subseteq B_\varepsilon(0) \Rightarrow T$ stetig bei 0. $\square$

Wir benutzen nun 2.23(iii) um eine Norm für stetige Operatoren zu definieren

2.24 DEF (Operatornorm) E, F NVR, $T: E \xrightarrow{\text{lin}} F$

Wir definieren die Operatornorm von T als

$$\boxed{\|T\|_{OP} := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F.}$$

Meistens lassen wir die Bezeichnungen der Normen weg & schreiben $\|T\|$ für $\|T\|_{OP}$

Bevor wir zeigen, dass $\|T\|$ tatsächlich eine Norm auf einem geeigneten VR ist einige Beobachtungen:

FA 67

2.25 BEM (Zur Operatornorm)

(i) Es gilt

$$\boxed{\|T\| := \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|}}$$

für $0<\|x\|<1$: $\|Tx\| = \left\| \|x\| \, T\frac{x}{\|x\|} \right\| = \underbrace{\|x\|}_{<1} \left\| T\frac{x}{\|x\|}\right\| < \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

$\{x : \|x\| = 1\} = \left\{\frac{y}{\|y\|} : y\neq 0\right\}$, $\quad \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = \left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\|$

(ii) $\|T\|$ ist die kleinste Konstante sodass

$$\boxed{\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|} \quad \forall x\in E \text{ gilt,}$$

denn: $\|Tx\| = \|x\| \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|x\| \, \|T\|$ $(x\neq 0)$, also gilt die Ungleichung; umgekehrt gilt $\forall x\in E$:

$\|Tx\| \leq K\|x\| \Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| \leq K \Rightarrow \|T\| \leq K$.

(iii) Ist $\dim E < \infty$, so ist die Einheitskugel kp (Satz 2.11) und die (stetige! 1.4(vii)) Abb $x \mapsto \|Tx\|$ nimmt ihr Max an. Im allgemeinen ist das aber nicht so: FA68

$T: \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \frac{3}{4}x_3, \ldots\right)$

$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{k}{k+1} x_k\right|^2 \underset{x \neq 0}{<} \sum |x_k|^2$ [mult. m. $\begin{pmatrix} 1/2 & & 0 \\ & 2/3 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$]

$\Rightarrow \|Tx\| < 1 \;\; \forall x: \|x\| \leq 1$ also $\|T\| \leq 1$

$\not\exists$ andererseits ist $\|Te_n\| = \frac{n}{n+1} \to 1$, also insges $\|T\| = 1$.

2.26 DEF: (Raum der stetigen Operatoren) E, F NVR

$$\mathcal{L}(E,F) := \{T: E \to F \mid \text{linear \& stetig}\}$$
$$\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$$

2.27 SATZ: ($\mathcal{L}(E,F)$ als NVR) E, F NVR

$(\mathcal{L}(E,F), \|\;\|_{op})$ ist ein NVR.

Beweis: $\mathcal{L}(E,F)$ ist VR, da Vielfache und Summen von Nullfolgen wieder Nullfolgen sind, und das wegen 2.20(i) reicht. Wir zeigen die Normeigenschaften

(N1) $\|T\| \geq 0$ ✓

$\|T\| = 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 \;\; \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \overset{(N1)}{=} 0 \Rightarrow \forall x: Tx = 0 \Rightarrow T = 0$

(N2) $\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|=1} \|\underbrace{(\lambda T)x}_{\underset{T \text{ lin.}}{=} \|\lambda(Tx)\| \underset{(N2)}{=} |\lambda| \|Tx\|}\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = |\lambda| \|T\|$

FA 68A

2.25 BEM (Zur Operatornorm)

(iv) Warnung & Beruhigung: Klarerweise hängt die Operatornorm von der Norm in E und F ab, denn 2.24 lautet in voller Gestalt

$$\|T\| := \sup_{\|x\|_E \le 1} \|Tx\|_F .$$

Da $T: E \to F$ ist aber klar, dass $\|x\|$ immer die Norm in E und $\|Tx\|$ immer die Norm in F meint. Da Verwechslungen hier nur schwer möglich sind, werden wir E, F in den Normen (meistens) unterdrücken.

Ist es doch einmal nötig auf $\|\ \|_E$ bzw $\|\ \|_F$ zu verweisen, so wird meist folgende Schreibweise verwendet

$$\|T\|_{E \to F} .$$

(N3) $\|T_1+T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \underbrace{\|(T_1+T_2)x\|}_{\|T_1x+T_2x\| \underset{(N3)}{\leq} \|T_1x\|+\|T_2x\|} \leq \|T_1\|+\|T_2\|$ | FA 69

□

2.28 Bsp ((Un-)stetige Operatoren & ihre Normen)

(i) Der endlich-dim. Fall: Sei E endl. dim, F beliebig dann ist jede lin Abb stetig. Auf E wähle $\| \|_1$, dann gilt für $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$:

$$\|Tx\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i Te_i\| \overset{(N3)(N2)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Te_i\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|Te_i\| \, \|x\|_1 .$$

Spezielle falls F ebenfalls endl. dim, dann ist jede lin Abb φ von der Gestalt $x \mapsto Ax$ $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ($n = \dim E$, $m = \dim F$). Im folgenden seien E, F mit $\| \|_2$ ausgestattet (falls nicht anders gesagt wird, ist das immer so gemeint).

- $\left\|\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\| = 3$ (anschaulich klar; Rechnung:)

$$\|x\|_2 = 1 \Rightarrow \|Ax\|_2^2 = |3x_1|^2 + |2x_2|^2 \leq 9(|x_1|^2+|x_2|^2) = 9$$
$$\Rightarrow \|A\| \leq 3$$

andererseits: $\left.\|Ae_1\|_2 = \|3e_1\|_2 = 3\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\|A\| = 3}}$

- $\left\|\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right\| = 5$, denn bzgl. der ONB $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Matrix die Gestalt $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, dann wie oben.

FA 70

WARNUNG: Die Stetigkeit einer lin Abb für E endl. dim ist zwar unabhängig von der Wahl der Norm auf E – die Operatornorm hängt jedoch sehr wohl von der Wahl der Norm ab! [siehe UE]

(ii) Die trivialen Bsp: $\|0\|=0$, $\|Id\|=1$ für $Id: E \to E$ mit $E \neq \{0\}$.

(iii) Wann ist $T: \ell^p \to \ell^p$; $Tx = (\lambda_n x_n)_n$ stetig? $\left(Tx = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} x\right)$

$\|e_n\|_p = 1 \Rightarrow \|T\| \geq \|Te_n\|_p = \|\lambda_n e_n\|_p \overset{(*)}{\Rightarrow} \sup|\lambda_n| < \infty$ ist notwendig

(UE) Andererseits:

$$\|Tx\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n x_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sup|\lambda_n|^p \sum |x_n|^p\right)^{1/p}$$

$$= \sup|\lambda_n| \, \|x\|_p^{(**)} \Rightarrow \sup|\lambda_n| < \infty \text{ ist auch hinreichend!}$$

Also: T stetig $\Leftrightarrow \sup|\lambda_n| < \infty$

und $\|T\| = \sup|\lambda_n|$

$\leq$ wegen $(**)$, $\geq$ wegen $(*)$

(iv) Ein unstetiger Op: $E = c_{00}$, $T: E \to E$, $Tx = (n x_n)_n$

T ist unbeschränkt und daher unstetig, denn

$$\frac{\|Te_n\|}{\|e_n\|} = \frac{\|n e_n\|}{\|e_n\|} = n \longrightarrow \infty \quad (n \to \infty).$$

FA 71

Dieses Beispiel ist nicht pathologisch; sei

$E = \mathrm{Span}\{1, \sin(nx), \cos(nx) \mid n \geq 1\} \subseteq \mathcal{C}^0[0,2\pi]$ der Raum der trigonometrischen Polynome mit $\| \ \|_2$

$$T := \frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} T\cos(nx) = -n\sin(nx) \\ T\sin(nx) = n\cos(nx) \end{array} \quad \Rightarrow \|T\| = \infty$$

Also $\frac{d}{dx}$ unstetig [vgl. auch 7.18(ii)].

(v) Ein Funktional auf c: $\boxed{\begin{array}{l} T: c \to \mathbb{K} \\ x = (x_n)_n \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}}$

Es gilt $\boxed{\|T\| = 1}$, denn es gilt $\|Tx\| \underset{1.4(iv)(c)}{\leq} \sup|x_n| = \|x\|_\infty$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \leq 1$$

und andererseits für $x = (1,1,\dots)$ ist $Tx = 1$.

[Da $c_0 = T^{-1}(\{0\})$ liefert die Stetigkeit von T einen eleganten Beweis für die Abgeschlossenheit von c_0 in c; vgl. Beweis 1.22.]

7. VO 24.4.23

8. VO 4.5.23

(vi) Ein Funktional auf $\mathcal{C}^0[0,1]$: Sei $g \in \mathcal{C}^0[0,1]$.

Wir definieren $\boxed{\begin{array}{l} T_g: \mathcal{C}^0[0,1] \to \mathbb{K} \\ T_g f := \int_0^1 g(t) f(t)\,dt \end{array}}$

Es gilt $\|T_g\| = \int_0^1 |g(t)|\,dt = \|g\|_1$, denn

$$|T_g f| \leq \int_0^1 |g(t)|\,|f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(t)|\,dt.$$

ÜE]

Andererseits sehe für $\varepsilon > 0$ $f_\varepsilon(t) := \frac{\overline{g(t)}}{|g(t)| + \varepsilon}$

FA 72

070807

Dann ist $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0[0,1]$, $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ und es gilt

$$|T_g f_\varepsilon| = \int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{|g(t)|+\varepsilon}\, dt \geq \int_0^1 \frac{|g(t)|^2 - \varepsilon^2}{|g(t)|+\varepsilon}\, dt$$

$$= \int_0^1 |g(t)|\, dt - \varepsilon .$$

Daher $\|T_g\| = \sup\limits_{\|f\|_\infty \leq 1} |T_g f| \geq \sup\limits_{\varepsilon > 0} |T_g f_\varepsilon| \geq \int_0^1 |g(t)|\, dt$.

(vii) Funktionale auf L^p: Sei $p \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dann definiert jedes $g \in L^q(I)$ ein stetiges Funktional auf $L^p(I)$, gemäß

$$\boxed{\begin{aligned} T_g : L^p(I) &\to \mathbb{K} \\ T_g f &:= \int_I g(t) f(t)\, dt \end{aligned}}$$

Tatsächlich folgt aus der Hölder-Ungleichung (Bem 1.35)

$$|T_g f| \leq \int_I |g(t) f(t)|\, dt \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

und somit $\|T_g\| \leq \|g\|_q$. Es gilt sogar die Gleichheit, denn für $1<p\le\infty$ setze $f(t) := \overline{g}(t)\,|g(t)|^{q-2}$ FA 73

bzw $f=0$ an den Nullstellen von g. Dann ist $f\in L^p$, denn

$$\|f\|_p = \left(\int |g(t)|^{p(q-1)}\,dt\right)^{1/p} \underset{p=\frac{q}{q-1}}{=} \|g\|_q^{q/p} \qquad (*)$$

und es gilt

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$q/p+1=q$

$$Tgf = \int |g(t)|^q\,dt = \|g\|_q^q = \|g\|_q^{q/p}\,\|g\|_q^{q-\frac{q}{p}} \underset{(*)}{=} \|f\|_p\,\|g\|_q .$$

Im Fall $p=1$, $q=\infty$ wähle zu $0<\varepsilon<\|g\|_\infty$ eine meßbare Menge $A\subseteq I$, $0<m(A)<\infty$ sodass $|g(x)|\ge\|g\|_\infty-\varepsilon$ (Δ) auf A. Setze

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{m(A)}\,|g(t)|^{-1}\,\overline{g(t)} & t\in A\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

Dann ist $f\in L^1$, $\|f\|_1=1$ da $\int|f| = \int_A \frac{1}{m(A)} = 1$ und

$$Tgf = \frac{1}{m(A)}\int_A |g| \ge \|g\|_\infty-\varepsilon .$$

Tatsächlich sind im Falle $p<\infty$ alle stetigen lin Funktionale von dieser Gestalt! (siehe §2.3)

(viii) <u>Differentialoperatoren</u>:

FA 79

z.B. $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$

Es gilt (vgl. auch 2.18)

$$\frac{d}{dx} : (\mathcal{C}^1[a,b], \| \|_\infty) \to (\mathcal{C}^0[a,b], \| \|_\infty)$$

unstetig ist. Versieht man jedoch $\mathcal{C}^1[a,b]$ mit der Norm aus 1.26 (iv), i.e., $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, dann ist $\frac{d}{dx}$ stetig; $\|f_n\| \to 0 \Rightarrow \|f_n'\|_\infty \to 0$ also $\|Tf_n\|_\infty \to 0$.

Allgemeiner gilt auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen: Jeder lin. partielle Differentialoperator der Ordnung k mit stetigen Koeffizienten

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

($k \in \mathbb{N}$, $a_\alpha \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$; für die Multiindexschreibweise siehe Forster 2, §7) ist stetiger Operator

$$(\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}), \| \|) \longrightarrow (\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \| \|_\infty)$$

wobei $\|f\| := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$.

FA75

(ix) Integraloperatoren:

Für $f \in \overset{=:E}{(\mathcal{C}^0[0,1], \|\,\|_\infty)}$ und $K \in \mathcal{C}^0([0,1]\times[0,1])$ definieren wir

$$\boxed{T_K f(x) := \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy.}$$

Dann gilt $T_K f$ ist stetig auf $[0,1]$, denn

$$|T_K f(x_1) - T_K f(x_2)| = \left| \int_0^1 (K(x_1,y) - K(x_2,y))\, f(y)\, dy \right|$$

$$\le \|f\|_\infty \underbrace{\sup |K(x_1,y) - K(x_2,y)|}_{< \varepsilon / \|f\|_\infty \text{ falls } |x_1 - x_2| < \delta}.$$

δ passend

da K glm. stetig.

Außerdem ist T_K stetig nach E, denn

$$\|T_K f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy \right| \le \|f\|_\infty \underbrace{\sup_x \int_0^1 |K(x,y)|\, dy}_{\le \|K\|_\infty}$$

also $\|T_K\| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dy \le \|K\|_\infty$

[(vi) $g(y) = K(x,y)$ für x fix]

T_K heißt Fredholmoperator mit Kern K.

Dieselbe Konstruktion funktioniert auch für

- $E = L^1$ nach C^0
- $E = L^p$ in sich
- $E = L^2$ in sich mit $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$

(die sog. Hilbert-Schmidt Operatoren)

Für Details siehe [W, p52. (m); bzw [VE]]
Auch unstetige Kerne können stetige Operatoren auf $C^0 \to C^0$ ergeben; siehe [W, p53 (n)].

Im Folgenden studieren wir den Raum $L(E,F)$ und beginnen mit einer einfachen Beobachtung

2.29 LEMMA (Submultiplikativität der Op-Norm)

Sei $T \in L(E,F)$, $S \in L(F,G)$ dann ist $S \circ T \in L(E,G)$ und es gilt

$$\boxed{\| ST \| \leq \|S\| \, \|T\|}$$

„$\circ$" wird oft weggelassen

Beweis: Die Linearität ist klar und die Stetigkeit folgt aus

$$\| S(Tx) \| \underset{2.25(ii)}{\leq} \|S\| \, \|Tx\| \underset{2.25(ii)}{\leq} \|S\| \, \|T\| \, \|x\|.$$

$\square$

FA 77

2.30 Beobachtung:

(i) i.A. gilt wirklich $\leq$ und nicht etwa $=$ in 2.29,

denn für $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ gilt $\|A\|=1=\|B\|$

und $AB=0$, also $\|AB\|=0$.

(ii) Wenn wir Folgen T_n in $L(E,F)$ betrachten so sind sorgfältig die beiden folgenden Konvergenzbegriffe zu unterscheiden:

$\|T_n - T\| \to 0$, genannt Normkonvergenz

$\|T_n x - Tx\| \to 0 \quad \forall x \in E$, genannt punktweise Konv.

Es gilt $\boxed{\text{Normkonv} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{pktw Konv.}}$, denn

$(\Rightarrow)$: $\forall x \in E: \|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\| \|x\|$ (2.25(ii))

$(\not\Leftarrow)$: Sei $E=\ell^1$, T_k der „Abschneideoperator", d.h.

$$x=(x_n)_n \xrightarrow{T_k} (x_1, x_2, \ldots x_k, 0, \ldots)$$

Dann gilt $T_k \to id$ pktw aber nicht in der Norm, denn $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $(T_k - id)e_{k+1} = -e_{k+1}$.

Die Vollständigkeit von $L(E,F)$ wird nur von der Vollständigkeit von F – unabhängig von E – bestimmt.

2.31 SATZ (Vollständigkeit von $L(E,F)$) FA78

Ist F ein (B)-Raum, dann auch $L(E,F)$

Beweis: Sei $(T_n)_n$ CF in $L(E,F)$. Für $x \in E$ gilt

$$\|T_n x - T_m x\| \overset{2.25(ii)}{\leq} \|T_n - T_m\| \, \|x\| \Rightarrow T_n x \text{ CF in } F$$

$$\overset{F \text{ vollst.}}{\Longrightarrow} \exists \lim T_n x =: Tx$$

Die so definierte Abbildung ist

- <u>linear</u>: $T(\lambda x + y) = \lim T_n(\lambda x + y) \overset{1.4(vii)}{=} \lambda \lim T_n x + \lim T_n y = \lambda Tx + Ty$
- <u>stetig</u>: $\big| \|T_n\| - \|T_m\| \big| \underset{1.3(ii)}{\leq} \|T_n - T_m\| \Rightarrow \|T_n\| \text{ CF in } \mathbb{R}$

Für $x \in E$, $\|x\| = 1$:

$$\|Tx\| = \|\lim T_n x\| \overset{1.4(vii)}{=} \lim \|T_n x\| \overset{2.25(ii)}{\leq} \lim \|T_n\| \, \|x\| \leq \lim \|T_n\|$$

also T stetig mit $\|T\| \leq \lim \|T_n\|$

Schließlich gilt: $\|T_n - T\| \to 0$, denn sei $\varepsilon > 0$, wähle

<u>$N(\varepsilon)$</u>: $\forall m,n \geq N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall m,n \geq N \ \forall \|x\| \leq 1 : \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon$$

$$\overset{m \to \infty}{\Longrightarrow} \forall n \geq N \ \forall \|x\| \leq 1 : \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : \|T_n - T\| \leq \varepsilon .$$

$\square$

2.32 Bem (Banachalgebren)

Ein wichtiger Spezialfall ist $L(E) := L(E,E)$ wo E ein (B)-Raum ist. Dieser Raum ist mit der Op-Norm ein (B)-Raum und eine Algebra $(+, \cdot, \circ)$ m. d. Eigenschaft (nach 2.28)

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\| .$$

So eine Struktur nennt man (B)-Algebra.

Zu 2.31 gilt auch die Umkehrung:

2.33 Bem (Vollständigkeit von F via der von $L(E,F)$)
Ist $L(E,F)$ vollständig und $\exists f$ ein stetiges lin Funktional of E mit $f \neq 0$ (so ein f existiert immer - nach dem Satz von Hahn-Banach - Kap [4]) dann ist F vollst.

Beweis: Für $y \in F$ setze $T_y x := f(x) y$. $T_y : E \to F$ ist linear & stetig, denn

$$\|T_y x\| = \|f(x) y\| = |f(x)| \, \|y\| \leq \|f\| \, \|x\| \, \|y\|$$
$$\Rightarrow \|T_y\| \leq \|f\| \, \|y\| \quad (*)$$

Sei nun $f(x_0) \neq 0$, $(y_n)_n$ CF in $F \overset{(*)}{\Rightarrow} (T_{y_n})_n$ CF in $L(E,F)$
$\Rightarrow \exists T := \lim T_{y_n} \in L(E,F) \Rightarrow Tx_0 = \lim T_{y_n} x_0 = f(x_0) \lim y_n$
$\Rightarrow \frac{1}{f(x_0)} T x_0 = \lim y_n$. $\square$

Ein dicht definierter stetiger Operator in einem (B)-Raum läßt sich eindeutig fortsetzen, genauer

FA 80
070809

2.34 Prop (Fortsetzung dicht definierter stetiger Ops)
Sei $D \subseteq E$ dichter TR des NVRs E, F ein (B)-Raum und $T \in L(D, F)$. Dann existiert genau eine stetige Fortsetzung $\hat{T}$ von T (i.e. $\hat{T}|_D = T$) in $L(E, F)$. Außerdem gilt $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

Beweis: Nach 2.20 ist T sogar glm. stetig. Daher greift der entsprechende Standardsatz der Topologie, der die eindeutige Fortsetzbarkeit glm. stetiger Abb von MR in vollst. MR auf die Vervollständigung garantiert.
[Topologie]

Zur Gleichheit der Norm bemerke zunächst, dass $\|\hat{T}\| \geq \|T\|$, denn $\forall x \in D: \|\hat{T}x\| = \|Tx\|$. Umgekehrt sei $x \in \partial E \cap D^c$, $x_n \to x$, $(x_n)_n \in D$, dann

$$\|\hat{T}x\| = \|\hat{T} \lim x_n\| = \|\lim \hat{T}x_n\| = \|\lim Tx_n\| = \lim \|Tx_n\|$$
$$\leq \|T\| \lim \|x_n\| \leq \|T\| \|x\|.$$

$\square$

(Lücke in [W, II.1.5] ! - dort wird die Normgleichg nicht bewiesen...)

Wir beschäftigen uns als Nächstes mit den „Isomorphismen" NVR.

2.35 DEF (Isomorphismen & Isometrien)

Sei $T \in L(E,F)$

(i) T heißt <u>Isomorphismus</u>, falls T bijektiv und T^{-1} stetig ist.

(ii) T heißt <u>Isometrie</u>, falls $\forall x \in E: \|Tx\| = \|x\|$

(iii) E und F heißen <u>(isometrisch) isomorph</u>, falls es einen (isometrischen) Isomorphismus $T: E \to F$ gibt; wir schreiben $E \cong F$ (bzw. $E \equiv F$).

2.36 = $\emptyset$

2.37 BEOBACHTUNGEN (zu Isos & Isometrien)

(i) Isometrien sind injektiv.

(ii) Isomorphismen sind lineare, surj Abb, sodass gilt:

$$\exists m, M > 0 \ \forall x \in E \ \boxed{m\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\|} \quad (*)$$

(iii) In 2.35 (i) muss die Stetigkeit der Inversen explizit gefordert werden – anders als die Linearität der Inversen ist sie nämlich nicht „gratis"!

$T: \ell^\infty \to \ell^\infty$

$(x_n)_n \mapsto (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ ist injektiv, $\|T\| = 1$.

T ist zwar nicht surjektiv (etwa $(x_n)_n = (1,1,\dots) \notin im(T)$) aber alle $e_n \in im(T)$. Nun gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} e_n \to 0$ in $im(T)$ aber $T^{-1}(\frac{1}{\sqrt{n}} e_n) = \sqrt{n}\, e_n$ ist unbeschränkt. ↯ s. p. 81A

8. VO 4.5.23

9.VO, 8.5.23

Tatsächlich charakterisiert die linke Hälfte von (*) Existenz und Stetigkeit der Inversen, genauer

FA 82

2.38 Prop (Charakterisierung der Invertierbarkeit in $L(E,F)$)

$T \in L(E,F)$ besitzt genau dann eine stetige Inverse auf $\mathrm{im}(T)$ falls

$$\exists m>0: \ m\|x\| \leq \|Tx\| \quad \forall x \in E \qquad (*)$$

Beweis: ($\Rightarrow$) folgt sofort aus 2.37 (ii).

($\Leftarrow$): Aus (*) folgt sofort die Injektivität, also besitzt T eine Inverse T^{-1} auf $\mathrm{im}(T)$.

Für $y = Tx \in \mathrm{im}(T)$ gilt wegen (*): $m\|T^{-1}y\| \leq \|y\|$ also $\|T^{-1}y\| \leq 1/m \|y\|$ also ist T^{-1} beschränkt. $\square$

2.39 Bsp (Ein konkreter Iso) Es gilt $\boxed{c_0 \cong c.}$

Sei $x = (x_n)_n \in c$ mit $\bar{x} := \lim x_n$; wir definieren

$$T: \ x = (x_n) \longmapsto y = (y_n) := (\bar{x}, x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots)$$

Dann ist $Tx \in c_0$, denn $\lim Tx = \lim x_n - \bar{x} = 0$ und T ist stetig, denn

$$\|Tx\|_\infty = \sup_k |x_k - \bar{x}| \leq 2\|x\|_\infty.$$

∀ (Ergänzung zu 2.37) FA 81 A

2.37 BEM (zu Isos & Isometrien)

(iv) In §4.4. werden wir starke Sätze beweisen, die unter sehr allgemeinen Bedingungen die Stetigkeit der Inversen von bijektiven $T \in L(E,F)$ garantieren. Dabei wird die Vollständigkeit der beteiligten Räume eine entscheidende Rolle spielen

Umgekehrt sei $y=(y_n)_n \in c_0$; definiere

$$S: y=(y_n)_n \longmapsto x=(x_n)=(y_2+y_1,\, y_3+y_1, \dots, y_{k+1}+y_1, \dots).$$

Dann ist $Sy \in c$, denn $\lim y_n+y_1 = 0+y_1$ und S ist stetig, denn

$$\|Sy\|_\infty = \sup_k |y_{k+1}+y_1| \le 2\|y\|_\infty$$

Schließlich gilt

$$T\circ S = id_{c_0}, \text{ denn } y \stackrel{S}{\longmapsto} \underbrace{(y_2+y_1, y_3+y_1, \dots)}_{\lim(\,)=y_1} \stackrel{T}{\longmapsto} (y_1, y_2, \dots)$$

und

$$S\circ T = id_c, \text{ denn } x \stackrel{T}{\longmapsto} (\bar{x}, x_1-\bar{x}, \dots) \stackrel{S}{\longmapsto} (x_1, x_2, \dots).$$

Eine Möglichkeit in Spezialfällen die Inverse eines stetigen Ops zu berechnen liefert folgende Anwendung der geom. Reihe

2.40 SATZ (Neumann-Reihe①) Sei E NVR und $T\in L(E)$. Konvergiert $\sum_{n=0}^\infty T^n$ in $L(E)$ so ist $Id-T$ invertierbar mit

$$\boxed{(Id-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n.}$$

Speziell ist das der Fall falls $\|T\|<1$ und E ein (B)-Raum ist. Dann gilt außerdem

$$\boxed{\|(Id-T)^{-1}\| \le (1-\|T\|)^{-1}.}$$

① nicht von Neumann vgl. [W, p 88]

Beweis: Setze $S_m := \sum_{n=0}^{m} T^n$. Dann gilt (Teleskopsumme!)

FA 84

$$(Id - T) S_m = Id - T^{m+1} = S_m (Id - T) \quad (*)$$

Wegen 1.4 (viii) gilt $T^n \to 0$ und daher

$$Id = \lim_{m \to \infty} (Id - T^{m+1}) \overset{(*)}{=} \lim (Id - T) S_m = (Id - T) \lim S_m,$$
$$Id = \;.\;.\;.\;.\;. \qquad = \lim S_m (Id - T)$$

$$\Rightarrow \underline{(Id - T)^{-1}} = \lim S_m = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} T^n}$$

Für $\|T\| < 1 \Rightarrow \sum \|T^n\| \leq \sum \|T\|^n < \infty$, also $\sum T^n$ abs. konv. $\overset{1.7+2.31}{\Longrightarrow} \sum T^n$ konvergent.

Die Normabschätzung erhalten wir aus

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} T^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = 1/(1 - \|T\|).$$

$\square$

Zum Schluß des Kapitels besprechen wir kurz Dualräume NVR.

§2.3 DUALRÄUME NVR

FA 85

[20071104]

2.41 DEF (Top. Dualraum) Sei E NVR über $\mathbb{K}$. Der topologische Dualraum E' von E ist definiert als

$$E' = L(E, \mathbb{K}) = \{ f : E \to \mathbb{K} \text{ linear \& stetig} \}$$

↑ beschr.

2.41A BEOBACHTUNG (zum top Dual)

(i) Wegen 2.31 gilt: E' ist immer ein (B)-Raum – unabhängig von der Vollständigkeit des NVR E – und zwar mit

$$\| f \| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

(ii) Klarerweise gilt $E' \subseteq E^* := \{ f : E \to \mathbb{K} \mid \text{linear} \}$

... der algebraische Dualraum (vgl. lin Alg)

(iii) Ist $\dim E < \infty$, dann folgt aus 2.28(i) $\boxed{E' = E^*}$

(iv) Ist $\dim E = \infty$, dann ist i.A. $\boxed{E' \subsetneq E^*}$

(vgl. etwa 2.28(v), (vi))

(v) Dass es trotzdem immer „viele" stetige lineare Funktionale gibt werden wir in Kap. 4 sehen (Satz v. Hahn Banach).

Im Folgenden betrachten wir konkrete Darstellungen der Dualräume (einiger) unserer Beispielräume.

2.42 THM (Dualräume der Folgenräume)

(i) Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann ist die Abb

$$T : \ell^q \to (\ell^p)'$$
$$x \longmapsto Tx \,;\; Tx(y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

ein isometrischer Isomorphismus.

(ii) Dieselbe Abbildungsvorschrift ergibt einen isometrischen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(c_0)'$

2.43 BEM (Dualräume der ℓ^p-Räume)

(i) 2.42 (i) sagt also $\boxed{(\ell^p)' \cong \ell^{p'}}$ (mit p', dem zu p konjugierten Index) für $1 \leq p < \infty$.

2.42 (ii) besagt $\boxed{c_0' \cong \ell^1}$

(ii) WARNUNG: 2.62(i) ist falsch für $p=\infty$! FA 87

In Kap. 4 werden wir sehen, dass $(\ell^\infty)' \not\cong \ell^1$ gilt.

Beweis von 2.62:

(i) Zunächst gilt wegen der Hölder-Ungl.

$$|Tx(y)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leq \|x\|_q \|y\|_p \qquad (*)$$

$$\Rightarrow Tx(y) \in \mathbb{K}$$

Die Linearität von Tx ist offensichtlich $\Rightarrow Tx \in (\ell^p)^*$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} Tx \in (\ell^p)'$ mit $\|Tx\| \leq \|x\|_q$ $\qquad (**)$

Die Linearität von T ist ebenso offensichtlich.

Außerdem ist T injektiv, denn

$Tx = 0 \Rightarrow Tx(y) = 0 \ \forall y \Rightarrow 0 = Tx(e_j) = x_j \ \forall j$

$\Rightarrow x = 0$

Bleibt zz.: $\boxed{T \text{ surjektiv und } \|Tx\| \geq \|x\|_q}$

Standardeinheitsvektor

Sei dazu $y' \in (\ell^p)'$. Wir definieren $x_n := y'(e_n)$, $x := (x_n)_n$ und zeigen $\boxed{x \in \ell^q,\ Tx = y',\ \|x\|_q \leq \|y'\|}$

Sei zunächst $1 < p < \infty$:

FA 88

Wir definieren $z_n := \begin{cases} |x_n|^q / x_n & x_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$p<\infty$!

Nun gilt $\forall N \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q} \Rightarrow q/p = q-1$

$$\sum_{n=1}^{N} |z_n|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_n|^{p(q-1)} = \sum_{i=1}^{N} |x_n|^q \qquad (\Delta)$$

und

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{N} x_n z_n = \sum_{n=1}^{N} z_n\, y'(e_n) \overset{y'\in(\ell^p)'}{=} y'\Big(\sum_{n=1}^{N} z_n e_n\Big)$$

$$\overset{y'\in(\ell^p)'}{\leq} \|y'\| \Big(\sum_{n=1}^{N} |z_n|^p\Big)^{1/p} \overset{(\Delta)}{=} \|y'\| \Big(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\Big)^{1/p}$$

$1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$

$$\Longrightarrow \boxed{\Big(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q\Big)^{1/q} \leq \|y'\|} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow x \in \ell^q$ und $\|x\|_q \leq \|y'\|$.

Schließlich gilt $Tx(e_n) = x_n = y'(e_n)$ $\forall n$; da span$\{e_n\}$ dicht in ℓ^p ($p<\infty$!; 2.14(i)) $\Rightarrow Tx = y'$.

Der Fall $p=1$ ist leichter, denn

$$|x_n| = |y'(e_n)| \leq \|y'\|\,\|e_n\|_1 = \|y'\| \quad \forall n$$

$\Longrightarrow x \in \ell^\infty$, $\|x\|_\infty \leq \|y'\|$; Rest analog.

(ii) Analog zu Fall $p=1$ in (i) (siehe [UE]). $\square$

2.44 BEM ($(\ell^p(n))'$)

Der obige Beweis funktioniert offensichtlich auch für $\ell^p(n)$, also $\ell^p(n)' = \ell^{p'}(n)$. Hier gilt das sogar für $1 \le p \le \infty$! [UE]

2.45 THM (Riesz'er Darstellungssatz für L^p)

Sei $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann ist die Abb

$$T : L^q \to (L^p)'$$
$$g \mapsto T_g \,;\; T_g f := \int_a^b g(t) f(t)\, dt$$

ein isometrischer Isomorphismus.

2.46 BEM (Zum Rieszschen Darstellungssatz)

(i) Analog zu den Folgenräumen gilt also für $1 \le p < \infty$

$$\boxed{(L^p)' \cong L^{p'}}$$

(ii) Warnung: Ebenso analog gilt $(L^\infty)' \not\cong L^1$

(iii) Thm 2.45 gilt für σ-endliche Maßräume, insbesondere für alle $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue Maß ([W.II.2.4]).

Zum Beweis von 2.45:

FA 90

Die leichte Richtung, d.h. $L^q \subseteq (L^p)'$ haben wir schon in 2.28 (vii) bewiesen. Die andere Richtung benötigt einiges an Maßtheorie (siehe [W. II.2.4] oder [Weidmann 2.16]).

$\square$

2.47 Bem (Der Hilbertraum-Fall)

Sowohl 2.42 (i) als auch 2.45 sagen im (H)-Raum-Fall, dass die Räume selbstdual sind, d.h.

$$(\ell^2)' \cong \ell^2, \quad (L^2)' \cong L^2 .$$

Das ist kein Zufall sondern gilt allgemein für (H)-Räume. Darauf werden wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

[3] HILBERTRÄUME

In diesem Kapitel wenden wir uns den speziellsten der bisher definierten Räumen, den (H)-Räumen, zu. Speziell studieren wir ihre Struktur (Ops auf (H)-Räumen rücken erst in Kap. 4 in den Vordergrund) und werden an mehreren Stellen erkennen, welch großen Vorteil die Existenz eines SP (gegenüber den (B)-Räumen) bietet. Insbesondere kann der Begriff der Orthogonalität vielfach ausgenutzt werden. Genauer befassen wir uns in §3.1. mit Orthogonalprojektionen, in §3.2 mit Orthonormalbasen und im §3.3 mit den Dualräumen von (H)-Räumen; insbesondere mit dem Darstellungssatz von Riesz-Fréchet (vgl. auch 2.47) und adjungierten Ops.

§3.1 ORTHOGONALPROJEKTIONEN

FA 92

07.09.10

3.1. WH aus der Lin. Alg (Projektionen) (vgl. [Lin. Alg.])

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR (nicht notwendigerweise endl. dim.)

(i) $P: V \to V$ linear heißt Projektion von V $:\Longleftrightarrow P^2 := P \circ P = P$

Mit P ist auch $(\mathrm{Id} - P)$ Projektion und es gilt
$\operatorname{im} P = \ker(\mathrm{Id} - P)$ sowie $\operatorname{im}(\mathrm{Id} - P) = \ker P$

(ii) P Projektion auf $V \Longrightarrow V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$

Lin. Alg

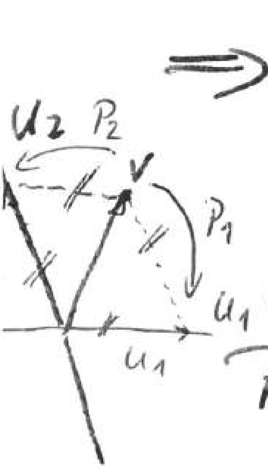
$\forall v \in V\ \exists!$ Darstellung $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in \ker P$, $v_2 \in \operatorname{im} P$ $\Longleftrightarrow$ (innere) direkte Summe der TR $\ker P, \operatorname{im} P$; d.h. $V = \ker P + \operatorname{im} P$ und $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{0\}$

(iii) Sei umgekehrt U_1 TR von V (gilt auch für V ∞-dim!)

$\overset{[LA\,II, §4, Satz\,3]}{\Longrightarrow}$ $\exists$ komplementärer TR, d.h. $\exists U_2$ TR mit

$$V = U_1 \oplus U_2$$

$\Longrightarrow \exists$ eindeutig bestimmte Projektionen P_1, P_2
mit $\operatorname{im} P_1 = U_1 = \ker P_2$; $\operatorname{im} P_2 = U_2 = \ker P_1$



konkret gegeben durch $v = u_1 + u_2$ (eindeutige Darst. in $\oplus$)

$P_i(v) = u_i \quad (i = 1, 2)$

Wir nennen $P_{1,2}$ Projektion auf $U_{1,2}$ parallel zu $U_{2,1}$

FA 93

3.2 MOTIVATION (Projektionen in NVR)

In NVR gilt unser Interesse natürlich stetigen Proj.
Außerdem wollen wir wissen, ob V nicht nur algebraisch (wie oben) als direkte Summe von ker P und im P geschrieben werden kann, sondern auch topologisch, d.h. ob für $v^{(n)} = u_1^{(n)} + u_2^{(n)}$ Konvergenz von $v^{(n)}$ äquivalent zu Konvergenz von $u_1^{(n)}$ und $u_2^{(n)}$ ist. Dabei wird die direkte Summe zweier NVR $U_1 \oplus U_2$ mittels einer der (äquiv!) Normen $\|u_1+u_2\|_p := (\|u_1\|^p + \|u_2\|^p)^{1/p}$ bzw. $\|u_1+u_2\|_\infty := \max(\|u_1\|, \|u_2\|)$ ausgestattet (Details siehe [W, Satz I.3.3]).

[Wir werden sehen, dass 3.1.(ii) in NVR leicht zu übertragen ist, aber
dass 3.1(iii) selbst in (B)-Räumen nicht funktioniert.
Alles wird aber wieder gut, wenn wir (H)-Räume betrachten...]

9. VO
8.5.23

10. VO
11.5.23

3.3 DEF (Projektionen in NVR)

Sei E NVR. $P \in L(E,E)$ heißt Projektion von E, falls $P^2 = P$ gilt.

3.4. PROP (Projektionen in NVR)

Sei P Proj von E. Dann gilt

(i) Entweder $P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$

(ii) $\ker P$ und $\operatorname{im} P$ sind abgeschlossene TR

(iii) $E = \ker P \oplus \operatorname{im} P$ (topologisch!)

FA 94

Beweis: (i) $\|P\| = \|P^2\| \overset{2.28}{\leq} \|P\|^2 \Rightarrow P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$

(ii) $\ker P = P^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen, da P stetig

detto für $\operatorname{im} P = \ker(\mathrm{Id}_E - P)$. [TR klar aus Lin. Alg.]

(iii) Die algebraische Gültigkeit ist gerade 3.1(iii). Die eindeutige Darst von $u \in E$ in der direkten Summe ist gerade $u = Pu + (\mathrm{Id}_E - P)u$. Da P, $\mathrm{Id}_E - P$ stetig gilt $u^{(n)} \to 0 \Leftrightarrow Pu^{(n)} \to 0$ und $(\mathrm{Id}_E - P)u^{(n)} \to 0$. □

3.5 BSP (Projektion von $L^p(\mathbb{R})$). Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\chi_{[0,1]}$ die char. Fkt von $[0,1]$.

$P: f \mapsto \chi_{[0,1]} f$ ist stetige Projektion von $L^p(\mathbb{R})$ mit $\|P\| = 1$ [$\|Pf\|_{L^p} \leq \|\chi\|_{L^\infty} \|f\|_{L^p} \Rightarrow \|P\| \leq 1$ & 3.4(i) $\|P\| \geq 1$]

Außerdem gilt: $\operatorname{im} P \cong L^p[0,1]$.

3.6 BEM ("Umkehrung" in (B)-Räumen)

In (B)-Räumen geht die erste Folgerung in 3.1.(iii) schief, genauer: In einem (B)-Raum hat nicht jeder abg TR einen komplementären TR!

Ein Gegenbsp. ist c_0 in ℓ^∞ (Philips 1940; Beweis siehe [W, Satz IV.6.5])

FA 95

Man spricht vom „complementary subspace problem":
Gegeben $U \overset{TR}{\subseteq} E$, E (B)-Raum, U abg: $\boxed{?}$ $\exists V \overset{TR}{\subseteq} E$ mit $E = U \oplus V$

Resultate sind etwa:

- Jeder ∞-dim (B)-Raum, der nicht zu einem Hilbertraum isomorph ist enthält einen nicht komplementierten TR [Lindenstrauss & Tzafriri, 1971]
- $\exists$ (B)-Raum ohne nicht-trivialem komplementierten TR [Gowers & Maurey, 1993]

Bevor wir uns mit (H)-Räumen befassen und zeigen, dass dort jeder abg TR einen abg kompl. TR besitzt bemerken wir, dass der Rest von 3.1.(iii) in (B)-Räumen funktioniert

<u>3.7 Satz</u> (Projektionen in (B)-Räumen). Sei E ein (B)-Raum, $U \subseteq E$ ein abg. TR und es existiere ein abg komplementärer $\overset{V}{TR}$ zu U im algebraischen Sinn. Dann gilt

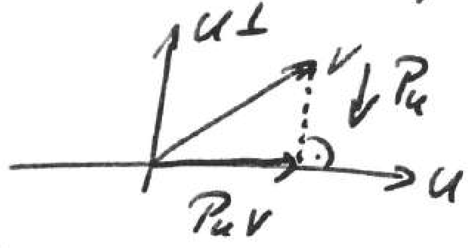
(i) $E \cong U \oplus V$ topologisch

(ii) Es existiert eine stetige Projektion von E auf U (d.h. $\operatorname{im} P = U$)

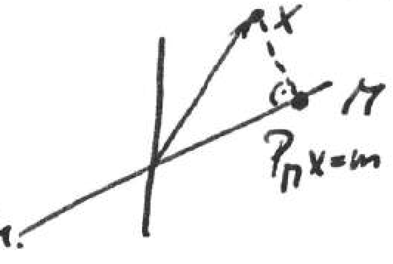
Beweis: siehe [W, Satz IV.6.3]; benötigt Satz v.d. offenen Abb. $\square$
resp. [UE, Kap 4]

FA 96

3.8 Motivation (Orthogonalprojektion) Sei V endl. dim. Eukl. VR, $U \subseteq V$ TR. Die Orthogonalprojektion P_U auf U ist die Projektion auf U parallel zu $U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$.
Es gilt dann
$$V = \operatorname{Im} P_U \oplus \ker P_U = U \oplus U^\perp.$$



Wir wollen nun im (H)-Raum H für jeden abg. TR M zeigen, dass $H = M \oplus M^\perp$ und $M^{\perp\perp} = M$. (Für nicht abg. M ist beides falsch!) Dazu konstruieren wir unabhängig von $\oplus$ die Orthogonalprojektion P_M auf M um daraus die Zerlegung zu folgern. Idee ist es dabei $P_M x$ als das zu x nächstgelegene $m \in M$ zu definieren...



Wir beginnen mit einer formalen Def und ihren unmittelbaren Konsequenzen.

3.9 DEF (Orthogonalität). Sei E ein Prähilbertraum.

(i) $x, y \in E$ heißen orthogonal, $x \perp y :\Leftrightarrow \langle x | y \rangle = 0$

(ii) $A, B \subseteq E$ heißen orthogonal, $A \perp B :\Leftrightarrow \langle a | b \rangle = 0 \ \forall a \in A \ \forall b \in B$

(iii) Für $A \subseteq E$ definieren wir das orthogonale Komplement via
$$A^\perp := \{x \in E \mid \langle x | a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}.$$

3.10 BEOBACHTUNG (Einfache Konsequenzen von 3.9) FA 97

(i) Pythagoras: $x \perp y \Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

(ii) $A^\perp$ ist immer abg. TR von E ($A \subseteq E$ beliebige TM!)

(iii) $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$

(iv) $A \subseteq B \Rightarrow A^\perp \supseteq B^\perp$

(v) $A \subseteq A^{\perp\perp}$

(vi) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp} = \bar{A}^\perp = \overline{A^\perp}$

(vii) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

(viii) $A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp = (\overline{\operatorname{span} A})^\perp$

Beweis (i) rechne l. S. aus

(ii) TR wegen (S1), abg, denn sei $x_n \to x$ in E, $x_n \in A^\perp \; \forall n$
$a \in A \Rightarrow \langle x | a \rangle = \lim \langle x_n | a \rangle = 0 \Rightarrow x \in A^\perp$

(iii) klar bzw $x \in E^\perp \Rightarrow \langle x | y \rangle = 0 \; \forall y \in E \Rightarrow \langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

(iv) [UE] $x \in B^\perp \Leftrightarrow \langle x | b \rangle = 0 \; \forall b \in B \overset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} \langle x | a \rangle = 0 \; \forall a \in A \Leftrightarrow x \in A^\perp$

(v) [UE] $a \in A$, $x \in A^\perp \Rightarrow \langle a | x \rangle = 0 \Rightarrow a \in A^{\perp\perp}$

(vi) $A \overset{(v)}{\subseteq} A^{\perp\perp} \overset{(iv)}{\Longrightarrow} A^\perp \supseteq A^{\perp\perp\perp}$; $A^\perp \overset{(v)}{\subseteq} (A^\perp)^{\perp\perp}$

$A \subseteq \bar{A} \overset{(iv)}{\Rightarrow} \bar{A}^\perp \subseteq A^\perp$; $x \in A^\perp$; $a \in \bar{A} \Rightarrow a = \lim a_n$, $a_n \in A$
$\Rightarrow \langle x | a \rangle = \lim \langle x | a_n \rangle = 0 \Rightarrow x \in \bar{A}^\perp$

klar wegen (ii)

(vii) [UE] $x \in (A \cup B)^\perp \Leftrightarrow \langle x | v \rangle = 0 \; \forall v \in A \cup B \Leftrightarrow$
$\langle x | a \rangle = 0 \; \forall a \in A \wedge \langle x | b \rangle = 0 \; \forall b \in B \Leftrightarrow x \in A^\perp \cap B^\perp$

(viii): (iv) bzw (vi) und $x \in A^{\perp}$, $a_i \in A$

$$\Rightarrow \langle x \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \rangle = \sum \bar{\alpha}_i \langle x \mid a_i \rangle = 0 \Rightarrow x \in (\operatorname{span} A)^{\perp}$$ ∎

FA 98

3.11 Satz (Approximationssatz) H (H)-Raum, $A \subseteq H$ abg. konvex

(i) Es existiert genau ein $x_0 \in A$ mit minimaler Norm, i.e.

genannt Proximum

$$\exists!\, x_0 \in A : \|x_0\| = \min_{x \in A} \|x\|$$

(ii) Für jedes $x \in H$ existiert genau eine Bestapproximation $x_0 \in A$, i.e.

$$\forall x \in H \ \exists!\, x_0 \in A : \|x - x_0\| = \min_{y \in A} \|y - x\| .$$

Beweis: (i) Existenz: Falls $0 \in A \Rightarrow x_0 := 0$; sonst

$$0 \notin A \Rightarrow \exists (x_n) \in A : \|x_n\| \to d := \inf_{x \in A} \|x\| \neq 0 \ (?) ; \text{ dann}$$

$$0 \leq \|x_n - x_m\|^2 \overset{(\square)}{=} 2\big(\underbrace{\|x_n\|^2}_{\to d} + \underbrace{\|x_m\|^2}_{\to d}\big) - 4 \underbrace{\|\underbrace{\tfrac{x_n + x_m}{2}}_{\in A \ [\text{konvex!}]}\|^2}_{\geq 4d^2}$$

Nun wähle für $\varepsilon > 0$ beliebig ein

$N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N : \|x_n\| < \sqrt{d^2 + \varepsilon^2/4}$

$$\Rightarrow \forall m,n \geq N \quad \|x_n - x_m\|^2 < 2\left(d^2 + \tfrac{\varepsilon^2}{4} + d^2 + \tfrac{\varepsilon^2}{4}\right) - 4d^2 = \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ CF} \overset{(H)-R}{\Longrightarrow} \exists\, x_0 = \lim x_n \overset{A \text{ abg}}{\Longrightarrow} x_0 \in A \text{ und}$$

$$\|x_0\| = \lim \|x_n\| = d .$$

Eindeutigkeit: Sei $x_0' \in A$, $\|x_0'\| = d \Rightarrow$

$$\|x_0 - x_0'\|^2 \overset{(\square)}{=} 2(\|x_0\|^2 + \|x_0'\|^2) - 4 \left\|\frac{x_0 + x_0'}{2}\right\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0$$

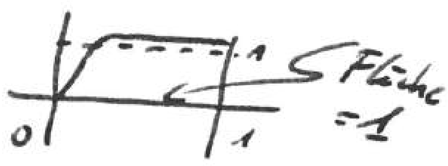
$\Rightarrow x_0 = x_0'$.

FA 99

(ii) Wende (i) auf $x-A$ an (ist abg + konvex!) $\square$

3.12 Bem (Zum Approximationssatz)

(i) In (B)-Räumen ist 3.11 FALSCH: Es muß gar kein x_0 existieren ($A=\{f \mid f(0)=0, \int_0^1 f = 1\} \subseteq C^0[0,1]$)



oder es können ∞-viele x_0 existieren (Verbindungsstrecke $(0,1)$, $(1,0)$ in $(\mathbb{R}^2, \|\;\|_1)$

jedes x hat $\|x\|_1 = 1$)

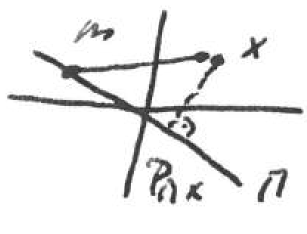
(ii) 3.11 ist eine Verschärfung des Riesz-Lemmas 1.10. Dieses muß in nicht (H)-Räumen oft als Ersatz für 3.11 herhalten – dementsprechend schwächer sind dort die Resultate.

(iii) Mittels 3.11 können wir nun die Orthogonalprojektion auf abg TR definieren – und zwar durch die Festlegung $P_M x =$ „$m \in M$ mit min. Abstand zu x"; formal

3.13 Def (Orthogonalprojektion)

$M \subseteq H$ abg TR eines (H)-Raums. Die Orthogonalproj in H auf M $P_M : H \to M \subseteq H$ ist definiert durch

$$\|P_M x - x\| = \min_{m \in M} \|m - x\|.$$

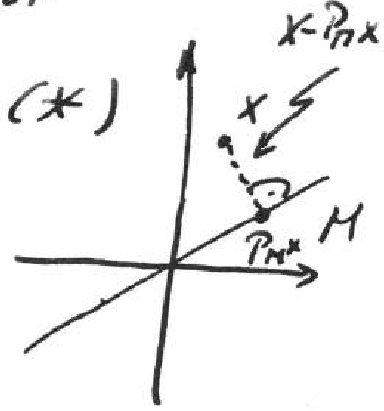


3.14 Lemma (Technische Kern von P_M)

FA 100
07.09.11

$P_M x$ ist das eindeutig bestimmte Element in M, das $(x-P_M x)\perp M$ erfüllt, d.h. $\forall m\in M$ gilt

$$\langle x-P_M x \,|\, m\rangle = 0 \qquad (*)$$



Beweis: Zeigen zunächst, dass P_M (*) erfüllt.

Sei $0\neq m\in M$; definiere

alles klar

$$\varrho_m(t) := \|x - \underbrace{P_M x}_{\in M} + tm\|^2 \qquad (t\in\mathbb{R})$$

$$= \|x-P_M x\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-P_M x|m\rangle + t^2\|m\|^2$$

Wegen 3.13 ist $\varrho_m(t)$ minimal genau für $t=0$.

$$\Rightarrow 0=\varrho_m'(0) = 2\,\mathrm{Re}\langle x-P_M x|m\rangle.$$

Analog für ϱ_{-im} $\Rightarrow$ $0=\varrho_{-im}'(0)=2\,\mathrm{Re}\langle x-P_M x|-im\rangle$
$= 2\,\mathrm{Im}\langle x-P_M x|m\rangle$

$\Rightarrow$ (*).

Eindeutigkeit: $y\in M$ erfülle (*) $\Rightarrow \forall m\in M$:

$$\|x-m\|^2 = \|\underbrace{x-y}_{\in M^\perp!} + \underbrace{y-m}_{\in M}\|^2 \overset{3.10(i)}{=} \|x-y\|^2+\|y-m\|^2$$
$$\geq \|x-y\|^2$$

$$\Rightarrow \min_{m\in M}\|x-m\| = \|y-x\| \overset{3.13}{\Rightarrow} y = P_M x$$

$\square$

3.15 Satz (Eigenschaften von P_M) M abg TR von H

FA101

(i) $P_M^2 = P_M$

(ii) P_M ist linear

(iii) P_M ist beschränkt; genauer $\|P_M\| \le 1$, $\|P_M\| = 1$ falls $M \neq \{0\}$

(iv) $\operatorname{im} P_M = M$, $\ker P_M = M^\perp$

(Bemerke, dass (i)–(iii) besagt, dass P_M Projektion im Sinne von 3.2 ist.)

Beweis: (i) $P_M x \in M$ nach Def $\Rightarrow P_M P_M x = P_M x$

(ii) $m \in M \Rightarrow$

$$\langle x+y - \underbrace{P_M x - P_M y}_{\in M} | m \rangle = \langle x - P_M x | m \rangle + \langle y - P_M y | m \rangle$$
$$= 0 + 0 \text{ (wegen 3.14)}$$

$$\overset{3.14}{\Longrightarrow} P_M(x+y) = P_M x + P_M y$$

detto für $\lambda P_M x = P_M \lambda x$

(iii) $$\|x\|^2 = \|\underbrace{P_M x}_{\in M} + \underbrace{(x - P_M x)}_{\in M^\perp}\|^2 \underset{3.10(i)}{=} \|P_M x\|^2 + \|x - P_M x\|^2 \ge \|P_M x\|^2$$

$\Rightarrow \|P_M\| \le 1$

Falls $0 \neq m \in M \Rightarrow P_M m = m \Rightarrow \|P_M\| \ge 1$

(iv) $\operatorname{im} P_M \subseteq M$ per def; $M \subseteq \operatorname{im} P_M$, da $P_M m = m \ \forall m \in M$

$x \in \ker P_M \overset{3.14}{\Longrightarrow} x - P_M x = x - 0 \perp M \Rightarrow x \in M^\perp$

$x \in M^\perp \Rightarrow 0$ erfüllt $x - 0 \perp M \overset{3.14}{\Longrightarrow} P_M x = 0 \Rightarrow x \in \ker P_M$.

10.V0; 11.5.23

$\square$

Das zentrale Resultat dieses Paragraphen ist nun.

FA 102

(Ziel aus 3.8 erreicht!)

3.16 Thm (Projektionssatz)

Sei H ein (H)-Raum und M abg. TR von H. Dann gilt

M.10
15.1.23

(i) $H = M \oplus M^{\perp}$ mit Orthogonalprojektion P_M, d.h.

$$\forall x \in H\ \exists!\ \text{Darstellung } x = m + y \quad m \in M,\ y \in M^{\perp}$$

(ii) $M^{\perp\perp} = M$

Beweis: (i) 3.15(i)–(iii) $\Rightarrow$ P_M ist Projektion in H

3.4(iii) $\Rightarrow$ $H = \ker P_M \oplus \operatorname{im} P_M \overset{3.15(iv)}{=} M^{\perp} \oplus M$.

(ii) 3.10(v) $\Rightarrow$ $M \subseteq M^{\perp\perp}$; wir zeigen $M^{\perp\perp} \subseteq M$

$x \in M^{\perp\perp} \Rightarrow$

$$\langle x - P_M x \mid x - P_M x \rangle = \langle \underbrace{x}_{\in M^{\perp\perp}} \mid \underbrace{x - P_M x}_{\in M^{\perp}\,(3.14)} \rangle - \langle \underbrace{P_M x}_{\in M} \mid \underbrace{x - P_M x}_{\in M^{\perp}\,(3.14)} \rangle$$

$$= 0$$

$\Rightarrow x - P_M x = 0 \Rightarrow P_M x = x \Rightarrow x \in M.$ $\square$

3.17 Bem (Abgeschlossenheit ist essentiell in 3.16)

(i) Ist falsch falls z.B. $M \neq H$ dichter Teilraum ist; $\overset{3.10(viii)}{\Longrightarrow}$ $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$ (3.10(iii))

Aber es kann nicht jedes $\underset{\in H}{x} = x + 0$ mit $x \in M$ sein!

TA 102 A

3.16 A BSP (Gerade & ungerade Fkt in L^2)

Sei $H = L^2(-\infty,\infty)$ und definiere

$$L_g^2(-\infty,\infty) := \{ f \in H \mid f(x) = f(-x) \text{ f.ü.} \}$$
$$L_u^2(-\infty,\infty) := \{ f \in H \mid f(x) = -f(-x) \text{ f.ü.} \}$$

die TR (!) der geraden bzw ungeraden Funktionen.

Dann gilt $\underline{L^2(-\infty,\infty) = L_g^2(-\infty,\infty) \oplus L_u^2(-\infty,\infty)}$, denn die beiden TR sind abg und orthogonal.

Die Projektoren sind gegeben durch

$$P_g f(x) := f_g(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \in L_g^2(-\infty,\infty)$$
$$P_u f(x) := f_u(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \in L_u^2(-\infty,\infty)$$

und es gilt $f = f_u + f_g \quad \forall f \in L^2$ eindeutig.

[DETAILS: (UE)]

(ii) ist ebenso falsch falls $M \neq H$ dichte TR ist: FA 103

$$M^{\perp\perp} \underset{3.10(\text{viii})}{=} (\overline{M}^{\perp})^{\perp} = (H^{\perp})^{\perp} \underset{3.10(\text{iii})}{=} \{0\}^{\perp} = H \supsetneq M$$

Weitere Aufklärung liefert das folgende Korollar

3.18 KOR ($\perp$ vs $-$) $A \subseteq H$, $N \subseteq H$ TR, H (H)-Raum

(i) $A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} A}$ ($A^{\perp\perp}$ ist der kleinste abg TR, der A enthält) insbes:

(ii) $N^{\perp\perp} = \overline{N}$

(iii) $A^{\perp} = \{0\} \iff A$ total (dh $\overline{\operatorname{span} A} = H$).

Beweis: (i) $3.10(\text{viii}) \Rightarrow A^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} A})^{\perp} \Rightarrow$

$$A^{\perp\perp} = (\overline{\operatorname{span} A})^{\perp\perp} \underset{3.16(\text{ii})}{=} \overline{\operatorname{span} A}.$$

(ii) folgt sofort aus (i) ($N = \operatorname{span} N$)

(iii) "$\Rightarrow$" $\overline{\operatorname{span} A} \overset{(i)}{=} A^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} \overset{3.10(\text{iii})}{=} H$

"$\Leftarrow$" wegen (i) gilt $A^{\perp\perp} = H$; $A^{\perp} \underset{3.10(\text{vi})}{=} A^{\perp\perp\perp} = H^{\perp} \underset{3.10(\text{vi})}{=} \{0\}$. $\square$

[ÜE]

§3.2 ORTHONORMALBASEN

FA 104

07.10.14

3.19 MOTIVATION (Basen in ∞-dim VR)

In endl. dim VR ist eine Basis ein l.u. Erzeugendensystem $(b_1, \dots, b_n)$; jeder Vektor x hat eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \qquad (\alpha_i \in \mathbb{K})$$

Dieser Basisbegriff – wo jeder Vektor als endliche LK der Basisvektoren geschrieben werden kann; Hamel-Basis – ist in ∞-dim VR wenig hilfreich.

Lediglich etwa in c_{00} (vgl. 1.20A (iii)) sind die Standardeinheitsvektoren $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ mit $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (j-te Stelle) eine Hamel-Basis. Allgemein gilt:

In jedem ∞-dim (B)-Raum sind Hamel-Basen stets überabzählbar und können nicht explizit angegeben werden.
[ohne Beweis; verwendet Satz v. Baire]

Abhilfe schafft der folgende Basisbegriff...

FA 105

3.20 DEF (Schauder-Basis) Sei E ein (B)-Raum. Eine abzählbare Menge $b_1, b_2, \ldots \subset E$ heißt <u>Schauder-Basis</u> falls jedes $x \in E$ eine <u>eindeutige Darstellung</u> als konv. Reihe mit Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{K}$ hat, i.e.,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i .$$

3.21 BEM + MOTIVATION (Schauder Basen - ONB in (H)-Räumen)

(i) <u>WARNUNG</u>: Es gibt (B)-Räume, die keine Schauder-Basis besitzen [Enflo, 1972].

(ii) <u>Aufatmen</u>: Jeder separable (H)-Raum hat eine (viele!) „orthonormale Schauder-Basen" - auch „vollständige Orthonormalsysteme genannt."

(iii) <u>Draufgabe</u>: Nicht-separable (H)-Räume besitzen immerhin „überabzählbare vollständige Orthonormal-systeme".

Also - vgl §3.1 - die Existenz eines SP macht uns das Leben viel einfacher! □

Die Punkte (ii), (iii) explizit zu machen (und einiges mehr) ist Aufgabe dieses §. Wir beginnen damit, die zuletzt genannten Begriffe offiziell zu machen.

3.22 Def (OGS, ONS, ONB) Sei H ein Prähilbertr. | FA 106

$S = \{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Familie von Elementen von H, A eine beliebige (nicht notwendigerweise abzählbare) Indexmenge

(i) S heißt <u>Orthogonalsystem</u> (OGS), falls

$$e_\alpha \perp e_\beta \quad \forall \alpha \neq \beta$$

(ii) S heißt <u>Orthonormalsystem</u> (ONS), falls

$$\langle e_\alpha | e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(iii) S heißt <u>vollständiges ONS</u> oder <u>Orthonormalbasis</u> (ONB), falls S ONS ist <u>und</u>

$$\boxed{\operatorname{span} S = H} \text{ gilt.}$$

3.23 Beobachtung (zu ONS)

(i) Der Unterschied zwischen OGS und ONS ist, dass die Vektoren in ONS <u>normiert</u> sind.

(ii) Jedes ONS ist <u>l.u.</u>, denn $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e_{\alpha_j} = 0}$ $\Rightarrow$

$$0 = \left\| \sum c_j e_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{i,j}^{n} \langle c_j e_{\alpha_j} | c_i e_{\alpha_i} \rangle = \sum_j |c_j|^2 \Rightarrow$$

$\underline{c_j = 0 \ \forall j}$.

3.24 BSP (ONB)

FA 107

(i) In ℓ^2 sind die Standardeinheitsvektoren $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ eine ONB (mehr oder weniger per Def).

[Dasselbe gilt für $\ell^2(n)$ und $\ell^2(I)$.]

(ii) In $L^2[0,1]$ ist die folgende Familie ein ONS

$$f_n(x) := \sqrt{2}\cos(2\pi n x) \quad (n>0) \quad f_0(x) = 1$$
$$g_n(x) := \sqrt{2}\sin(2\pi n x) \quad (n\geq 1).$$

Diese Familie kann auch komplex geschrieben werden

$$h_n(x) := e^{2\pi i n x} \quad (n\in\mathbb{Z})$$

[$h_n = 1/\sqrt{2}\,(f_n + i g_n)$, $h_{-n} = 1/\sqrt{2}\,(f_n - i g_n)$; $n\in\mathbb{N}$]

Diese Familie ist sogar ONB [siehe 3.38(iii)]

3.25 PROP (Maximalität von ONS)

(i) Eine ONB in einem PHR ist ein maximales[1] ONS

(ii) Ein maximales ONS im HR ist eine ONB.

[kurz gesagt:

$$\text{ONB} \underset{\text{(H)-Raum}}{\overset{\text{immer}}{\rightleftarrows}} \text{max ONS}$$

]

---

[1] d.h. S ONS und $S\subseteq T$, T ONS $\Rightarrow S=T$

Beweis: (i) S nicht max. $\Rightarrow \exists\, 0 \neq e \in S^\perp \underset{3.10(viii)}{=} (\overline{\operatorname{span} S})^\perp$ | FA108

$\Rightarrow S$ nicht total $\Rightarrow S$ keine ONB.

(ii) S nicht total, i.e. $\overline{\operatorname{span} S} \neq H \underset{3.16(i)}{\Rightarrow} S^\perp \neq \{0\}$

$\Rightarrow S$ nicht max.

$\square$

3.26 MOTIVATION (Gram-Schmidt & $\exists$ von ONBs)

Als nächstes befassen wir uns mit der Frage der Existenz von ONBs. Als erstes wiederentdecken wir einen alten Bekannten aus [LA, V§5, Satz 1] – mit fast identischem Beweis...

3.27 SATZ (Gram-Schmidt Verfahren)

Sei $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine abz. l.u. Teilmenge eines (H)-Raumes H. Dann $\exists$ ONS S mit $\operatorname{lin} S = \operatorname{lin} M$.

Beweis: Für $n = 1, 2, \dots$ definiere

$$M_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}, \quad \begin{aligned} z_1 &= x_1; \\ z_{n+1} &= x_{n+1} - P_{M_n} x_{n+1} \end{aligned}$$

wobei P_{M_n} die OGP auf M_n ist.

Natürlich gilt $\forall x \in H: (x - P_{M_n} x) \perp M_n$ (3.14)

$\Rightarrow z_{n+1} \perp M_n$

$\Rightarrow z_{n+1} \neq 0$, denn $x_{n+1} \notin M_n$, $P_{M_n} x_{n+1} \in M_n$ (und alle $x_i \neq 0$)

Setze $\boxed{e_n := z_n / \|z_n\|}$. $\{e_n\} =: S$ hat dann die geforderten Eigenschaften, denn $\Pi_n = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ | FA109

$\Rightarrow e_j$ l.u. ; $e_{n+1} \perp \Pi_n$.

$\square$

3.28 THM (Existenz von ONB)

(i) Jeder separable (H)-Raum besitzt eine abzählbare ONB.

(ii) Sei S_0 ONS im (H)-Raum H. Dann $\exists$ ONB S mit $S_0 \subseteq S$. Insbesondere besitzt jeder (H)-Raum eine ONB

Beweis (i) Sei $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine totale Menge in H. Streiche x_{n+1} falls $x_1, \dots x_n, x_{n+1}$ l.a. sind und wende auf die erhaltene Menge 3.27 an.

siehe p. 109A

(ii) folgt aus dem Lemma von Zorn: Wir betrachten

$$\Sigma = \{S' : S_0 \subseteq S' \text{ und } S' \text{ ONS}\}$$

$\Rightarrow \Sigma$ ist nicht leer & partiell geordnet bzgl. der Inklusion und jede totalgeordnete TM Σ' von Σ hat eine obere Schranke, nämlich $\bigcup_{S' \in \Sigma'} S'$.

$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow} \Sigma$ hat ein maximales Element $S \overset{3.25(ii)}{\Longrightarrow} S$ ist ONB.

$\square$

Zum Lemma von Zorn

FA 109A

Next, we discuss Zorn's lemma.

Definition A relation on a set X which is reflexive, transitive, and antisymmetric (that is, xRy and yRx implies $x = y$) is called **a partial ordering**. If R is a partial ordering, we often write $x \prec y$ instead of xRy.

Example 3 Let X be the collection of all subsets of a set Y. Define $A \prec B$ if $A \subset B$. Then $\prec$ is a partial ordering.

We use the word "partial" in the above definition because two elements of X need not obey $x \prec y$ or $y \prec x$. If for all x and y in X, either $x \prec y$ or $y \prec x$, X is said to be **linearly ordered.** For example, $\mathbb{R}$ with its usual order $\leq$ is linearly ordered.

Now suppose X is partially ordered by $\prec$ and $Y \subset X$. An element $p \in X$ is called **upper bound** for Y if $y \prec p$ for all $y \in Y$. If $m \in X$ and $m \prec x$ implies $x = m$, we say m is a **maximal element** of X.

Depending on one's starting point, Zorn's lemma is either a basic assumption of set theory or else derived from the basic assumptions (it is equivalent to the *axiom* of choice). We take Zorn's lemma and the rest of set theory as given.

Theorem I.2 (Zorn's lemma) Let X be a nonempty partially ordered set with the property that every linearly ordered subset has an upper bound in X. Then each linearly ordered set has some upper bound that is also a maximal element of X.

[Reed, Simon]

3.29 Bsp (Legendre-Polynome) $H = L^2[0,1]$

Wende 3.27 auf $x_n(t) = t^n$ an. Daraus erhalten wir

$$e_n = \sqrt{n+\tfrac{1}{2}}\, P_n, \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^2-1)^n.$$

P_n heißt das n-te Legendre-Polynom - diese tauchen in der QM bei der Berechnung des Wasserstoffatoms auf. Weitere Details & Bsp in [UE].

3.30 Motivation (ON Basis)

Bevor wir daran gehen zu studieren, in welchem Sinn eine ONB Basis im (H)-Raum ist, nochmals ein Vergleich mit der endl.dim Situation: $\dim V = n$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ ONB. Es gilt $\forall x \in V$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x | b_i \rangle_{St}\, b_i,$$

d.h. die eindeutigen Entwicklungskoeffizienten von $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ sind gegeben durch $\alpha_i = \langle x | b_i \rangle_{St}$. Außerdem gilt

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \quad \text{und} \quad \langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\mu_i}$$

$\left(y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i\right)$

Mit anderen Worten liefert die Korrespondenz FAM1

$$x \longleftrightarrow (\lambda_i)_{i=1}^n$$

eine Identifikation von V mit $\ell^2(n)$.

Die große Bedeutung von abz ONB $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ in (H)-Räumen liegt nun darin, dass eine weitgehende Analogie zum endl. dim Fall besteht; genauer werden wir zeigen, dass

- $\forall x \in H$ existieren eindeutige Koeffizienten $(\lambda_i)_{i=1}^\infty$ sodass $x = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i$
- Diese Folge ist durch $\lambda_i = \langle x | e_i \rangle$ gegeben und erfüllt $\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^2 = \|x\|^2$
- Jede Folge $(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \ell^2$ tritt als Koeffizientenfolge eines $x \in H$ auf

Mit anderen Worten eine abz. ONB ermöglicht eine Identifizierung von H mit ℓ^2.

Die Hauptarbeit erledigt der folgende

3.31 SATZ (Die Bedeutung obz ONS). Sei H ein (H)-Raum, | FA112

$S=\{e_i\}_{i=1}^\infty$ ein ONS und $\alpha=(\alpha_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

Dann gilt

(i) $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ konv. in $H \iff (\alpha_i)_i\in \ell^2$

(ii) Im Fall der Konvergenz gilt $(\alpha=(\alpha_i)_i)$

$$\|x\|=\Big\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\Big\|=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\Big)^{1/2}=\|\alpha\|_{\ell^2}$$

Beweis. (i) Setze $x_n:=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. Dann gilt $\forall\, 1\le n\le m$

$$\|x_n-x_m\|^2=\Big\|\sum_{i=n+1}^{m}\alpha_i e_i\Big\|^2\overset{3.10(ii)}{=}\sum_{i=n+1}^{m}\|\alpha_i e_i\|^2=\sum_{i=n+1}^{m}|\alpha_i|^2$$

$\Rightarrow (x_n)_n$ konv $\iff \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$ konv.

(ii) gilt da ebenfalls wegen 3.10(i)

$$\|x_n\|^2=\Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\Big\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$$

$\square$

3.32 BEM (Notation & Sprechweise)

Sei nochmals $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ obz ONS im (H)-Raum H.

Für $x\in H$ setze

$$\alpha_i:=\langle x|e_i\rangle \qquad i\in\mathbb{N}$$

In Analogie zum „klassischen“ Fall der Fourierreihen (vgl. [A2, 14] bzw 3.24(ii)) verwenden wir von nun an auch folgende Bezeichnungen

α_i ... Fourierkoeffizienten von x bzgl $\{e_i\}$

$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ ... Fourierreihe von x bzgl $\{e_i\}$

Wir werden nun beweisen, dass im Falle $\{e_i\}$ ist ONB gilt

- Jeder Vektor kann durch seine Fourierreihe eindeutig dargestellt werden, insbes
- Jeder Vektor ist durch seine Fourierkoeffizienten eindeutig bestimmt.

Ja, es gilt sogar etwas allgemeiner der folgende Satz.

11. VO 17.5.23

Die oben angekündigte Analogie liefert jetzt.

12. VO 22.5.23

3.33 THM (Entwicklungssatz) Sei $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = S$ | FA 114

ObE ONS im (H)-Raum H und $M := \overline{\operatorname{span} S}$.

Dann gilt $\forall x, y \in H$

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x | e_k \rangle e_k = P_M(x)$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x | e_k \rangle|^2 = \|P_M(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x | e_k \rangle \overline{\langle y | e_k \rangle} = \langle P_M(x) | P_M(y) \rangle =$

$= \langle x | P_M(y) \rangle = \langle P_M(x) | y \rangle$.

Außerdem sei $\alpha = (\alpha_i)_i \in \ell^2$. Dann gilt

(iv) $\exists!\ u \in M$ mit sog. Fourierkoeffizienten $\alpha_i = \langle u | e_i \rangle$, nämlich $u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$

(v) $v \in H$ hat sog. Fourierkoeffizienten $(\alpha_i)_i$ genau dann, wenn $P_M(v) = u$

Beweis: (i) Setze $\boxed{x_n := \sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle e_k}$. Dann gilt $\forall 1 \leq \ell \leq n$

$\langle x - x_n | e_\ell \rangle = \langle x | e_\ell \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle \underbrace{\langle e_k | e_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}} = 0$

$\Longrightarrow x_n \perp x - x_n \Longrightarrow x = x_n + (x - x_n)$ ist Summe orth. Vektoren

3.10(i)

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x-x_n\|^2 \geq \|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x|e_k\rangle|^2 \quad \forall n$$

FA115

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x|e_k\rangle|^2 < \infty \overset{3.31(i)}{\Longrightarrow} \underline{\exists x' := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k}.$$

Und es gilt $\forall k$

$$\underline{\langle x-x'|e_k\rangle} = \langle x - \lim_n x_n | e_k\rangle =$$

$$= \langle x|e_k\rangle - \lim_n \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle \underbrace{\langle e_i|e_k\rangle}_{\delta_{ik}}$$

$$= \langle x|e_k\rangle - \langle x|e_k\rangle = \underline{0}.$$

$$\Rightarrow x - x' \perp M \overset{3.16}{\Longrightarrow} x' = P_M(x).$$

(ii) folgt sofort aus (i) und 3.31(ii) und 3.15(iii).

(iii) Setze $y_n := \sum_{k=1}^{n} \langle y|e_k\rangle e_k \overset{(i)}{\Longrightarrow} P_M(y) = \lim y_n$

$$\Rightarrow \underline{\langle P_M x|y\rangle} = \langle x|P_M y\rangle = \langle P_M x|P_M y\rangle$$

$$= \langle \lim_n x_n | \lim_n y_n\rangle = \lim_n \langle x_n|y_n\rangle$$

$$= \lim_n \sum_{l,k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle \overline{\langle y|e_l\rangle} \underbrace{\langle e_k|e_l\rangle}_{\delta_{kl}}$$

$$= \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \langle x|e_k\rangle \overline{\langle y|e_k\rangle}}$$

(iv) $\alpha \in \ell^2 \overset{3.31(i)}{\Longrightarrow} \exists u := \lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$; Grenzwerte eindeutig

und

$$\langle u, e_k\rangle = \lim_n \langle \sum^{n} \alpha_i e_i | e_k\rangle = \alpha_k$$

(v) $u = P_\Pi v \Rightarrow$

$$\langle v | e_k \rangle = \langle v | P_\Pi e_k \rangle = \langle P_\Pi v | e_k \rangle = \langle u | e_k \rangle$$

also sind die Fourierkoeff gleich.

Gilt umgekehrt für $v \in H$: $\langle v | e_k \rangle = \alpha_k \; \forall k$

$\Rightarrow \langle v - u | e_k \rangle = 0 \Rightarrow u - v \perp M \overset{3.14}{\Rightarrow} u = P_\Pi v$. $\square$

3.34 BEM (Bessel-Ungleichung) Der folgende Teil von (ii)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x | e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x \in H) \quad \forall x \in H$$

heißt Bessel-Ungleichg. Gilt die Gleichheit spricht man von der Parseval-Gleichung – Diese gilt genau dann, falls S schon ONB ist. Genauer können wir ONBs wie folgt charakterisieren

3.35 THM (Charakterisierung von ONB)

Sei $S = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ obj ONS im (H)-Raum H. TFAE

(i) S ist ONB (somit S total und H separabel)

(ii) $\forall x \in H$: $\quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x | e_k \rangle e_k$

(iii) $\forall x, y \in H$: $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x | e_k \rangle \langle e_k | y \rangle$

(iv) Es gilt die Parseval-Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x | e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in H$$

(v) S ist maximal

(vi) $x \perp S \Rightarrow x = 0$ (d.h. $\langle x | e_k \rangle = 0 \; \forall k \Rightarrow x = 0$)

3.35ABER (Der Status von 3.35) FA117

Nicht alle Punkte in 3.35 sind neu (z.B $(i) \overset{3.37}{\Rightarrow} (ii), (iii)$, $(i) \overset{3.25}{\Leftarrow} (v)$); das Thm dient aber der Zusammenfassung unseres Wissens über ONBs an einer Stelle. Im Beweis gehen wir – der Ästhetik wegen – reihum anstatt z.B 3.25 voll zu verwenden.

Beweis von 3.35:

$(i) \Rightarrow (ii)$: $\overline{\text{lin}\, S} = H$, daher $H = M$ in 3.37 und somit $P_M = id_H$: damit ist (ii) gerade (i) in 3.37.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: einsetzen und ausrechnen

$(iii) \Rightarrow (iv)$: setze $x = y$ in (iii)

$(iv) \Rightarrow (v)$: indir. ang $\exists\, 0 \neq x \in H$, $x \perp S \overset{(iv)}{\Rightarrow} \sum |\langle x | e_n \rangle|^2 = 0$ ↯ zu (iv)

$(v) \Rightarrow (vi)$: ang $x \neq 0 \Rightarrow S$ nicht maximal

$(vi) \Rightarrow (i)$: 3.25 (ii)

$\square$

Die Parsevalgleichung ermöglicht uns nun den letzten in 3.30 angekündigten Schritt zu machen: jeder separable (H)-Raum ist isometrisch isomorph zu ℓ^2

3.36 Thm (Isometrie separabler (H)-Räume) FA118

Sei H ein separabler (H)-Raum. Dann gilt $\boxed{H \cong \ell^2}$

Genauer, ist $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ abz. ONB von H (existiert wegen 2.28(ii)) dann ist

$$\boxed{\begin{aligned} T: H &\to \ell^2 \\ x &\mapsto (\langle x|e_k\rangle)_k \end{aligned}}$$

ein isometrischer Isomorphismus. [(vgl. 2.35(iii))]

Beweis: Sei T wie im Thm angegeben. Dann gilt

- $Tx \in \ell^2$ (3.35(iv))
- T ist linear (offensichtlich, (S1))
- T ist Isometrie, denn $\|Tx\|^2 = \sum |\langle x|e_k\rangle|^2 \overset{3.35(iv)}{=} \|x\|^2$
- T ist surjektiv, denn für $(\lambda_k)_k \in \ell^2$ definiere

$$x = \sum \lambda_k e_k \overset{3.31(i)}{\Longrightarrow} x \in H \overset{3.33(v)}{\Longrightarrow} Tx = (\lambda_k)_k.$$

$\square$

3.37 Bem (Nicht-separable (H)-Räume)

(i) Nicht-separable (H)-Räume können keine abz. ONB besitzen – diese wäre ja abz. totale Menge. Wir müssen uns also mit überabz. ONS herumschlagen. Der Schlüssel dazu ist

> Sei S ONS in $H \Rightarrow \forall x \in H$ ist die Menge
>
> $$S_x := \{e \in S \mid \langle x|e\rangle \neq 0\}$$ höchstens abz.

Denn sei $S_{x,\varepsilon} := \{e_j \in S \mid |\langle x|e_j\rangle| \geq \varepsilon\}$ FA 119

$\overset{3.34}{\Longrightarrow}$ $S_{x,\varepsilon}$ ist endlich, denn für $e_1, \dots, e_m \in S_{x,\varepsilon}$ gilt
$m\varepsilon^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x|e_k\rangle|^2 \overset{3.34}{\leq} \|x\|^2 \Rightarrow m \leq \|x\|^2/\varepsilon^2$

$\Longrightarrow S_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{x,\frac{1}{n}}$ ist höchstens abz.

(ii) <u>Warnung</u>: Trotzdem ist bei Summen der Gestalt $\sum_{\alpha\in A} \langle x|e_\alpha\rangle e_\alpha$ Vorsicht angebracht. Obwohl nur abz. viele Terme $\neq 0$ sind könnte der Wert von der Reihenfolge der abz. vielen $\langle x|e_\alpha\rangle$ abhängen. Ist dies nicht der Fall, so sprechen wir von unbedingter Konvergenz. Tatsächlich ist die zu 3.33(i) analoge Darstellung $x = \sum_{\alpha\in A} \langle x|e_\alpha\rangle e_\alpha$ für überabz. ONS unbed. konvergent. (siehe [W, V.4.8]) und 3.35 bleibt (analog) richtig (siehe [W, V.4.8, V.4.9]).

(iii) <u>Noch eine Warnung</u>: Anders als in $\mathbb{K}^n$ fallen in (B)-Räumen unbedingte und absolute Konvergenz auseinander. Genauer gilt

$$\sum \text{ abs kon} \quad \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad \sum \text{ unbed konv.}$$

Die Richtigkeit von "$\Leftarrow$" charakterisiert sogar die endl. dim (B)-Räume [Dvoretzky, Rogers, 1950].

(iv) (Kanonische Hilbertraum-Modelle)

FA 120

Die Isomorphie aus 3.36 gilt auch im allgemeinen Fall. Genauer gilt, dass je zwei ONBs in einem (H)-Raum dieselbe Mächtigkeit besitzen. Das erlaubt die Hilbertraumdimension als diese Kardinalzahl zu definieren. Schließlich gilt:

$$\boxed{\text{Ist } H \text{ (H)-Raum mit ONB } S \text{ (ex wegen 3.28). Dann gilt } \quad H \cong \ell^2(S)}$$

(Für Details siehe [W, V.4].)

3.38 BEM (Fourierreihen)

(i) Die kanonischen Hilbertraum-Modelle aus 3.37 (iv) und vor allem 3.3.6 sind wichtig im Studium abstrakter Eigenschaften von (H)-Räumen. In den Anwendungen ist aber oft die konkrete Beziehung zwischen den Elementen (Funktionen) in H und der (H)-Raum Struktur wichtig!

(ii) Im wichtigen (H)-Raum $L^2[0,1]$ gelten etwa folgende Zusammenhänge:

FA 121

- $L^2[0,1]$ separabel (2.16(i))

$\overset{3.36}{\Longrightarrow}$ $\boxed{L^2[0,1] \cong \ell^2}$

Diese Aussage ist auch als Satz von Riesz-Fischer bekannt. Hier ist sie eine einfache Konsequenz aus 3.36. Bemerke aber, dass 2.16(i) (L^2 separabel) den Satz von Weierstraß (2.15) benötigt und schwierig ist.

- Alternativ können wir aber auch das ONS $S = \{e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ aus 3.24(iii) betrachten und zeigen, dass es eine ONB ist. Dann ist der isom. Iso durch die klassischen Fourierreihen-Formeln gegeben, genauer

$$\boxed{T: f \longmapsto (\langle f | e_k \rangle)_k} = \Big(\int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t}\, dt\Big)_k =: (c_k)_k$$

$$(c_k)_k = \underbrace{(\hat{f}(k))_k}_{\text{klassische Fourierkoeffizient}}$$

Allerdings ist es nicht-trivial zu zeigen, dass S ONB ist. Das benötigt entweder den Satz von Stone-Weierstraß oder den Satz von Fejér und zusätzlich jedenfalls die Tatsache, dass $\mathcal{C}^0$ dicht in L^2 liegt (2.16 Schritt 1 - ebenfalls nichttrivial).

Genauer lautet der Satz von Fejér:

THM (Satz v. Fejér) Sei f stetig auf $\mathbb{R}$ und 2π-Periodisch. Sei $S_n(x)$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f und

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$$

Dann gilt $\|\sigma_n - f\|_\infty \to 0$

(Die Fourierreihe einer 2π-periodischen stetigen Fkt ist Cesaro-summierbar und das Cesaro-Mittel konvergiert glm gegen die Funktion.)

Beweis: $\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$

$$2\pi S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\,e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\int f(t)e^{ik(x-t)}\,dt = \sum_{k=-n}^{n}\int f(x-t)e^{ikt}\,dt$$

$$= \int f(x-t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\,dt$$

Es gilt $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it}-1}$

$$\left[\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=-n}^{0} = \frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1} - 1 + \sum_{k=0}^{n} e^{-ikt} = \frac{e^{i(n+1)t}-e^{it}}{e^{it}-1} + \frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{-it}-1}\right]$$

Damit

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\frac{e^{i(k+1)t}-e^{-ikt}}{e^{it}-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)}{e^{it}-1}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)t}-e^{-ikt}\right)}\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} - \sum_{k=0}^{1-n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t}-e^{it}}{e^{it}-1} - \frac{e^{-int}-1}{e^{-it}-1}$$

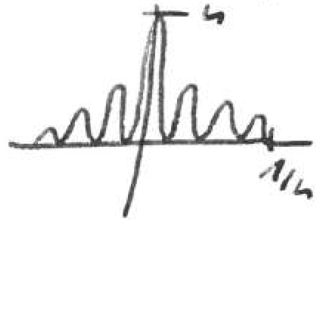
$$= \frac{1}{e^{it}-1}\left(e^{i(n+1)t}-e^{it}+e^{-i(n-1)t}-e^{it}\right) =$$

$$= \frac{e^{-i(n-1)t}}{e^{it}-1}\left(e^{2int}-2e^{int}+1\right) = \frac{\left(e^{int}-1\right)^2}{e^{it}-1}\,e^{-i(n-1)t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\underbrace{\left(\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right)^2\frac{e^{-i(n-1)t}}{n}}\,dt$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{e^{i\frac{n}{2}t}-e^{-i\frac{n}{2}t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}}\right)^2 \cancel{\frac{e^{int}}{e^{it}}\,e^{-i(n-1)t}}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin t/2}\right)^2 =: F_n(t) \quad \ldots \text{ Fejér-Kern}$$



Also haben wir

$$\boxed{\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,F_n(t)\,dt}$$

alle Integrale $=0$ außer $k=0$ [FA 22 C

Außerdem gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=-l}^{l} e^{ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{n}\,n\,2\pi = \underline{1}$$

f glm. stetig

Sei nun $\varepsilon>0$; wähle $\delta>0$ sodass $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $N > \dfrac{4\|f\|_\infty}{\varepsilon\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}$

Sei $n\geq N$, $x\in[-\pi,\pi]$; es gilt

$$|f(x)-\sigma_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-t)|\,\frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$\frac{1}{2\pi}\int F_n = 1$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)$$

$n\geq N$ bounds

bounds $|f(x)-f(x-t)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\varepsilon\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}{4\|f\|_\infty}\,2\|f\|_\infty\,\frac{1}{\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}\,2\pi$$

bounds integrand

$F_n\geq 0$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also $\|f-\sigma_n\|_\infty \to 0$. $\square$

FORTSETZUNG Bem 3.38(ii)

FA 122

Also folgt aus dem Satz von Fejér, dass die trigonometrischen Polynome dicht in C^0 liegen.

$\mathrm{lin}\{e^{2\pi i n x}\}$ (Das ist auch eine Folgerung aus dem Satz von Stone Weierstraß.)

Da $C^0 \subseteq L^2$ dicht liegt (2.16 - Schritt 1) folgt

$\overline{\mathrm{lin}\{e^{2\pi i n x}\}} = L^2[0,1]$ (analog zu 2.16 Schritt 2)

(iii) Der Satz von Fejér ist im übrigen einer der wenigen starken Sätze im "steinigen Acker" der ptw und glm. Konvergenz von Fourierreihen (vgl. [Heuser, II, 139])
Er war grundlegend für die moderne Theorie der FR (ab 1900). Einer ihrer größten Triumphe ist (Carleson 1966 - hart!) $f \in L^2 \Rightarrow S_n f(t) \xrightarrow[FR]{} f(t)$ für

iv) Die L^2-Theorie der FR funktioniert hingegen einfacher. Jede L^2-Fkt wird bzgl $\| \ \|_2$ von ihrer Fourierreihe dargestellt (vgl. [A1, 14.9] für R-int.bare Fkt). Für uns folgt dies sofort aus 3.35(ii).

FA 123

§ 3.3 Der Dualraum eines (H)-Raums & der adjungierte Op

3.39 Motivation (Dual des ℓ^2)

Aus 2.42(ii) wissen wir bereits, dass $\ell^2 \cong (\ell^2)'$ gilt (detto für L^2 aus 2.45; vgl. auch Bem. 2.47).
Das ist kein Zufall, sondern es gilt für jeden (H)-Raum, dass er isomorph zu seinem Dualraum ist – das ist ebenfalls nicht verwunderlich: ist doch jeder (H)-Raum isomorph zu einem $\ell^2(S)$ (3.37(ii)).

Um den Beweis im allgemeinen Fall zu motivieren, betrachten wir den ℓ^2-Fall genauer:

Standardeinheitsvektor

$$\text{Sei } f \in (\ell^2)' \Rightarrow f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) \overset{f \in (\ell^2)'}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \underbrace{f(e_i)}_{=: \overline{y_i}}$$

Falls nun $y = (y_i)_i \in \ell^2$ wäre, könnten wir schreiben

$$\boxed{f(x) = \langle x | y \rangle}$$

Tatsächlich ist $y \in \ell^2$, denn sei $y^{(N)} = (y_1, \dots, y_N, 0, \dots)$ $y_i = \overline{f(e_i)}$, dann gilt

$$\|y^{(N)}\|^2 = \langle y^{(N)} | y^{(N)} \rangle = \sum_{i=1}^{N} y_i \overline{y_i} = \sum^{N} y_i f(e_i) = f\Big(\sum^{N} y_i e_i\Big)$$

$$= f(y^{(N)}) \leq \|f\| \, \|y^{(N)}\| \Rightarrow \|y^{(N)}\| \leq \|f\| \ \forall N$$

$$\Rightarrow y \in \ell^2.$$

Bevor wir das Hauptresultat des § (den Darstellungssatz von Riesz-Fréchet) formulieren & beweisen notieren wir folgendes

FA126

3.40 LEMMA (Norm im PHR) Sei $(H, \langle\,|\,\rangle)$ PHR, $y \in H$

$$\Longrightarrow \|y\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} |\langle x|y\rangle|$$

Beweis: $\geq$ folgt sofort aus (CS).

$\leq$ ist klar für $y=0$; für $y \neq 0$ setze $x := \frac{y}{\|y\|_2}$

$$\Rightarrow |\langle x|y\rangle| = \left|\left\langle \frac{y}{\|y\|}\middle| y\right\rangle\right| = \|y\|_2$$

$\square$

3.41 BEM (zu 3.40)

(i) Der Beweis zeigt, dass das sup angenommen wird, also ein max ist.

(ii) Die Aussage des Lemmas kann auch so interpretiert werden: Das stetige ((CS)), lineare Funktional auf H

$$f_y : x \longmapsto \langle x|y\rangle$$

hat Norm $\|f_y\| = \|y\|_2$.

3.42 THM (Darstellungssatz v. Riesz-Fréchet) | FA 125

Jeder (H)-Raum H ist isomorph zu seinem Dualraum H'!

Genauer, die Zuordnung

$$\phi: H \to H'$$
$$y \mapsto f_y : (x \mapsto \langle x|y\rangle)$$

ist bijektiv, konjugiert linear und eine Isometrie

Beweis: • f_y ist linear (in x; (S1)) und beschränkt (CS) also $f_y \in H'$.

• $3.40 \Rightarrow \|f_y\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f_y(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle x|y\rangle| \overset{3.40}{=} \|y\|$

• ϕ ist konj linear nach (S2) $\Rightarrow \phi$ ist Isometrie $\overset{2.37(i)}{\Rightarrow}$ inj.

• ϕ ist surjektiv, denn sei $f \in H'$

für $f=0$ gilt $f(x) = \langle x|0\rangle$; sei also $f \neq 0$

$\Rightarrow M := \ker f \neq H$ und $\cap$ abgeschlossener TR

$[x_n \in \ker f, x_n \xrightarrow{H} x \Rightarrow f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0 \Rightarrow x \in \ker f]$

$\overset{3.18(iii)}{\Longrightarrow} \exists\, 0 \neq z \in M^\perp$; oBdA $\|z\| = 1$, setze $\alpha := f(z) \neq 0$ [sonst $z \in M \cap M^\perp = \{0\}$]

$\Rightarrow \forall x \in H$ $\xi(x) := \alpha x - f(x) z \in M$

[denn $f(\xi(x)) = \alpha f(x) - f(x)\underbrace{f(z)}_{\alpha} = 0$]

$\Rightarrow \forall x \in H$: $0 = \langle \xi(x)|z\rangle = f(z)\langle x|z\rangle - f(x)\underbrace{\langle z|z\rangle}_{\|z\|=1} = \langle x|\bar{\alpha} z\rangle - f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \langle x | \bar{\alpha} z \rangle = f_{\bar{\alpha} z}(x) = \phi_{\bar{\alpha} z}(x)$$

$\square$

FA 126

2019-04-25

12.VO 22.5.23

13.VO 25.5.23

3.43 BEM (Skalarprodukt auf H')

Durch die Definition

$$\langle f_x | f_y \rangle_{H'} := \langle y | x \rangle_H$$

wird H' zum (H)-Raum und es gilt dann

$$\langle \phi(x) | \phi(y) \rangle_{H'} = \overline{\langle x | y \rangle_H} \, ,$$

d.h. ϕ erhält das SP bis auf Komplexkonjugation.

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Theorie der Ops auf (H)-Räumen – dem zu einem Op adjungierten Op.

Seien im Folgenden $(H, \langle . | . \rangle_H)$ und $(K, \langle . | . \rangle_K)$ (H)-Räume.

3.44. SATZ + DEF (Adjungierter Op) Sei $T \in L(H, K)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Op $T^* \in L(K, H)$, genannt der zu T adjungierte Op, der $(x \in H, y \in K)$

$$\langle Tx | y \rangle_K = \langle x | T^* y \rangle_H$$

erfüllt.

FA 127

Beweis. Sei $y \in K$. Die (Gesamt-) Zuordnung

$$x \mapsto Tx \mapsto \langle Tx | y \rangle$$

ist linear, stetig und es gilt

$$|\langle Tx|y\rangle| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\| \qquad (*)$$

Riesz-Fréchet $\Longrightarrow \exists_1 z \in H : \langle Tx|y\rangle = \langle x|z\rangle$

↳ abhängig von y, T; bezeichnet mit $\boxed{z = T^* y}$

Es gilt T^* ist linear, denn

$$\langle x | T^*(y_1+y_2)\rangle = \langle Tx | y_1+y_2\rangle = \ldots = \langle x | T^*y_1 + T^*y_2\rangle$$

$$\underset{\forall x}{\Longrightarrow} \; T^*(y_1+y_2) = T^*y_1 + T^*y_2 \text{ ; analog } T^*(\lambda x) = \lambda T^* x$$

Schließlich ist T^* stetig, denn

$$\|T^* y\| = \|z\| \overset{3.60}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x|z\rangle| \overset{(*)}{\leq} \|T\| \, \|y\|$$

$$\Longrightarrow \|T^*\| \leq \|T\|$$

$\square$

3.45 Prop (Eigenschaften der Adjunktion) FA 128

Sei $T \in L(H,K)$ und $T^* \in L(K,H)$ der adj Op. Dann gilt

(i) $T^{**} = T$

(ii) $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$

(iii) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

(iv) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

(v) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ für $S \in L(K,G)$, G (H)-Raum

(vi) $id_H^* = id_K$

(vii) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ falls T invertierbar

$T_1, T_2 \in L(H,K)$
$T_1^*, T_2^* \in L(K,H)$

Beweis. [VÜ]

(i) $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle = \langle T^{**}x|y\rangle$

(ii) $\|Tx\|^2 = \langle Tx|Tx\rangle = \langle x|T^*Tx\rangle$

$$\le \|x\|\,\|T^*Tx\| \underset{\text{für } \|x\|\le 1}{\le} \|T^*T\| \le \|T\|\,\|T^*\|$$

Bew 3.44

$$\Longrightarrow \|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T\|\,\|T^*\| \Longrightarrow \|T\| \le \|T^*\| \le \|T\|$$

(iii), (iv) $\langle x|(\lambda T+S)^*y\rangle = \langle(\lambda T+S)x|y\rangle =$

$$= \lambda\langle Tx|y\rangle + \langle Sx|y\rangle = \lambda\langle x|T^*y\rangle + \langle x|S^*y\rangle$$

$$= \langle x|\bar{\lambda}T^*y\rangle + \langle x|S^*y\rangle \underset{\forall y}{\overset{\forall x}{\Longrightarrow}} (\lambda T+S)^* = \bar{\lambda}T^* + S^*$$

(v) $\langle x|(TS)^*y\rangle = \langle TSx|y\rangle = \langle Sx|T^*y\rangle$

$$= \langle x|S^*T^*y\rangle$$

(vi) klar

(vii) $TT^{-1} = id_K \overset{(vi)}{\Longrightarrow} (TT^{-1})^* = id_H$

$$\underset{(v)}{=} (T^{-1})^*T^*$$

analog $T^*(T^{-1})^* = id_K$ $\Big\} \Longrightarrow (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

$\square$

4 OPERATOREN IN (H)-RÄUMEN

In diesem Kapitel beweisen wir den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren auf (H)-Räumen. Dieser ist der einfachste Spektralsatz der FA und kann als direkte Verallgemeinerung des Spektralsatzes für symmetrische/selbstadjungierte Operatoren auf dem $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ gesehen werden. Er liefert eine Spektralzerlegung in die Eigenwerte und somit eine einfache Darstellung dieser Klasse von Operatoren.

Zunächst studieren wir in §4.1. normale & selbstadjungierte Operatoren auf (H)-Räumen sowie ihre Basiseigenschaften. In §4.2 wenden wir uns kompakten Operatoren zu – diese haben ein „fast endlich dimensionales" Bild und stellen daher eine einfach zu handhabende Klasse von Operatoren dar. In §4.3 formulieren & beweisen wir dann den angekündigten Spektralsatz und leiten daraus die kanonische Darstellung für kompakte Operatoren her, sowie den Spektralsatz für kompakte normale Operatoren.

FA 131

§ 4.1 NORMALE & SELBSTADJUNGIERTE OPS

Wir beginnen mit der Definition wichtiger Klassen von Operatoren auf (H)-Räumen

4.1 DEF Seien H, K (H)-Räume. Dann heißt $T \in L(H,K)$

(i) unitär (orthogonal), falls $T^* = T^{-1}$, d.h. $T^*T = id_H$ & $TT^* = id_K$

Für $H=K$, d.h. $T \in L(H)$ heißt

(ii) selbstadjungiert (hermitisch), falls $T^* = T$

(iii) anti-selbstadj (anti-hermitisch), falls $T^* = -T$

(iv) normal, falls $T^*T = TT^*$

(v) nicht-negativ, falls $T^* = T$ und $\langle Tx | x \rangle \geq 0$ $\forall x \in H$

4.2. BEMERKUNG Die Terminologie ist natürlich der lin. Algebra entlehnt. So ist z.B. $T \in L(\mathbb{R}^n)$ genau dann selbstadj, falls die zugehörige Matrix A selbstadj ist, d.h. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ gilt.
Tatsächlich ist die Analogie mit dem endl. dim. Fall aber enden wollend – wie das nächste Bsp zeigt.

4.3. Bsp (Shift-Operatoren) FA 132

Wir definieren den Rechtsshift $U: \ell^2 \to \ell^2$ ab

$$U(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

Dann ist U injektiv & nicht surj und es gilt

$$\langle x | U^* y \rangle = \langle Ux | y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle x \middle| \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\forall x$

$\Longrightarrow U^* y = (y_2, y_3, \dots)$ genannt der Linksshift.

U^* ist surj, nicht inj und es gilt

$U^* U = id_{\ell^2}$, aber $UU^* x = (0, x_2, \dots) = P_{\overline{span(e_2, e_3 \dots)}} x \neq x$

Also ist U nicht invertierbar, nicht unitär (obwohl $\langle Ux | Uy \rangle = \langle x | y \rangle$)

und somit sind die folgenden Sätze aus der lin. Algebra im ∞-dimensionalen HR falsch

$\dim V < \infty$, $\varphi: V \to V$ lin

- φ inj $\Leftrightarrow$ φ surj $\Leftrightarrow$ φ bij
- $\varphi \circ \psi = id_V \Rightarrow \psi \circ \varphi = id_V$
- φ orthogonal/unitär $\Leftrightarrow \langle \varphi u | \varphi w \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v w$
  $\Leftrightarrow \|\varphi v\| = \|v\| \ \forall v$

4.4 Bsp (Adjungierte Ops) Details siehe [UE]

(i) Sei $T: \ell^2 \to \ell^2$ und bzgl. der ONB $e_1, e_2, \dots$ gegeben durch die sog. Matrixelemente

$$a_{ij} = \langle Te_i | e_j \rangle .$$

Dann hat T^* die Matrixelemente $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

(ii) Sei $\varphi \in L^\infty[0,b]$ und $T_\varphi : L^2[0,b] \to L^2[0,b]$ der Multiplikationsop $(T_\varphi f)(x) := \varphi(x) f(x)$.

Dann gilt $(T_\varphi^* f)(x) = \overline{\varphi(x)} f(x)$

(iii) Sei $T: L^2[0,b] \to L^2[0,b]$ Hilbert-Schmidt Operator mit Kern $K \in L^2([0,b] \times [0,b])$, d.h.

$$Tf(x) = \int_0^b K(x,y) f(y)\, dy .$$

Dann hat $T^* f$ den Integralkern $\overline{K(y,x)}$. Insbesondere ist T selbstadj $\iff K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ f.ü.

Wir studieren nun Basiseigenschaften selbstadj. Ops

4.5 Lemma H (H)-Raum über $\mathbb{K} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}$, $T \in L(H)$

$$\langle Tx | x \rangle = 0 \ \forall x \Rightarrow T = 0$$

WARNUNG: Im $\mathbb{R}^2$ gilt $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \middle| x \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \ \forall x$

FA 134

<u>Beweis</u>. Wende die Polarisierungsformel (PO') aus 1.13 auf die Sesquilinearform $S(x,y) = \langle Tx|y\rangle$ an, vgl. [UE10] bzw 1.17: Mit $\varphi(x) = S(x,x) = \langle Tx|x\rangle$ gilt

$$\langle Tx|y\rangle = S(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\varphi(x+y) + i\varphi(x+iy) - \varphi(x-y) - i\varphi(x-iy)\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\langle T(x+y)|x+y\rangle}_{0} + \dots \Big) = 0$$

$$\overset{\forall y}{\Longrightarrow} Tx = 0 \overset{\forall x}{\Longrightarrow} T = 0$$

$\square$

<u>4.6 Prop</u> (Charakterisierung selbstadj Ops) $T \in L(H)$, H komplexer (H)-Raum

Dann gilt

$$\boxed{T = T^* \iff \langle Tx|x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H}$$

<u>Beweis</u>. ($\Rightarrow$) $\langle Tx|x\rangle = \langle x|T^*x\rangle = \langle x|Tx\rangle = \overline{\langle Tx|x\rangle}$

($\Leftarrow$) $\langle Tx|x\rangle = \overline{\langle Tx|x\rangle} = \langle x|Tx\rangle = \langle T^*x|x\rangle$

$$\Rightarrow \langle (T-T^*)x|x\rangle = 0 \ \forall x \overset{4.5}{\Longrightarrow} T = T^*$$

$\square$

<u>4.7. Prop</u> (Norm selbstadj Ops) $T \in L(H)$, $T = T^*$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx|x\rangle|$$

<u>Beweis</u>. Setze $N_T := \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx|x\rangle| \overset{CS}{\Longrightarrow} N_T \le \|T\|$

FA 135

Umgekehrt schreiben wir

$$4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx|y\rangle = 2\,\big(\langle Tx|y\rangle + \underbrace{\langle y|Tx\rangle}_{\langle Ty|x\rangle}\big)$$

$$= \langle T(x+y)|x+y\rangle - \langle T(x-y)|x-y\rangle$$

$$\Rightarrow 4\,|\mathrm{Re}\langle Tx|y\rangle| \le N_T\,(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

$$\overset{\square\text{-Glg}}{=} 2N_T\,(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad (*)$$

Sei nun $\langle Tx|y\rangle = re^{i\vartheta}$ und ersetze oben y durch $e^{i\vartheta}y$. Dann gilt

$$|\mathrm{Re}\,\langle Tx|ye^{i\vartheta}\rangle| = |\mathrm{Re}\,\underbrace{e^{-i\vartheta}\langle Tx|y\rangle}_{=r=|\langle Tx|y\rangle|}| = |\langle Tx|y\rangle|$$

$$\Rightarrow 4\,|\langle Tx|y\rangle| \overset{(*)}{\le} 2N_T\,(\|x\|^2 + \|e^{i\vartheta}y\|^2)$$

$$\xRightarrow[3.40]{\sup_{\|y\|\le 1}} 4\|Tx\| \le 2N_T\,(\|x\|^2+1)$$

$$\xRightarrow{\sup_{\|x\|\le 1}} \underline{4\|T\| \le 4N_T} \qquad \square$$

4.8 Prop (Orthogonalproj & selbstadj Ops) $P\in L(H)$. TFAE

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{(i) } P = P_M \text{, Orthogonalprojektion auf abg TR } M\subseteq H\\
\text{(ii) } P = P^* = P^2\\
\text{(iii) } P^2 = P \text{ und } \langle Px|x\rangle \ge 0\ \ \forall x\in H
\end{array}}$$

FA 136

Beweis. (i) ⇒ (ii): $P = P_M \overset{3.15(i)}{\Longrightarrow} P^2 = P$

Außerdem gilt $H = M \oplus M^\perp$ (3.16) und so

$$\langle x | P^* y\rangle = \langle P(\underset{\in M}{x_1} + \underset{\in M^\perp}{x_2}) | \underset{\in M}{y_1} + \underset{\in M^\perp}{y_2}\rangle = \langle x_1 | y_1 + y_2\rangle$$

$$= \langle x_1 | y_1\rangle = \langle x_1 + x_2 | y_1\rangle = \langle x | Py\rangle$$

$\forall x \Rightarrow P^* y = Py \ \forall y \Rightarrow P^* = P$

(ii) ⇒ (iii): $\langle Px | x\rangle = \langle P^2 x | x\rangle = \langle Px | P^* x\rangle = \langle Px | Px\rangle \geq 0$

(iii) ⇒ (i): Wir zeigen $H = \operatorname{im} P \oplus \ker P$ ①, $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$ ②

Zunächst gilt $\forall x \in H$: $x = \underbrace{x - Px}_{\in \ker P} + Px \in \ker P + \operatorname{im} P$, denn

$$P(x - Px) = Px - P^2 x = Px - Px = 0.$$

Für $x = Py \in \ker P \cap \operatorname{im} P$ gilt

$$0 = Px = P^2 y = Py = x \quad \text{also } x = 0$$

Daher gilt ①.

Um ② zu sehen sei $x = x_1 + x_2 \in \operatorname{im} P \oplus \ker P$ dann gilt

$$0 \leq \langle Px | x\rangle = \langle P(x_1 + x_2) | x_1 + x_2\rangle = \langle x_1 | x_1\rangle + \langle x_1 | x_2\rangle$$

$$\Longrightarrow -\|x_1\|^2 \leq \langle x_1 | x_2\rangle \ \forall x_1, x_2 \in \operatorname{im} P, \ker P \quad (*)$$

Ang. $\langle x_1 | x_2\rangle = \bar{\alpha} \neq 0$. Dann gilt für $y_2 = -\frac{2}{\alpha}\|x_1\|^2 x_2$, $y_1 = x_1$

$$-\|x_1\|^2 = -\|y_1\|^2 \overset{(*)}{\leq} \langle y_1 | y_2\rangle = \langle x_1 | -\frac{2}{\alpha}\|x_1\|^2 x_2\rangle$$

$$= -\frac{2}{\bar{\alpha}}\|x_1\|^2 \langle x_1 | x_2\rangle = -2\|x_1\|^2 \ \lightning$$

Also $x_1 \perp x_2$ und ② gilt. $\square$

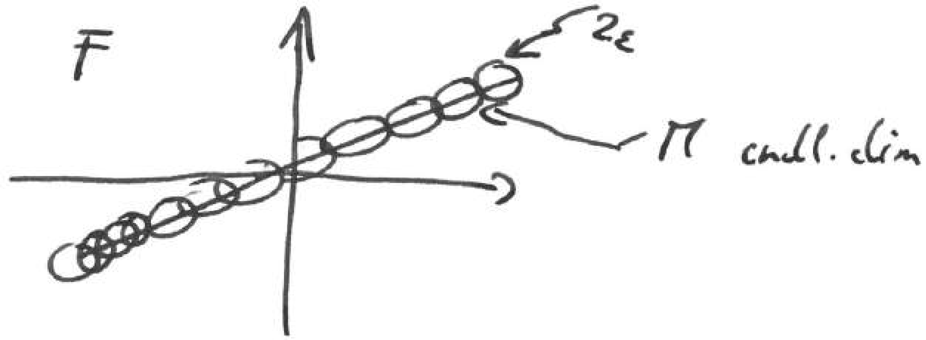
FA137

§4.2. Kompakte Operatoren

4.9. Motivation. Wir haben schon mehrfach gesehen, dass für beschr. Ops in ∞-dim VR Vieles nicht so funktioniert wie in der lin. Alg. Eine Quelle dieses „Übels" ist, dass die Einheitskugel in unendl.-dim (B)-Räumen nicht kp ist, vgl 2.11.

Glücklicherweise haben viele anwendungsrelevante Ops die Eigenschaft die Einheitskugel auf eine „fast endl. dim Menge zu quetschen". Solche Ops heißen kp Operatoren und wir können uns wie folgt ein Bild machen ($T \in L(E)$, E (B)-Raum)

- T kp $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists S:\ \dim(\operatorname{im} S) < \infty,\ \|T - S\| < \varepsilon$
- T kp $\iff T(oE)$ beschränkt und „bis auf ε" in einem endl dim TR M enthalten, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ TR M: $T(oE) \subseteq M + \varepsilon oF$



Zur Illustration ein Bsp.

4.10 Bsp. $T: \ell^2 \to \ell^2 \quad T(x_n) = \left(\frac{1}{n} x_n\right)$

Wenn ich nur $\varepsilon = \frac{1}{1000}$-scharf sehe („bis auf ε"),
dann nehme ich $T(o\ell^2)$ nur in den ersten 1000 Koordinaten
wahr: $Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{1000}x_{1000}, \dots)$
Genauer sei $Sx = (x_1, \frac{1}{2}x_1, \dots, \frac{1}{1000}x_{1000}, 0, 0 \dots)$, kleiner
dann gilt $\dim(\operatorname{im} S) < \infty$ und $\|T - S\| < \frac{1}{1000} = \varepsilon$
Ebenso liegt $T(o\ell^2)$ wieder in $o\ell^2$ und ist „bis auf ε"
in $M = \operatorname{span}(e_1, e_2, \dots, e_{1000})$ enthalten.

Erfreulicher Weise sind z.B. Hilbert-Schmidt Ops kp
und auch viele Hamiltonops in der QT lassen sich als
$H = H_0 + T$ schreiben mit gut bekanntem H_0 und kp
„Störung" T.

Jetzt offiziell

4.11. DEF (Kp Ops) Seien E, F (B)-Räume. $T: E \to F$ lin
heißt **kompakt**, falls $\overline{T(oE)}$ kp in F ist.
Wir schreiben

$$K(E,F) := \{T: E \to F \mid T \text{ lin, kp}\}.$$

4.12. Prop (kp ⇒ beschr.)

$$\boxed{K(E,F) \subseteq L(E,F)}$$

Beweis. Ang $T \in K(E,F)$ unbeschränkt

$\Rightarrow \exists (x_n) \in E,\ \|x_n\| \leq 1,\ \|Tx_n\| \geq n$

$\Rightarrow Tx_n$ hat keine konv. TF $\lightning$. $\square$

4.13. Prop (Charakterisierung kp Ops)

$T: E \to F$ kp $\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n) \in E$ mit $\|x_n\| \leq 1$ hat Tx_n konv. TF

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei $\|x_n\| \leq 1 \Rightarrow (x_n) \in \mathrm{o}E$

$\Rightarrow Tx_n \in T(\mathrm{o}E) \subseteq \overline{T(\mathrm{o}E)} \subseteq F$ kp $\Rightarrow \exists$ konv. TF von (Tx_n)

($\Leftarrow$) Sei (y_n) Folge in $\overline{T(\mathrm{o}E)}$. Wähle $x_n \in \mathrm{o}E: \|Tx_n - y_n\| < 1/n$

$\Rightarrow Tx_n$ hat konv TF $(Tx_{n_k})_k$

$\Rightarrow y_{n_k} = \underbrace{Tx_{n_k}}_{\text{konv}} + \underbrace{y_{n_k} - Tx_{n_k}}_{\to 0}$ konv in $\overline{T(\mathrm{o}E)}$ $\square$

4.14 Bsp (kp Ops)

(i) $T: \ell^2 \to \ell^2,\ T(x_n) = (\lambda_n x_n)$

$T \in L(\ell^2) \Leftrightarrow (\lambda_n) \in \ell^\infty$ [UE 30(i)]

$T \in K(\ell^2) \Leftrightarrow (\lambda_n) \in c_0$ [UE]

FA 140

(ii) id_E ist für $\dim E = \infty$ <u>nie</u> kp, denn $\overline{id_E(oE)} = oE$ ist nie kp nach 2.11.

(iii) $T \in L(E,F)$, $\dim(\operatorname{im} T) < \infty \Rightarrow T$ kp, denn

$$T(oE) \subseteq \underbrace{(\|T\|\, oF)}_{\text{beschr}} \cap \underbrace{\operatorname{im} T}_{\text{endl. dim}} \Rightarrow \overline{T(oE)} \text{ beschr + abg in endl dim NVR} \overset{\text{Heine}}{\underset{\text{Borel}}{\Longrightarrow}} \text{kp}$$

13. VO 25.5.23

14. VO 1.6.23 [Aspern]

Als nächstes machen wir die Überlegungen von 4.8 exakt.

<u>4.15 SATZ</u> Seien E, F (H)-Räume. Dann gilt

$$T \in K(E,F) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T_\varepsilon \in L(E,F) \text{ mit } \dim(\operatorname{im} T_\varepsilon) < \infty,\ \|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon$$

<u>Beweis.</u> ($\Rightarrow$) Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{Top}^{①}}{\Rightarrow} \exists\ \frac{\varepsilon}{2}$-mesh $y_1, \dots, y_n$ für $\overline{T(oE)}$

Sei $M = \operatorname{span}(y_1, \dots, y_n)$, $T_\varepsilon = P_M T$.

Sei nun $\|x\| \le 1 \Rightarrow \exists i : \|Tx - y_i\| < \varepsilon/2$ und so

$$\|(T - T_\varepsilon)x\| \le \|Tx - y_i\| + \|y_i - P_M y_i\| + \|P_M y_i - P_M T x_i\|$$
$$< \varepsilon/2 + 0 + \|P_M\|\, \varepsilon/2 \le \varepsilon$$

---

① Ein metrischer Raum X ist genau dann kp, falls er vollständig & total beschränkt ist. Letzteres bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein sog. ε-Mesh gibt, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists y_1, \dots, y_n$ (Mittel-)Punkte ($n \in \mathbb{N}$!) mit $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(y_i)$. Siehe z.B. Cigler/Reichel Topologie p. 68

FA 141

$(\Leftarrow)$ Sei $\varepsilon > 0$ und T_0 mit endl dim Bild s.d.

$$\|T - T_0\| < \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow T_0(oE) \subseteq \underbrace{(\|T_0\| \, oF) \cap \operatorname{im} T_0}_{\text{beschr Menge in endl dim NVR} \Rightarrow \text{kp}}$$

vgl. 4.14 (iii)

$$\overset{\text{TOP}}{\Rightarrow} \exists \ \varepsilon/3\text{-Netz } y_1, \dots, y_n \text{ in } \overline{T_0(oE)}$$

Sei nun $y \in \overline{T(oE)}$, $x \in oE$ mit $\|y - Tx\| < \varepsilon/3$

Wähle y_i mit $\|T_0 x - y_i\| < \varepsilon/3$. Dann gilt

$$\|y - y_i\| \le \|y - Tx\| + \|Tx - T_0 x\| + \|T_0 x - y_i\|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Also ist y_i ein ε-Netz für $\overline{T(oE)}$, also $\overline{T(oE)}$ kp $\square$

4.16 KOR $\boxed{K(E,F) = \overline{\mathcal{F}(E,F)}}$ E, F (H)-Räume

wobei wir mit $\mathcal{F}(E,F)$ den Teilraum der Ops mit endl dim Bild in $L(E,F)$ bezeichnet haben. Insbesondere ist $K(E,F) \subseteq L(E,F)$ ein abg TR bzgl $\| \ \|_{op}$

4.17 BEM $(\Leftarrow)$ in 4.15 gilt auch in (B)-Räumen

Die Frage, ob $(\Rightarrow)$ in allen (B)-Räumen gilt ist ein berühmtes Problem der klassischen Funktionalanalysis, das lange Zeit offen war, das Approximations-Problem.

FA 142

Es wurde von vielen wichtigen Problemen in der FA gezeigt, dass sie zum Approximationsproblem äquivalent sind. Bei allen praktisch auftretenden (B)-Räumen lautet die Antwort: ($\Rightarrow$) gilt. Und es wurde vielfach die Richtigkeit vermutet bis 1972 Per Enfo ein Gegenbsp fand (und damit eine lebende Kuhspenonn!).

4.18 PROP. Seien D, E, F, G (B)-Räume, $T \in K(E,F)$, $S \in L(D,E)$, $R \in L(F,G)$. Dann gilt

$$T \circ S \in K(D,F), \quad R \circ T \in K(E,G).$$

Insbesondere ist $K(E) := K(E,E)$ ein Operatorideal in $L(E)$.

Beweis. $T \circ S$: $\|x_n\| \le 1 \Rightarrow \|Sx_n\| \le \|S\| \Rightarrow \| \frac{1}{\|S\|} Sx_n \| \le 1$

$$\Rightarrow T\left(\frac{1}{\|S\|} Sx_n\right) = \frac{1}{\|S\|} TSx_n \text{ hat konv. TF}$$

$$\Rightarrow TSx_n \text{ hat konv. TF} \Rightarrow TS \text{ kp}$$

$R \circ T$: $\|x_n\| \le 1 \Rightarrow Tx_n$ hat konv. TF

$$\Rightarrow RTx_n \text{ — " —} \Rightarrow RT \text{ kp} \quad \square$$

§4.3. Spektralsatz für KP Ops

4.18 Motivation In diesem Abschnitt werden wir für eine große Klasse beschränkter Ops (die zB wichtige Integral ops wie die Hilbert-Schmidt Ops umfasst) eine vollständige Spektralzerlegung konstruieren.

Zur Erinnerung im endl. dim Fall (also der lin. Alg.) funktioniert das für symmetrische/selbstadj $(n \times n)$-Matrizen T wie folgt: $T = T^* \Rightarrow \exists$ ONB $(e_i)_{i=1}^n$ aus EV zu EW $(\lambda_i)_{i=1}^n$

und $x = \sum \langle x | e_i \rangle e_i \mapsto Tx = \sum \lambda_i \langle x | e_i \rangle e_i$

$$\begin{pmatrix} \langle x|e_1\rangle \\ \langle x|e_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n\rangle \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle x|e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n\rangle \end{pmatrix}$$

Darüber hinaus gilt in der lin. Alg.:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ EW von } T &\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \;\; Tx = \lambda x \\ &\Longleftrightarrow \det(\lambda \mathbb{1} - T) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda \mathbb{1} - T \text{ nicht invertierbar.} \end{aligned}$$

In der FA ist die Situation wesentlich komplizierter.

Wir beginnen mit der Terminologie

4.20 DEF (Resolvente, Spektrum, Eigenwerte etc.)

Sei E ein (B)-Raum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in L(E)$.

(i) Die Menge
$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \mathbb{1} - T \text{ hat Inverse in } L(E)\}$$
heißt Resolventenmenge von T in E.

(ii) Die Menge
$$\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \mathbb{1} - T \text{ hat keine Inverse in } L(E)\}$$
heißt das Spektrum von T in E

(iii) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert (EW) von T, falls $\ker(\lambda \mathbb{1} - T) \neq \{0\}$.
Ein Element $0 \neq x \in \ker(\lambda \mathbb{1} - T)$ heißt Eigenvektor (EV) von T zum EW λ. Der Vektorraum
$$E_\lambda(T) = \ker(\lambda \mathbb{1} - T)$$
heißt Eigenraum von T und die Dimension von $E_\lambda(T)$ heißt (geometrische) Vielfachheit von λ

(iv) Die Menge der EW von T bezeichnen wir mit $\sigma_p(T)$ und nennen sie das Punkt-spektrum von T.

4.20A PROP (Eigenschaften von ρ, σ) Für $T \in L(E)$, E (B)-Raum gilt:

(i) $\rho(T)$ ist offen
(ii) $\sigma(T)$ ist kompakt und $\forall \lambda \in \sigma(T)$: $|\lambda| \leq \|T\|$

Beweis: (i) Sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ so dass

$$|\lambda-\lambda_0| < \|\underbrace{(\lambda_0 \mathbb{1}-T)^{-1}}_{\in L(E) \text{ lt. Vorauss.}}\|^{-1} \Longrightarrow \|(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 \mathbb{1}-T)^{-1}\| \leq |\lambda-\lambda_0| \|(\lambda_0 \mathbb{1}-T)^{-1}\| \underset{\mathbb{R}}{<} 1$$

$$\overset{2.40}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 \mathbb{1}-T)^{-1} \right)^n \text{ konv. in } L(E)$$

$$\underset{2.40}{\overset{\text{Neumann Reihe}}{\Longrightarrow}} \mathbb{1} - (\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 \mathbb{1}-T)^{-1} \text{ ist invertierbar (\& durch die Reihe gegeben) } (**)$$

$$\Longrightarrow (\lambda \mathbb{1}-T) = (\lambda_0 \mathbb{1} - T) + (\lambda-\lambda_0) \mathbb{1}$$

$$= \underbrace{(\lambda_0 \mathbb{1}-T)}_{\text{inv. nach Ann.}} \underbrace{(\mathbb{1} - (\lambda_0-\lambda)(\lambda_0 \mathbb{1}-T)^{-1})}_{\text{Inv. nach } (**)}$$

$$\Longrightarrow \lambda \in \rho(T)$$

(ii) Wegen (i) ist $\sigma(T)$ abg. Weiters gilt für $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| > \|T\|$

$$(\lambda \mathbb{1}-T)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\mathbb{1} - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} \overset{2.40}{=} \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n$$

$\Rightarrow \sigma(T)$ beschränkt daher kp & $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$. $\square$

4.20 B Bem (Zum Spektrum & den EW)

(i) Man kann zeigen, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\sigma(T) \neq \emptyset \qquad [W, \text{Satz VI } 3(d)]$$

(ii) Klarerweise gilt in der lin. Alg. (d.h. $\dim E < \infty$), dass

$$\sigma(T) = \sigma_p(T)$$

In der FA ist das nicht so, ! Das Spektrum erfüllt i.a. FA 144

$\underbrace{\{\sigma_p(T) \subsetneq \sigma(T)\}}$. Wir werden allerdings im

Folgenden sehen, dass für kp selbstadj/normale Ops in (H)-Räumen $\sigma(T)$ „fast nur" aus EW besteht und konzentrieren uns im Folgenden auf diese Ops.

4.21 BSP (EW + EV)

(i) Der Rechts-Shift aus 4.3 hat keine EW, für den Links-Shift gilt $\sigma_p = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ [ÜE]

(ii) Der Diagonaloperator aus 4.14 $Tx = (\lambda_n x_n)$ mit $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ hat die EW λ_n, denn $Te_n = \lambda_n e_n$ [ÜE]

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit ganz einfachen Operatoren:

4.22 DEF (Rang 1-op) Seien E, F (H)-Räume, $e \in E$, $f \in F$

Wir definieren $(f \otimes e^*)(x) = \langle x | e \rangle f \quad (x \in E)$

4.23 BEOBACHTUNG (Einfache Eig von $f \otimes e^*$)

(i) $f \otimes e^* \in L(E,F)$: Linearität ist klar und es gilt

$$\left.\begin{array}{l} \|f \otimes e^*(x)\| \leq \|x\| \|e\| \|f\| \\ \|f \otimes e^*\left(\frac{e}{\|e\|}\right)\| = \|e\| \|f\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|f \otimes e^*\| = \|f\| \|e\|$$

(ii) $\operatorname{im}(f \otimes e^*) = \operatorname{span}(f)$ falls $e \neq 0$

bzw $\{0\}$ falls $e = 0$

FA 145

(iii) $\ker(f\otimes e^*) = (\mathrm{span}\, e)^\perp$ falls $f \neq 0$

bzw. $= E$ falls $f = 0$

(iv) $\left[\langle x | (f\otimes e^*)^* y\rangle = \langle (f\otimes e^*)x | y\rangle = \langle \langle x|e\rangle f | y\rangle = \langle x|e\rangle \langle f|y\rangle = \langle x | \langle y|f\rangle e\rangle = \langle x | (e\otimes f^*) y\rangle\right]$ [ÜE]

$$\Rightarrow \boxed{(f\otimes e^*)^* = e\otimes f^*}$$

(v) Der Operator T in der Motivation 4.19. schreibt sich als
$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, c_i \otimes e_i^* \qquad [ÜE]$$

4.24 Prop (Summe von Rang-1-Ops)

Seien $(e_n)_n$, $(f_n)_n$ ONS in E bzw. F, $(\lambda_n) \in \ell^\infty$.

Dann ist der Operator T definiert durch
$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x|e_n\rangle f_n \quad \in L(E,F)$$
mit $\|T\| = \|\lambda\|_\infty$.

Beweis. $\sum |\lambda_n|^2 |\langle x|e_n\rangle|^2 \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2 \Rightarrow \|T\| \leq \|\lambda\|_\infty$

und $\|Te_n\| = |\lambda_n| \Rightarrow \|T\| \geq \|\lambda\|_\infty$ $\square$

FA 146

4.25 Bsp (i) $E = M \oplus M^\perp$ (e_n) vONS in M
             (f_n) vONS in $M^\perp$

$$\Rightarrow P_M = \sum e_i \otimes e_i^*, \quad P_{M^\perp} = \sum f_i \otimes f_i^*$$

$$\mathbb{1} = \sum e_i \otimes e_i^* + \sum f_i \otimes f_i^*, \text{ dh}$$

$$x = \sum \langle x | e_i \rangle e_i + \sum \langle x | f_i \rangle f_i$$

(ii) Warnung: I.A gilt $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \otimes e_n^*$ $(\lambda_n) \in \ell^\infty$, $(f_n), (e_n)$ ONS
nicht in $\| \, \|_{op}$. Denn

$$\| T - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n \otimes e_n^* \| = \| \sum_{n > N} \lambda_n f_n \otimes e_n^* \| = \sup_{n \geq N} |\lambda_n|$$

Also T ist Op-Norm-limes der Partialsumme

genau dann, wenn $(\lambda_n) \in c_0 \overset{4.14(i)}{\Leftrightarrow} T$ kp.

Für EW normaler, selbstadj etc. Ops gelten dieselben Aussagen wie für endl. dim. eukl/unitäre VR, genauer

4.26 Prop (EW für Klassen von Ops) | FA 147

Sei E (H)-Raum, $T \in L(E)$. Dann gilt

(i) T normal $\Rightarrow$ (a) $\ker T = \ker T^*$

(b) λ EW von $T \Rightarrow \bar{\lambda}$ EW von T^* zum selben EV

(c) EV zu verschiedenen EW sind orthogonal

(ii) T selbstadj $\Rightarrow$ Alle EW reell

(iii) T antiselbstadj $\Rightarrow$ — " — rein imaginär

(iv) T unitär $\Rightarrow$ Alle EW haben Betrag 1

(v) T nicht-neg $\Rightarrow$ — " — nicht negativ

Beweis. [UE]

Beweis:

(i) (a): $\langle Tx | Tx \rangle = \langle x | T^* T x \rangle$

$= \langle x | T T^* x \rangle = \langle T^* x | T^* x \rangle$

$\Longrightarrow \| Tx \| = \| T^* x \| \Rightarrow \ker T = \ker T^*$

(b) $E_\lambda(T) = \ker(T - \lambda \mathbb{1}) \overset{(a)}{=} \ker(T^* - \bar{\lambda} \mathbb{1}) = E_{\bar{\lambda}}(T^*)$

(c) Seien $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$ mit $\lambda \neq \mu$; sei oBdA $\mu \neq 0$

$\Longrightarrow \lambda \bar{\mu} \langle x | y \rangle = \langle \lambda x | \mu y \rangle = \langle Tx | Ty \rangle$

$= \langle x | T^* T y \rangle \overset{(b)}{=} \bar{\mu} \mu \langle x | y \rangle$

$\Longrightarrow (\lambda - \mu) \langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x | y \rangle = 0$

(ii) $\lambda \langle x | x \rangle = \langle \lambda x | x \rangle = \langle Tx | x \rangle = \langle x | Tx \rangle = \langle x | \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x | x \rangle$

(iii) Analog mit Minus ab hier

(iv) $\lambda \bar{\lambda} \langle x | x \rangle = \langle \lambda x | \lambda x \rangle = \langle Tx | Tx \rangle$

$= \langle T^{-1} T x | x \rangle = \langle x | x \rangle$

(v) $\lambda \langle x | x \rangle = \langle \lambda x | x \rangle = \langle Tx | x \rangle \geq 0$

$\square$

4.27 Lemma (Teilraum & Komplement) E (H)-Raum

Sei $T = T^* \in L(E)$. $M \subseteq E$ TR mit $T(M) \subseteq M$

$$\Rightarrow \quad T(M^\perp) \subseteq M^\perp$$

Beweis. Seien $m \in M$, $m^\perp \in M^\perp$, dann gilt

$$\langle m | T m^\perp \rangle = \langle \underbrace{Tm}_{\in M} | m^\perp \rangle = 0 . \qquad \square$$

Der technische Kern des Spektralsatzes steckt im folgenden Resultat

4.28 Prop: (EW & Norm f. selbstadj. Ops) Sei $T = T^* \in K(E)$, E (H)-Raum. Dann hat T einen EV x_0 zum EW $\lambda_0 = \|T\|$ oder $\lambda_0 = -\|T\|$.

Beweis. Wir wählen $(x_n)_n \in E$, $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ und

$$|\underbrace{\langle Tx_n | x_n \rangle}_{\in \mathbb{R},\, 4.26(iii)}| \longrightarrow \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx | x \rangle| \overset{4.7}{=} \|T\|$$

OBdA: $\langle Tx_n | x_n \rangle \longrightarrow \lambda_0 = \pm \|T\|$ (Auswahl einer TF)

Dann gilt

FA 149

$$0 \le \|Tx_n - \lambda_0 x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda_0 \langle Tx_n | x_n \rangle + \lambda_0^2$$

$$\le \|T\|^2 - 2\lambda_0 \underbrace{\langle Tx_n | x_n \rangle}_{\to \lambda_0} + \|T\|^2 \to 0$$

$\Rightarrow \|Tx_n - \lambda_0 x_n\| \to 0 \qquad (*)$

• T kp $\Rightarrow$ Tx_n hat konv. TF, d.h.

$\exists (y_n)$ TF von (x_n) : Ty_n konv

Setze $x_0 := \lim Ty_n \qquad (**)$

Nun gilt $\quad \lambda_0 y_n = Ty_n - (Ty_n - \lambda_0 y_n) \xrightarrow{(*),(**)} x_0 - 0 = x_0 \quad (***)$

[$\lambda_0 = \pm\|T\| = 0$ ist der Trivialfall $T=0$; sei also $\lambda_0 \neq 0$]

$\overset{(***)}{\underset{\lambda_0 \neq 0}{\Longrightarrow}} \quad \boxed{Ty_n \to \frac{1}{\lambda_0} Tx_0} \quad (****)$

Nun folgt aus ~~(**)~~, (****)

$$x_0 = \lim Ty_n = \frac{1}{\lambda_0} Tx_0 \Rightarrow \boxed{Tx_0 = \lambda_0 x_0}$$

$\square$

14. VO 1.6.23
[Argom]

FA 150

15. VO 5.6.23

4.29 THM (Spektralsatz f. kp. selbstadj. Ops)

Sei $0 \neq T = T^* \in K(E)$, E (H)-Raum, $\dim E = \infty$.
Dann besteht das Spektrum von T aus 0 und höchstens abz. vielen EW $\neq 0$, mit 0 als einzigem möglichen Häufungswert.
Jeder Eigenraum zu einem dieser EW $\neq 0$ ist endl. dim.
Ist x orthogonal zu all diesen, dann gilt $Tx = 0$

4.30 BEM

(i) Schreibt man also die EW $\neq 0$ mit ihrer Vielfachheit geordnet nach ihrem Betrag, so ist

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \ldots$$

entweder eine endl. Folge oder eine Nullfolge.

(ii) Ist $(e_n)_n$ ein ONS von EV zu den EW $\lambda_i \neq 0$ (gemäß 4.26(i)(c)) und $(f_n)_n$ eine gegebenenfalls überabz. Ergänzung zu einer ONB von E. Dann gilt $Tf_n = 0$ und

$$T = \sum \lambda_n e_n \otimes e_n^* \qquad \text{(SD)}$$

bzgl. der Operatornorm(*). Kolloquial ausgedrückt hat T bzgl. $(e_n)_n, (f_n)_n$ die „Matrix"

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_0 & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{array}\right) & \begin{array}{c} (e_n) \\ \\ \\ (f_n) \end{array} \\ \begin{array}{cc} (e_n) \qquad & \qquad (f_n) \end{array} & \end{array}.$$

(*) $\|T - \sum^N \lambda_n e_n \otimes e_n^*\| = \|\sum_{n>N} \lambda_n e_n \otimes e_n^*\| = \sup_{n>N} |\lambda_n| \to 0$

FA151

Beweis.

- $\underline{0 \in \sigma(T)}$: Ang $0\mathbb{1} - T$ invertierbar $\Rightarrow \exists\, T^{-1} \in L(E)$

  $\Rightarrow T^{-1}(oE) \subseteq \|T^{-1}\|\, oE \quad \Big|\ T(\cdot),\ 1/\|T^{-1}\|$

  $\Rightarrow \frac{1}{\|T^{-1}\|}\, oE \subseteq T(oE)$

  dim E = ∞

  Also enthält $T(oE)$ ein ONS gegeben durch $\frac{1}{\|T^{-1}\|}$ ONB von oE; dieses hat keine konv. TF ↯ T kp

- $\underline{4.28 \Rightarrow T \text{ hat mind einen EW } \lambda_0 \neq 0}$ $[T \neq 0?]$

- $\underline{\lambda \text{ EW} \neq 0 \Rightarrow \dim E_\lambda < \infty}$: Ang $\dim E_\lambda = \infty$

  Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ONS in E_λ

  $\Rightarrow T(oE)$ enthält alle $Tx_n = \lambda x_n$

  Aber $\|\lambda x_n - \lambda x_m\| = \sqrt{2}\,|\lambda|$

  $\Rightarrow (\lambda x_n)$ enthält keine Cauchy-TF ↯ T kp

- $\underline{\forall \varepsilon > 0 \text{ ist } \{\lambda \text{ EW} \mid |\lambda| \geq \varepsilon\} \text{ endlich}}$: Ang unendl.

  Wähle EW $\mu_1, \mu_2, \dots$ $|\mu_n| \geq \varepsilon$

  Wähle dazu (4.26(i)(c)) ein ONS von EV $x_1, x_2, \dots$

  $\Rightarrow T(oE)$ enthält alle $Tx_n = \mu_n x_n$

  Aber $\|\mu_n x_n - \mu_m x_m\|_2 = \sqrt{\mu_n^2 + \mu_m^2} \geq \varepsilon\sqrt{2}$ ↯ T kp

Also gibt es (mit Vielfachheit angeschrieben!)
entweder nur endl. viele EW (λ_i) oder die (λ_i) sind eine Nullfolge

- T verschwindet am Komplement der Eigenräume der $\lambda_i \neq 0$

Sei $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ (der Fall endlich vieler EW ist analog & einfacher)
ein ONS von EV zu den EW $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$; sei $M := \overline{\operatorname{span} e_i}$

Klarerweise gilt $T(M) \subseteq M \overset{4.27}{\Rightarrow} T(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

Daher gilt für $T_1 := T|_{M^\perp} : M^\perp \to M^\perp$

- $T_1(oM^\perp) \subseteq T(oE) \overset{4.13}{\Rightarrow} T_1$ kp
- T_1 selbstadj., denn für $x, y \in M^\perp$ gilt

$$\langle T_1 x | y \rangle_{M^\perp} = \langle Tx | y \rangle_E = \langle x | Ty \rangle_E = \langle x | T_1 y \rangle_{M^\perp}$$

- Wäre nun $T_1 \neq 0 \overset{4.28}{\Rightarrow} \exists$ EW $\mu \neq 0$ mit EV $x \neq 0$

Diese wären aber EV, EW für $T \Rightarrow x \in E_\mu \subseteq M,\ x \in M^\perp$ ↯

- Sei $\mu \neq 0$ verschieden von allen $\lambda_i \Rightarrow \mu \notin \sigma(T)$:

$0 \neq \mu$ verschieden von allen $\lambda_i \Rightarrow \exists \min_i |\mu - \lambda_i| =: \alpha > 0$

Es gilt

$$T - \mu \mathbb{1} = \sum_{i=0} \lambda_i e_i \otimes e_i^* - \mu P_M - \mu P_{M^\perp}$$

$$\overset{4.25 (ii)}{=} \sum_i (\lambda_i - \mu) e_i \otimes e_i^* - \mu P_{M^\perp}$$

$$\Rightarrow S := \sum \frac{1}{\lambda_i - \mu} e_i \otimes e_i^* - \frac{1}{\mu} P_{M^\perp} \text{ ist Inverse zu } T - \mu \mathbb{1}$$

Denn S ist linear & stetig $\|S\| \le \max\left(\frac{1}{|\mu|}, \frac{1}{\alpha}\right)$
und es gilt

$$S\circ(T-\mu\mathbb{1})x = (T-\mu\mathbb{1})\circ Sx \underset{\substack{x = x_1+x_2 \\ \in M\oplus M^\perp}}{=} x_1 + x_2 = x$$

$\Rightarrow \mu \notin \sigma(T)$. $\square$

4.31 Bem (Kanonische Darstellung f. kp Operatoren) Aus der Spektraldarstellung (SD) in 4.30 für s.a. kp Ops lässt sich eine Darst. f. alle kp Ops gewinnen. Die zugrundeliegende Beobachtung ist: $\boxed{T\in L(E) \Rightarrow T^*T}$, s.a. & sogar nicht negativ, denn

$$(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T \quad , \text{und}$$

$$\langle T^*Tx | x\rangle = \langle Tx | Tx\rangle \ge 0$$

4.32 Satz (Kanonische Darst. kp. Ops) Sei $0 \ne T \in K(E)$.
Dann gibt es endlich viele Zahlen oder eine Nullfolge

$$(\|T\| =)\, s_0(T) \ge s_1(T) \ge \dots$$

und ONS $(e_n)_n$, $(f_n)_n$ in E sodass gilt

$$T = \sum_{n\ge 0} s_n(T)\, f_n \otimes e_n^*\,.$$

Bemerke: Jeder solche Op ist kp nach 4.16

FA 154

Beweis. $T \in K(E) \overset{4.18}{\Longrightarrow} T^*T \in K(E)$

und s.a. wegen 4.31

$$\overset{4.29}{\Longrightarrow} T^*T = \sum_i \mu_i \, e_i \otimes e_i^*$$ $\mu_i \to 0$ oder abbrechend

Sei weiters $x \in \overline{\operatorname{span}(e_i)}^\perp \overset{4.29}{\Longrightarrow} T^*Tx = 0$

$$\Rightarrow \langle Tx | Tx \rangle = \langle x | T^*Tx \rangle = 0 \Rightarrow Tx = 0$$

Jetzt ist

$$\boxed{T = \sum_{i \geq 0} \sqrt{\mu_i} \, \frac{Te_i}{\sqrt{\mu_i}} \otimes e_i^*}$$

die gesuchte Darstellung. Denn die r.S. bildet e_j auf Te_j ab und beide Seiten sind $=0$ auf $\overline{\operatorname{span}(e_i)}^\perp$

Außerdem ist $\frac{1}{\sqrt{\mu_i}} Te_i$ ein ONS, denn

$$\langle Te_i | Te_j \rangle = \langle T^*Te_i | e_j \rangle = \mu_i \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \delta_{ij} \mu_i$$

Nun setze $s_n(T) := \sqrt{\mu_n}$, $s_0(T) = \sqrt{\mu_0} = \sqrt{\|T^*T\|} = \|T\|$. (3.45(iii)) $\square$

Schließlich erhalten wir mit analogen Methoden einen Spektralsatz für normale kp Ops

FA 155

4.33 Thm (Spektralsatz für kp, normale Ops)

Sei $0 \neq T \in K(E)$, $T^*T = TT^*$. Dann existieren EW $\sigma_n \neq 0$ mit (wiederum endl. viele oder Nullfolge)

$$(\|T\| =) \; |\sigma_0| \geq |\sigma_1| \geq \ldots$$

und ein ONS (f_n) von EV sodass

$$T = \sum_{n \geq 0} \sigma_n f_n \otimes f_n^* .$$

Dabei ist $|\sigma_n|^2 = s_n(T)^2$; auf $\overline{\operatorname{span} f_n}^{\perp}$ ist $T = 0$

aus 4.32

<u>Beweis</u>. $4.28, 4.32 \Rightarrow T = \sum s_n f_n \otimes e_n^*$

$$\Rightarrow T^*T = \sum s_n^2 e_n \otimes e_n^*$$

$$\overset{4.22}{\underset{\text{bzw UE}}{\Longrightarrow}} T^* = \sum s_n e_n \otimes f_n^* \Rightarrow TT^* = \sum s_n^2 f_n \otimes f_n^* \quad (*)$$

Sei nun λ einer der EW > 0 von $T^*T = TT^*$ und $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+p}$ die zugehörigen EV ($\Rightarrow \lambda = s_k^2 = \ldots = s_{k+p}^2$). Dann gilt

$$E_\lambda(T^*T) = \operatorname{span}(e_k, \ldots, e_{k+p}) \overset{T \text{ normal}}{=} \operatorname{span}(f_k, \ldots, f_{k+p})$$

$$\Rightarrow T(E_\lambda) \subseteq E_\lambda, \quad T^*(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$$

$$\Rightarrow T^*|_{E_\lambda} \text{ ist Adj von } T|_{E_\lambda}, \quad T|_{E_\lambda} \text{ normal}$$

FA 156

Lin Alg ($\dim E_\lambda < \infty$) $\Rightarrow$

$\exists$ ONB $g_{k+1}, \dots, g_{k+p}$ von E_λ mit $T g_n = \sigma_n g_n$

$$\Rightarrow T = \sum^{p} \sigma_n g_n \otimes g_n^*$$

$$\overset{4.26(a)(b)}{\Rightarrow} T^* g_n = \overline{\sigma_n} g_n$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ & T^* T g_n = \overline{\sigma_n} \sigma_n g_n \\ & T^* T g_n = \lambda g_n = s_n^2 g_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow |\sigma_n|^2 = s_n^2$$

Schließlich: $x \in (\operatorname{span} g_n)^\perp \Rightarrow x \in (\operatorname{span} e_n)^\perp$

$$\Rightarrow T^* T x = 0 \Rightarrow 0 = \langle x \mid T^* T x \rangle = \langle Tx \mid Tx \rangle$$

$$\Rightarrow Tx = 0$$

$\square$

4.34 BEM (Spektralsätze f. nicht kp Ops – Ein Ausblick)

Für solche Ops muß der Begriff des Spektrums genauer untersucht werden – das Punktspektrum reicht nicht aus!

Wie bereits erwähnt gilt i.a. $\sigma_p(T) \subsetneq \sigma(T)$

und das Spektrum besteht

[nicht vorgetragen]

FA 157

nicht nur aus dem Punktspektrum $\sigma_p(T) = \{EW\}$ sondern auch aus dem
$\llcorner \{\lambda \mid \lambda\mathbb{1}-T \text{ nicht inj}\}$

Kontinuierlichen Spektrum $\sigma_c = \{\lambda \mid \lambda\mathbb{1}-T \text{ inj, nicht surj mit dichtem Bild}\}$

Restspektrum $\sigma_r = \{\lambda \mid \lambda\mathbb{1}-T \text{ injektiv, nicht-dichtes Bild}\}$

Daher nehmen Spektralsätze eine andere Form an z.B.

SPEKTRALSATZ FÜR S.A. OPS:

$T = T^* \in L(E)$, E ein sep. (H)-Raum.
Sei $\overline{R(T)}$ die kleinste abg Teilalgebra von $L(E)$, die von allen Polynomen in T mit $\mathbb{R}$-Koeff erzeugt wird.
Dann gilt

$$\boxed{\overline{R(T)} \cong \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{R}).}$$

Isom. als komm (B)-Algebren

D.h. $\exists \varphi$, linearer Iso: $\mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{R}) \longrightarrow \overline{R(T)}$ mit

$$\varphi(fg) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$$

Darüberhinaus gilt $\varphi(t) = T$ und $\varphi(f) \geq 0 \Leftrightarrow f \geq 0$

Mit diesem Satz kann z.Bsp. für $T \geq 0$ $\sqrt{T}$ definiert werden (man spricht vom Funktionalkalkül)

$$\sqrt{T} := \varphi(\sqrt{t}) \Longrightarrow \sqrt{T}\sqrt{T} = \varphi(\sqrt{t})\varphi(\sqrt{t}) = \varphi(t) = T$$

Wie hängt das mit z.B. 4.28 zusammen?

T kp $\Rightarrow \sigma(T) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, 0\}$. Eine stetige Fkt auf $\sigma(T)$ ist gegeben durch $g(\lambda_i) =: a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \to g(0) =: a$

Ist $T = \sum \lambda_i e_i \otimes e_i^* + \sum 0 \underbrace{f_i \otimes f_i}_{\text{Ergänzung auf VONS}}{}^*$

So ist

$$\varphi(g) = \sum g(\lambda_i) e_i \otimes e_i^* + \sum g(0) f_i \otimes f_i^*$$

[vgl. $\sqrt{T^*T} = \sum \sqrt{\mu_i}\, e_i \otimes e_i^*$ in der Situation von 4.32]

Wir beschließen dieses Kap. mit der allg. Form des <u>SPEKTRALSATZ FÜR NORMALE OPS</u>: Ist $T \in L(E)$ normal, dann $\exists$ Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und ein (H)-Raum Iso $U: L^2(\mu) \to E$ sowie eine Fkt $h \in L^\infty(\Omega)$ sodass

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & E \\ L^2(\mu) \arrow[u, "U"] \arrow[r, "M_h"] & L^2(\mu) \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

Hier ist $M_h f = hf$ der Multiplikationsop

$\sigma(T)$ ist im wesentlichen die Menge der ess Fktswerte von h

kommutiert. Es gilt dann z.B. $T^* = U M_{\bar{h}} U^{-1}$.

5 Die Hauptsätze der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel besprechen & beweisen wir die wichtigsten Sätze der normierten, linearen FA.

Zunächst ist §5.1. dem Satz von Hahn-Banach und seinen Konsequenzen gewidmet. Dieser besagt, dass lin. stetige Funktionale von Teilräumen NVR normgleich auf den ganzen Raum fortgesetzt werden können – insbesondere E' für den NVR E immer groß genug ist um interessantes über E auszusagen.

Die weiteren Sätze dieses Kapitels beruhen alle auf dem Satz von Baire, den wir in §5.2 kurz wiederholen – bekannt ist er bereits aus der Topologie.

Danach geht es Schlag auf Schlag. In §5.3 behandeln wir den Satz von Banach-Steinhaus der unter sehr allgemeinen Bedingungen die gleichmäßige Beschränktheit einer pktw. beschränkten Operatorfamilie garantiert und daher auch "uniform boundedness principle" genannt wird.

In §5.4 lernen wir den Satz von der offenen Abb.

kennen, der es gestattet die Stetigkeit der Inversen von stetigen bij Operatoren abzuleiten. Eines seiner Korollare (Isomorphiesatz v. Banach) besagt, dass jeder bij stetige Operator zw. (B)-Räumen schon ein Isomorphismus ist.

In §5.5 behandeln wir den Satz vom abg. Graphen der enge Verwandtschaft zum Satz v. d. offenen Abb hat und es erlaubt, in vielen Fällen die Stetigkeit eines Operators zu beweisen.

§ 5.1. DER SATZ VON HAHN-BANACH UND SEINE KONSEQUENZEN

FA 161

2007-12-02

5.1. MOTIVATION (Reichhaltigkeit von E') Wir haben den Dualraum E' eines NVR E in 2.41 definiert und danach die Dualräume einiger NVR explizit angegeben ($(\ell^p)' = \ell^{p'}$, $(L^p)' = L^{p'}$; $1 \le p < \infty$). Wir wissen aber im Allgemeinen[⊛] noch wenig von E' – insbesondere die Reichhaltigkeit von E' ist i. A. noch unklar!

Vergleichen wir zunächst mit der algebraischen Situation (vgl. auch Lin Alg für den endl. dim. Fall; hier ∞-dim):

Jede l.u. Menge eines VR V ist in einer Hamel-Basis enthalten. Daher gilt: $\forall\, 0 \neq x \in V\ \exists f \in V^*: f(x) \neq 0$. Äquivalent dazu ist die Aussage $\forall\, x_1 \neq x_2 \in V\ \exists f \in V^*: f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h. V^* trennt die Punkte in V.

Weiters ist der Dual V^{**} von V^* groß genug um den ursprünglichen Raum V zu enthalten (im endl. dim gilt ja sogar $V \cong V^{**}$)

Im Falle der top Duals E' des NVR E können wir diese Fragen bis jetzt nicht (positiv) beantworten. Gibt es z.B. genug stetige lin Funktionale $f \in E'$ um die Punkte x von E zu trennen? Bleibt uns überhaupt die „Reinlichkeit"

⊛ außer natürlich in (H)-Räumen [§3.3].

$E' = \{0\}$ i.A. erspart?

Erstes Ziel dieses § ist es, diese Fragen positiv zu beantworten – insbesondere stetige lin. Funktionale mit vorgegebenen Eigenschaften zu konstruieren. (vgl. auch die allgem. Formulierung in [W, III.1.2])

Der grundlegende Existenzsatz gehört von der Aussage her in die lin. Algebra. Bevor wir ihn formulieren & beweisen wiederholen wir [vgl. 1.2.3]: $p: V \to \mathbb{K}$ heißt Halbnorm, falls

(HN1) $p(x) \geq 0 \ \forall x$ $(p(0) = 0)$

(N2) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$

(N3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \, p(0)$

gilt.

5.2 SATZ (Hahn-Banach-Version der lin. Alg.; 1927-1929)

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR, p eine HN auf V und und $U \subseteq V$ ein TR.

Sei f_0 ein lineares Funktional auf U mit $|f_0(u)| \leq p(u) \ \forall u \in U$.

Dann existiert eine Fortsetzung f von f_0 auf V mit $|f(x)| \leq p(x) \ \forall x \in V$, d.h. $\exists f \in V^*$ mit $f|_U = f_0$ und $|f(x)| \leq p(x) \ \forall x \in V$.

Beweis: Schritt 1: „Fortsetzung um eine Dimension"

Sei $x_0 \in V \setminus U$, $U_1 := U \oplus \mathbb{R} x_0 \Rightarrow \forall v \in U_1 \ \exists$ eine eind. Darst.

$v = u + \lambda x_0 \quad (u \in U, \lambda \in \mathbb{R})$

Wir suchen ein lin. Funktional f_1 auf U_1 mit $|f_1(v)| \leq p(v) \ \forall v \in U_1$.

FA 163

Es muß also gelten

$$f_1(v) = f_1(u+\lambda x_0) = f_1(u) + \lambda \underbrace{f_1(x_0)}_{=:c} = f_0(u) + \lambda c$$

15.VO 5.6

Weiters soll gelten

$$|f_0(u) + \lambda c| \leq p(u+\lambda x_0) \quad \forall u \in U \ \forall \lambda \neq 0$$

16.VO 17.6.

[$\lambda=0$ eh klar.]

$$\Leftrightarrow \ |f_0(-\lambda w) + \lambda c| \leq p(-\lambda w + \lambda x_0) \quad (w = -u/\lambda) \ \forall w \in U$$

$$\Leftrightarrow \ |f_0(w) - c| \leq p(w - x_0) \quad \forall w \in U \quad \forall \lambda \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ -p(w-x_0) \leq f_0(w) - c \leq p(w-x_0) \quad \forall w \in U$$

$$\Leftrightarrow \ \underbrace{f_0(w) - p(w-x_0)}_{(*)} \leq c \leq \underbrace{f_0(w) + p(w-x_0)}_{(**)} \quad \forall w \in U$$

c und damit f_1 existiert also genau dann, falls

$$\sup_{w\in U} (*) \leq \inf_{w \in U} (**)$$

gilt, d.h. wenn $\forall u, w \in U$ $\boxed{f_0(u) - p(u-x_0) \leq f_0(w) + p(w-x_0)}$ gilt. Das ist aber der Fall, denn

$$f_0(u) - f_0(w) = f_0(u-w) \leq p(u-w) \leq p(u-x_0) + p(x_0 - w).$$

Schritt 2: „Transfinite Fortsetzung" (benötigt Lemma v. Zorn)

Sei $\mathcal{P} := \{ (W, f_W) \mid W \leq V \text{ TR}, U \leq W$

$f_W : W \to \mathbb{R}$ lin Fortsetzung von f_0

mit $|f_W(w)| \leq p(w) \ \forall w \in W \}$

Auf $\mathcal{P}$ definieren wir die folgende Ordnung | FA 164

$$(W_1, f_1) \le (W_2, f_2) :\Longleftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \wedge f_2|_{W_1} = f_1$$

Dann gilt

- $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (wegen Schritt 1)
- Jede totalgeordnete Teilfamilie $\mathcal{P}' = \{(W_i, f_i)_{i\in I}\} \subseteq \mathcal{P}$ hat eine obere Schranke – nämlich

$W := \bigcup_{i\in I} W_i$; ist TR [denn $x, y \in W \Rightarrow \exists i, j \in I$ mit $x \in W_i, y \in W_j$; oBdA $W_i \subseteq W_j$ (totalgeordnet)
$\Rightarrow x + y \in W_j \subseteq W$
$\lambda w \in W$ $\forall w$ klar]

$f_W(x) := f_i(x)$ falls $x \in W_i$; wohldef. wegen totaler Ordnung

linear, denn $x, y \in W \overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} \exists i: x, y \in W_i$ dann klar

halbnorm-Schranke detto

Lemma v. Zorn $\Longrightarrow$ $\exists$ maximales Element $(V_0, f) \in \mathcal{P}$

Schließlich ist $V_0 = V$, denn sonst könnten wir f nach Schritt 1 weiter fortsetzen ↯ zur Maximalität.

Also ist (V, f) unsere gesuchte Fortsetzung. □

Nun können wir bereits das Hauptresultat dieses § formulieren und beweisen FA165

5.3 THM (Hahn-Banach)

Sei E NVR über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $M \subseteq E$ ein TR und $f_0 \in M'$. Dann existiert eine normgleiche Fortsetzung f von f_0 auf E, d.h. $\exists f \in E' : f|_M = f_0$, $\|f\| = \|f_0\|$.

Beweis: Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $x \mapsto \|f_0\| \|x\|$ ist HN auf E;

auf M gilt $|f_0(x)| \le \|f_0\| \|x\| \xRightarrow{5.2} \exists f \in E^*, f|_M = f_0, |f(x)| \le \|f_0\| \|x\|$

$\Rightarrow f \in E'$ mit $\|f\| \le \|f_0\|$

Andererseits gilt:

$$\|f_0\| = \sup_{x \in \partial M} |f_0(x)| \le \sup_{x \in \partial E} |f(x)| = \|f\|, \text{ also } \|f\| = \|f_0\|.$$

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Sei $E_{\mathbb{R}} := E$ als VR über $\mathbb{R}$; analog $M_{\mathbb{R}}$

$g_0 : x \mapsto \mathrm{Re}(f_0(x))$ definiert $g_0 \in (M_{\mathbb{R}})'$ mit $\|g_0\| \le \|f_0\|$ und f_0 kann aus g_0 zurückgewonnen werden, denn

(*) $g_0(x) - i g_0(ix) = \mathrm{Re}(f_0(x)) - i \,\mathrm{Re}\, \underbrace{f_0(ix)}_{= i f_0(x)} = \mathrm{Re}(f_0(x)) + i\, \mathrm{Im}(f_0(x)) = f_0(x)$

$\mathrm{Re}(i f_0(x)) = -\mathrm{Im}(f_0(x))$

$\xRightarrow{\text{Fall } \mathbb{K}=\mathbb{R}} \exists g \in (E_{\mathbb{R}})', g|_{M_{\mathbb{R}}} = g_0, \|g\| = \|g_0\|$

Nun definiere

$f(x) := g(x) - i\,g(ix) \overset{(*)}{\Longrightarrow} f|_F = f_0$, f ist $\mathbb{R}$-linear

f ist $\mathbb{C}$-linear, denn $f(ix) = g(ix) - i\,g(-x) = g(ix) + i\,g(x) = i\,f(x)$

$\|f\| \le \|f_0\|$, denn sei $x \in E$ mit $f(x) = \gamma\,|f(x)|$ (**)

(also: $\gamma = e^{i\vartheta}$, d.h. $|\gamma| = 1$) dann gilt

$$f\left(\tfrac{1}{\gamma}x\right) = \underbrace{\tfrac{1}{\gamma} f(x)}_{\in \mathbb{R}\ (**)} = g\left(\tfrac{1}{\gamma}x\right) \quad (g = \mathrm{Re}\, f) \qquad (***)$$

nicht vorgetragen

$$\Longrightarrow |f(x)| \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{\gamma} f(x) \overset{(***)}{=} g\left(\tfrac{1}{\gamma}x\right) \le \|g\|\,\|\tfrac{1}{\gamma}x\| = \|g_0\|\,\|x\|$$

$\Longrightarrow f$ stetig mit $\|f\| \le \|g_0\| \le \|f_0\|$

$\|f\| \ge \|f_0\|$ analog zum Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\square$

5.4 Bem (zum Satz v. Hahn-Banach)

(i) Die Fortsetzung in 5.3 – ja schon die in 5.2 – ist i.A. nicht eindeutig – der Parameter c im Beweis von 5.2. war ja beliebig gewählt

(ii) Separable Räume erlauben einen Beweis von 4.2. mittels Induktion unter Vermeidung des Zornschen Lemmas – auch hier ist die Fs nicht eindeutig (c kommt ja in Schritt 1 des Beweises von 4.2. vor!)

FA 167

(iii) In Hilberträumen ist die normerhaltende FS eindeutig bestimmt. Zunächst setzt man f_0 auf $\overline{\Pi}$ eind. fort und verwendet dann den Darstellungssatz von Riesz-Fréchet (3.42).

(iv) Ein Analogon von Satz 5.3 für Operatoren statt Funktionalen ist i.A. falsch!

- Zwar kann ein stetiger Operator von einem dichten Teilraum eindeutig und normerhaltend fortgesetzt werden (siehe 2.34) falls der Zielraum ein (B)-Raum ist.
- Andererseits könnte der identische Operator $Id: c_0 \to c_0$ zu einem stetigen Op $P: \ell^\infty \to c_0$ fortgesetzt werden, dann wäre P stetige Projektion auf c_0 und somit wegen 3.4(iii) c_0 in ℓ^∞ komplementiert – was aber nicht stimmt (vgl. 3.6 bzw für mehr Details [W, p163f])!
- Für weitere positive Resultate siehe etwa [W, Aufgabe III.6.22] (für Ziel-Raum ℓ^∞).

5.5 Motivation (Vom Nutzen des Dualraums)

Wir werden nun mit Thm 4.3 im Rücken die Fragestellungen aus 4.1 – und einiges mehr – in Angriff nehmen. Insbesondere werden wir sehen, dass E' umfassend genug ist um Eigenschaften von E und seinen Elementen zu kodieren. In vielen Fällen werden Fragen über $x \in E$

auf (leichter zu handhabende Fragen) über Zahlen $x'(x)$ – wobei x' den Dual E' durchläuft – zurückgespielt; diese $x'(x)$, $x' \in E'$ können also als „Koordinaten" von $x \in E$ angesehen werden...

5.6 KOROLLAR (Funktionale sind punktetrennend) Sei E NVR

(i) $\forall\, 0 \neq x \in E \;\exists\, x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$, $|x'(x)| = \|x\|$

(ii) Speziell trennt E' die Punkte von E, d.h.

$$\forall\, x_1 \neq x_2 \in E \;\exists\, x' \in E' \text{ mit } x'(x_1) \neq x'(x_2)$$

(iii) Insbesondere $E' \neq \{0\}$ falls $E \neq \{0\}$.

Beweis (i) Setze das Funktional $x_0' : \mathrm{lin}(x) \to \mathbb{K}$
$$x_0'(\lambda x) = \lambda \|x\|$$
normerhaltend auf E fort.

(ii) setze $x = x_1 - x_2$ (iii) klar wegen (i). $\square$

5.7 KOROLLAR ($\|x\|$ via E') Sei E NVR, $x \in E$. Dann gilt

$$\|x\| = \sup_{x' \in oE'} |x'(x)|$$

Beweis: „$\geq$" folgt aus der Def von $\|x'\|$, denn ($x' \in oE'$)
$|x'(x)| \leq \|x'\| \, \|x\| \leq \|x\|$.

„$\leq$" folgt sofort aus 5.6 (i)

[Der Fall $x = 0$ ist banal] $\square$

5.8 BEM ($\|x\|$ vs $\|x'\|$) Beachte die Symmetrie zwischen 4.7 und 2.25(ii), i.e.,

$$\|x\| = \sup_{x' \in OE} |x'(x)| \quad \text{und} \quad \|x'\| = \sup_{x \in OE} |x'(x)| .$$

Beachte aber auch, dass während das sup im linken Ausdruck wegen 4.6(i) angenommen wird, das für das sup auf der rechten Seite nicht notwendigerweise der Fall ist (vgl. 2.25(iii)).

5.9 KOROLLAR (Trennung von Pkt & TR) Sei E NVR, $M \subseteq E$ abg TR, $x_0 \notin M$ ($\Rightarrow d = \operatorname{dist}(x_0, M) = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| > 0$).

Dann $\exists x' \in E'$ mit

vgl. Beweis 2.10

$$\underline{\|x'\| = 1, \quad x'|_M = 0, \quad x'(x_0) = d}$$

Beweis: Auf $M_1 := M \oplus \mathbb{K} x_0$ definiere x_0' durch

$$x_0'(m + \lambda x_0) = \lambda d$$

$\Rightarrow x_0'$ ist linear

$\Rightarrow |x_0'(m + \lambda x_0)| = |\lambda| d = |\lambda| \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| \le |\lambda| \|-(\frac{-m}{\lambda}) + x_0\|$

$= \|m + \lambda x_0\| \quad \Rightarrow \|x_0'\| \le 1$

andererseits $\exists x_n \in M$, $d = \lim \|x_n - x_0\|$

$\Rightarrow d = x_0'(-x_n + x_0) \le \|x_0'\| \, \|x_0 - x_n\| \to d \|x_0'\| \quad \Rightarrow \|x_0'\| \ge 1$

Also insbes $\|x_0'\| = 1$. Setze nun x_0' zu x' auf E fort. Dann gilt $x'(M) = 0$, $\|x'\| = 1$, $x'(x_0) = x_0'(x_0) = d$ $\square$

5.10 KOROLLAR (Charakterisierung dichter TR)

E NVR, $U \subseteq E$ TR. TFAE

(i) U ist dicht

(ii) $\forall x' \in E'$ mit $x'|_U = 0$ gilt $x' = 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt sofort aus 2.34.

(ii) $\Rightarrow$ (i) wäre $\overline{U} \neq E$ so ergäbe 5.9 einen Widerspruch zu (ii). $\square$

5.11 MOTIVATION ($(\ell^\infty)' \not\cong \ell^1$)

Im Folgenden nehmen wir den Faden aus 2.63(ii) auf und verwenden den Satz von Hahn-Banach um

- konkret zu zeigen, dass die Abb T aus 2.62, d.h.

$$T: x \mapsto Tx; \; Tx(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

$T: \ell^q \to (\ell^p)'$ isom. Iso für $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

von ℓ^1 nach $(\ell^\infty)'$ nicht surjektiv ist.

- zu zeigen, dass NVR mit separablem Dualraum selbst separabel sind. Daraus folgt, dass es keinen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(\ell^\infty)'$ geben kann. (ℓ^1 separabel (2.14(i)), ℓ^∞ nicht separabel (2.14(ii)))

Zusammengefaßt haben wir also für die Dualräume der Folgenräume (vgl. 2.43).

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^2 \subseteq \ell^{p'} \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty \quad \ldots$$

5.12 PROP ($(\ell^\infty)' \neq \ell^1$) Die Abb $T: \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ | FA 172

$$x \longmapsto T_x\,;\; T_x(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad (y \in \ell^\infty)$$

ist isometrisch aber nicht surjektiv.

Beweis. Die Isometrie folgt wörtlich wie im Beweis von 2.4.2(ii).
Um zu zeigen, dass T nicht surj ist betrachte das Funktional

$$\begin{aligned} \lim: c &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (c_n)_n &\longmapsto \lim_n c_n. \end{aligned}$$

und setzen es mittels Hahn-Banach fort zu $x': \ell^\infty \to \mathbb{K}$.

Ang x' hätte eine Darstellung der Form $x' = T_x$ für ein $x \in \ell^1$,
d.h. $x'(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad (y \in \ell^\infty)$.

$$\Longrightarrow \quad x_k = x'(e_k) \underset{e_k \in c}{=} \lim e_k = 0 \Rightarrow x' = 0 \quad ↯ \qquad \square$$

5.13 SATZ (Separabilität via Dualraum)

E NVR, E' separabel $\Longrightarrow$ E separabel

Beweis: E' separabel $\overset{[\text{UE26(ii)}]}{\Longrightarrow} SE' := \{x' \in E' : \|x'\| = 1\}$ separabel.
Sei also $\{x_1', x_2', \dots\} \subseteq SE'$ dicht.
Wähle $x_i \in$ ~~e~~ E mit $|x_i'(x_i)| \geq 1/2$ und setze $U = \mathrm{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$.
Wir zeigen $\overline{U} = E$ mittels Kor 5.10.
Sei $x' \in E'$ mit $x'|_U = 0$. Ang $x' \neq 0 \Rightarrow$ OBdA $\|x'\| = 1$
$\Longrightarrow \exists x_{i_0}' : \|x' - x_{i_0}'\| \leq 1/4$. Nun gilt

$$\frac{1}{2} \leq |x'_{i_0}(x_{i_0})| = |x'_{i_0}(x_{i_0}) - \underbrace{x'}_{\in U}(x_{i_0})| \leq \|x'_{i_0} - x'\| \|x_{i_0}\| \leq 1/4 \quad ↯$$

FA 173

$$\Rightarrow x' = 0 \overset{5.10}{\Longrightarrow} U \text{ dicht.} \overset{2.13}{\Longrightarrow} E \text{ separabel.} \qquad \square$$

5.14 MOTIVATION (Polare / Anihilator)

Die Menge der Funktionale, die auf einem gegebenen TM eines NVRs verschwinden sind oft Ersatz für das orthogonale Komplement in (H)-Räumen. Mittels Hahn-Banach werden wir nun eine zu 3.18(ii) analoge Charakterisierung des Abschlußes eines TRs von NVR beweisen; Der Satz von Hahn-Banach ersetzt in diesem Falle das Arbeiten mit Basis und Dualbasis im Endlichdimensionalen.

$A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} A}$

5.15 DEF (Anihilator / Polare) Sei E NVR

(i) Für $A \subseteq E$ sei $A^{\circ} := \{ f \in E' \mid f(a) = 0 \ \forall a \in A \}$ die Polare / der Anihilator von A. $= \{ f \in E' \mid f(A) = 0 \}$

(ii) Für $B \subseteq E'$ sei $B_{\circ} := \{ x \in E \mid b(x) = 0 \ \forall b \in B \}$ die Polare / der Anihilator von B. $= \{ x \in E \mid B(x) = 0 \}$

[In der Literatur ist auch $A^{\perp}$, $B_{\perp}$ gebräuchlich; vgl [Wpp]. Tatsächlich gilt auch $A^{\circ} = A^{\perp}$ wegen Riesz-Frechét]

5.16 BEOBACHTUNG (zu Polaren)

A° bzw. B° sind stets abg. TR von E bzw. E' und es gilt $A^\circ = (\text{lin} A)^\circ = (\overline{\text{lin} A})^\circ$ bzw $B^\circ = (\text{lin} B)^\circ = (\overline{\text{lin} B})^\circ$.

5.16A KOROLLAR (Polare & Abschluß) Sei $A \subseteq E$, E NVR.

Dann gilt $\boxed{A^{\circ\circ} = \overline{\text{lin} A}}$ (d.h. $\overline{\text{lin} A}$ besteht aus allen x, die auf allen f verschwinden, die schon auf A verschwinden)

Beweis „$\supseteq$": $x = \lim x_n$, $x_n \in \text{lin} A$, $f \in A^\circ = (\text{lin} A)^\circ$

$\Rightarrow f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0 \Rightarrow x \in A^{\circ\circ}$

„$\subseteq$": $x \notin \overline{\text{lin} A} \xRightarrow[\Pi = \overline{\text{lin} A}]{\text{4.8}} \exists f \in \underset{A^\circ}{\underset{\shortparallel}{(\text{lin} A)^\circ}}, f(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin A^{\circ\circ}$. $\square$

5.17 MOTIVATION (Bidualraum)

Zum Abschluß dieses § werden wir uns noch kurz mit dem Bidualraum $E'' := (E')'$ eines NVR beschäftigen.

Aus der lin. Alg. [LA III, §3] ist bekannt, dass im endl. dim Fall $V^{**} \cong V$ gilt, wobei der Isomorphismus sogar kanonisch ist [d.h. von keiner Wahl einer Basis abhängt, wie etwa der Iso $V \cong V^*$ von der Wahl der dualen Basis].

Er ist gegeben durch $i: V \to V^{**}$

$$i(v)(v^*) := v^*(v)$$

FA 175

Im ∞-dim Fall ist $i: E \to E''$ i.A. nicht surj. Der Satz von Hahn-Banach bedingt aber immerhin ihre Isometrie. Außerdem werden wir sehen, dass wichtige Eigenschaften NVR in ihrem Bidual kodiert sind.

5.18 DEF (Bidual, kanonische Einbettung) E NVR

(i) Der Bidualraum von E ist $(E')' =: E''$.

(ii) Wir definieren die kanonische Einbettung i_E von E in E'' gemäß

$$\boxed{\begin{aligned} i_E: E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto i_E(x) \\ (i_E(x))(x') &:= x'(x) \end{aligned}}$$

16. VO 12.6.

17. VO 15.6.

5.18 SATZ (Eig. der kanonischen Einbettung) E NVR.

$i_E: E \to E''$ ist eine lineare Isometrie, also insbes injektiv [vgl. 2.37(i); das rechtfertigt auch den Namen „Einbettung", der nur für injektive Abb. verwendet wird.]

Beweis: • Zunächst ist $i_E(x)$ linear, also in E^{**} $\Big[(i_E(x))(x'+\lambda y') = (x'+\lambda y')(x) = x'(x) + \lambda y'(x) = (i_E(x))(x') + \lambda (i_E(x))(y') \Big]$.

• $i_E(x)$ ist stetig, denn $|(i_E(x))(x')| = |x'(x)| \le \|x'\| \|x\|$

also $i_E(x) \in E''$ mit $\|i_E(x)\| \le \|x\|$.

FA 176

- i_E ist linear $\left[(i_E(x+\lambda y))(x') = x'(x+\lambda y) = x'(x) + \lambda x'(y) \right.$
  $\left. = (i_E(x))(x') + \lambda (i_E(y))(x') \right]$

- Schließlich ist i_E isometrisch, denn
  $$\|i_E(x)\| = \sup_{x' \in oE'} |(i_E(x))(x')| = \sup_{x' \in oE} |x'(x)| \overset{5.7}{=} \|x\|.$$ $\square$

5.20 Bsp (zu E'' und i_E)

(i) $E = c_0 \overset{2.43(i)}{\Longrightarrow} \underline{E' = c_0' \cong \ell^1}$ mit der „Identifizierung" (*)
$\ell^1 \ni y \mapsto T_y \,;\, T_y(\underset{\in c_0}{x}) = \sum x_i y_i$

$\overset{2.43(i)}{\Longrightarrow} \underline{E'' = c_0'' \cong (\ell^1)' \cong \ell^\infty}$ mit derselben Identifizierung (**)

Mit obiger Identifizierung gilt $\boxed{i_{c_0}(x) = x}$, denn
$$(i_{c_0}(\underset{\in c_0}{x}))(\underset{\in \ell^1}{y}) = y(x) \underset{(*)}{=} T_y(x) = \sum_{i=1}^\infty y_i x_i = T_x(y) \overset{(**)}{=} x(y).$$

Daher ist i_{c_0} nicht surjektiv, denn klarerweise gilt $\operatorname{im}(i_{c_0}) = c_0 \subsetneq \ell^\infty$.

(ii) $E = \ell^1$, $E' = (\ell^1)' \cong \ell^\infty$ (2.43(i))
$E'' = (\ell^1)'' \cong (\ell^\infty)' \not\cong \ell^1$ (5.11 f)

Da analog (i) $i_{\ell^1}(x) = x$ $\forall x \in \ell^1$ gilt ist i_{ℓ^1} ebenfalls nicht surjektiv.

(iii) Für $1<p<\infty$ ist ι_{ℓ^p} surjektiv, denn analog zu (i), (ii) ist $\iota_{\ell^p} = \mathrm{id}$ und wegen 2.43(ii) (2x) gilt $(\ell^p)'' \cong (\ell^{p'})' \cong \ell^{p''} = \ell^p$.

5.21 BEM (Der Nutzen von ι_E - trotz fehlender Surjektivität)

Durch ι_E wird E mit einem TR $\iota_E(E)$ in E'' identifiziert ($\iota_E : E \to \mathrm{im}\,\iota_E$ ist isom. Iso.!)

Da E'' (B)-Raum ist (2.41A(i)) ist $\overline{\iota_E(E)}$ abg TR eines (B)-Raumes und somit (1.23(ii)) vollständig.

Wir haben also folgende elegante Version der Vervollständigung NVR

5.22 KOR Jeder NVR ist isom. isomorph zu einem dichten TR eines (B)-Raums.

5.23 DEF (Reflexive Räume)

Ein (B)-Raum heißt reflexiv, falls ι_E surjektiv ist.

5.24 BEM (zur Reflexivität)

(i) E reflexiv $\Rightarrow E \cong E''$, die Umkehrung ist aber falsch (James 1950; siehe z.B [W, I.4.8])

(ii) Da E'' vollständig ist (2.41A(i)) haben ohnehin nur (B)-Räume die Chance auf Reflexivität — die Def ist in dieser Hinsicht also keine Einschränkung!

5.25 BSP ((Nicht)-Reflexive Räume)

analog zu 5.10(i) verwende 2.43(i)

(i) ℓ^p für $1<p<\infty$ ist reflexiv [wegen 5.10(iii)]

(ii) L^p für $1<p<\infty$ — " — ; [analog 5.20(iii)] mit 2.46(i).

analog 5.20(i)

(iii) c_0 und ℓ^1 sind nicht reflexiv wegen 5.20(i) [(ii). resp 5.11.]

[(iv) Ist E endl. dim $\Rightarrow$ ι_E ist surjektiv, da $\dim E = \dim E' = \dim E''$; also E reflexiv]

5.26 KOR (Reflexiv & separabel)

E reflexiv, dann: E separabel $\Leftrightarrow$ E' separabel

Beweis: $\Leftarrow$ gilt immer wegen 5.13

$\Rightarrow$: $E \cong E''$ $\Rightarrow$ E'' separabel $\overset{5.13}{\Longrightarrow}$ E' separabel. $\square$

FA178A

5.25 (v) Jeder (H)-Raum ist reflexiv, das folgt aus dem Darstellungssatz von Riesz-Fréchet (3.42).

Genauer: $\phi: H \ni y \longmapsto f_y \in H'$ mit $f_y(x) = \langle x | y \rangle_H$

ist konj. lin. Isometrie

und $\psi: H' \ni g \longmapsto F_g \in H''$ mit $F_g(f) = \langle f | g \rangle_{H'}$

ist konj. lin. Isometrie

Behauptung: $\iota_H = \psi \circ \phi$, i.e., $H \xrightarrow{\phi} H' \xrightarrow{\psi} H''$ (⇒ ι_H bijektiv)

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\iota_H"'] & H' \arrow[r, "\psi"] & H'' \end{tikzcd}$$

Beweis:

$$(\psi \circ \phi)(x)(f) \overset{\text{Def } \psi}{=} \langle f | \phi(x) \rangle_{H'} \overset{3.42:\ \exists y \in H:\ f_y = f}{=} \langle f_y, f_x \rangle_{H'}$$

$$\overset{3.43}{=} \langle x | y \rangle_H \overset{\text{Def } f_y}{=} f_y(x) = f(x) = (\iota(x))(f) \quad \forall f \ \forall x. \ \square$$

5.27 SATZ (Vererbungseig. der Reflexivität) FA 1H

(i) Abg. TR reflexiver Räume sind reflexiv

(ii) E ein (B)-Raum: E reflexiv $\Leftrightarrow$ E' reflexiv

[kann man nicht weglassen; siehe Beweis $\Leftarrow$ 'i']

<u>Beweis</u>: (i) Sei $M \subseteq E$ abg. TR, E reflexiv, $m'' \in M''$. Die Abb

$$f: E' \ni x' \longmapsto m''(x'|_M) \quad \text{ist in } E'', \text{ denn}$$

$$|m''(x'|_M)| \leq \|m''\| \|x'|_M\| \leq \|m''\| \|x'\|$$

E reflexiv $\Rightarrow \exists x \in E$ mit $\iota_E(x) = f$, d.h.

$$(*) \quad \iota_E(x)(x') = \underline{x'(x)} = f(x') = \underline{m''(x'|_M)} \quad \forall x' \in E'$$

- $x \in M$, denn indir. ang $x \notin M \overset{5.9}{\underset{M \text{ abg}!}{\Longrightarrow}} \exists x' \in E'$ mit $x'(x) \neq 0$
  $x'|_M = 0 \Rightarrow m''(x'|_M) = 0$ ↯ zu $(*)$
- Schließlich nennen wir <u>x nun m</u>. Es bleibt zu zeigen, dass

$$m''(m') = m'(m) \quad \forall m' \in M'$$

gilt [<u>ACHTUNG</u>: wissen nach $(*)$ nur: $m''(x'|_M) = x'(m)$ $\forall x' \in E'$]

Sei also $m' \in M'$ und x' eine Fortsetzung von m' auf E gemäß Hahn-Banach. Dann gilt

$$m''(m') = m''(x'|_M) \overset{(*)}{=} x'(m) = m'(m) = (\iota_M(m))(m')$$

Also ist $\iota_M(m) = m''$, ι_M surj und somit M reflexiv.

(ii) „$\Rightarrow$": Sei E reflexiv, z.z. $\iota_{E'}: E' \to E'''$ surj: FA180

Sei $x''' \in E'''$. Wir definieren die Abb.

$$x': E \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto x'''(\underbrace{\iota_E(x)}_{\in E''}) \qquad (*)$$

Es gilt: x' ist linear $[x'(x+\lambda y) = x'''(\iota_E(x+\lambda y))$
$= x'''(\iota_E(x) + \lambda \iota_E(y)) = x'''(\iota_E(x)) + \lambda x'''(\iota_E(y))$
$= x'(x) + \lambda x'(y)\,]$

und stetig. $[\,|x'(x)| = |x'''(\iota_E(x))| \leq \|x'''\|\,\|\iota_E(x)\| \overset{4.19}{=} \|x'''\|\,\|x\|\,]$

Also $x' \in E'$; wir zeigen, dass $\iota_{E'}(x') = x'''$.

E reflexiv $\Rightarrow$ jedes $x'' \in E''$ ist von der Gestalt $x'' = \iota_E(x)$.
Daher gilt

$$x'''(x'') = x'''(\iota_E(x)) \overset{(*)}{=} x'(x) = (\iota_E(x))(x') =$$
$$= x''(x') = (\iota_{E'}(x'))(x'').$$

Also ist $\iota_{E'}$ surj, also E' reflexiv.

„$\Leftarrow$": E' reflexiv $\overset{\text{oben}}{\Longrightarrow}$ E'' reflexiv

E (B)-Raum $\overset{5.19}{\Longrightarrow}$ $\iota_E(E)$ (B)-Raum
$\overset{1.23(i)}{\Longrightarrow}$ $\iota_E(E) \subseteq E''$ abg
$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $\iota_E(E)$ reflexiv
$\overset{5.19}{\Longrightarrow}$ E reflexiv. $\square$

5.28 BSP (Weitere (nicht)-reflexive Räume) | FA 181

(i) ℓ^∞ ist nicht reflexiv, denn

5.25(iii) $\Rightarrow$ ℓ^1 nicht reflexiv

2.43(i) $\Rightarrow$ $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$

5.27(ii) $\Rightarrow$ ℓ^∞ nicht reflexiv

(ii) L^1 ist nicht reflexiv, denn

$$\left.\begin{array}{l} 2.16(\text{ii}) \Rightarrow L^1 \text{ separabel} \\ 2.46(\text{i}) \Rightarrow (L^1)' = L^\infty \\ 2.16A(\text{i}) \Rightarrow L^\infty \text{ nicht separabel} \end{array}\right\} \overset{5.26}{\Longrightarrow} L^1 \text{ nicht reflexiv}$$

(iii) L^∞ ist nicht reflexiv, denn

(ii) $\Rightarrow$ L^1 nicht reflexiv $\overset{5.27(\text{ii})}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{L^\infty \cong (L^1)'}_{2.66(\text{i})}$ nicht reflexiv

AUSGETEILT

§5.2 EXKURS: DER SATZ VON BAIRE

FA182

2007-12-23

Da die Hauptsätze über Operatoren in (B)-Räumen in §5.3 – §5.5 wesentlich auf dem Satz von Baire beruhen, wiederholen wir kurz dieses wichtige Prinzip aus der Topologie. Wir setzen einen hoffentlich anschaulichen Schwerpunkt und beginnen mit folgender motivierender Bemerkung.

5.29 MOTIVATION (Durchschnitte dichter Mengen)

• In MR (sogar top. Räumen) gilt:

| Der Durchschnitt zweier offener, dichter Mengen ist dicht. |

[Sei x ein Punkt $\overset{A \text{ dicht}}{\Longrightarrow}$ $\forall U$ Umgebung von x $\exists a \in A: a \in U$

$\overset{A \text{ offen}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Umgebung V von a mit $V \subseteq A$

verkleinere ev. V

$\Longrightarrow$ $\exists$ Umgebung V' von a mit $V' \subseteq A \cap U$

$\overset{B \text{ dicht}}{\Longrightarrow}$ $\exists b \in B$ mit $b \in V'$

$\Longrightarrow \exists b \in U;\ b \in A \cap B \Longrightarrow A \cap B$ dicht.]

• Beachte, dass die Aussage ohne der Bedingung offen falsch ist; Gegenbeispiel, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beide dicht in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ nicht dicht. FA183

- Klarerweise bleibt die Aussage für endlich viele Mengen richtig.
- Der Satz von Baire besagt nun, dass in vollständigen MR die Aussage auch für abz. viele Mengen richtig bleibt.
- Wir beginnen unsere Diskussion aber mit folgender Terminologie für die „topologische Größe" von Mengen – die leider ebenso unanschaulich wie verbreitet ist.

5.30 DEF („top Größe" von Mengen) Sei X MR (top. Raum) $A \subseteq X$

(i) A heißt nirgends dicht (n.d.) $:\Leftrightarrow \bar{A}^{\circ} = \emptyset$

(ii) A heißt mager $:\Leftrightarrow \exists A_1, A_2, \ldots$ alle n.d. und $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
bzw von 1. Kategorie

(iii) A heißt von 2. Kategorie, falls A nicht von 1. Kat. ist.

5.31 BEM (zur Logik der Def 5.30)

Nirgends dichte Mengen sind „top. klein" – „dünn" – ihre Abschlüsse enthalten keine Umgebung.
Endliche Vereinigungen von n.d. Mengen sind n.d [TOP 8.12(iii)], daher sind magere Mengen die „nächst-

größere Kategorie" von Mengen.

FA 184

2007-11-26

5.32 BSP (n.d & mager)

(i) Jedes $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$, jede Gerade in $\mathbb{R}^2$, jede Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist n.d.

(ii) $\mathbb{Q} := \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$ ist mager in $\mathbb{R}$. Jede abz. Vereinigung von Geraden ist mager in $\mathbb{R}^2$.

5.33 THM (Satz von Baire – 1. Fassung)

In einem vollst. MR ist das Innere magerer Mengen leer.

Beweis: Topologie. □

5.34 KOR: Ein vollst MR ist nicht mager (in sich).
oder auch: Ein vollst MR ist von 2. Kategorie (in sich).

5.35 BEM (Umformulierungen des Satzes v. Baire)

(i) Es gilt $\boxed{A^\circ = \emptyset \Leftrightarrow A^c \text{ dicht,}}$ denn

$$\emptyset = A^\circ = \operatorname{ext}(A^c) \Longleftrightarrow X = (A^c)^\circ \,\dot\cup\, \partial(A^c) = \overline{A^c} \Leftrightarrow A^c \text{ dicht}$$

$\operatorname{ext}(B) := \{x \mid \exists U(x) \cap B = \emptyset\}$

$X = B^\circ \,\dot\cup\, \partial B \,\dot\cup\, \operatorname{ext}(B)$ ist Partition

FA185

Daher können wir 5.33 umformulieren zur häufig in der Literatur verwendeten Fassung

SATZ VON BAIRE – 2. FASSUNG: In einem vollst MR sind die Komplemente von Mengen 1. Kategorie dicht.

(ii) Wir beweisen noch die in 5.29 angekündigte Fassung:
Seien $U_1, U_2, \dots$ offen & dicht $\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$ $U_1^c, U_2^c, \dots$ abg und $(U_i^c)^o = \emptyset$,
i.e., U_i^c n.d (*)

Nun gilt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \text{ dicht } \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \emptyset = \left(\bigcap U_i\right)^{co} = \Big(\underbrace{\bigcup (U_i^c)}_{\text{mager wegen } (*)}\Big)^o.$$

Also haben wir die leicht zu merkende Fassung

SATZ VON BAIRE – 3. FASSUNG: In einem vollst. MR sind abz. Durchschnitte offener dichter Mengen dicht.

5.36 Bem (Vom Nutzen des Satzes von Baire)
Der S. v. Baire wird oft verwendet, um wie folgt Existenzaussagen zu gewinnen (Existenzmaschine): Gesucht ist ein Objekt mit d. Eigenschaft (E). Kann gezeigt werden, dass die Gesamtheit d. fraglichen Objekte einen vollst. MR bilden, worin die Objekte ohne (E) von 1. Kategorie sind so sagt d. Satz v. Baire: Es gibt Objekte mit (E) und sie liegen sogar dicht. Ein Bsp ist die Existenz stetiger, nirgends diffbarer Funktionen auf [0,1] [W, IV, 1.5].

§5.3. Der Satz von Banach-Steinhaus

FA 186

2007-11-25

5.3.1 Motivation: Als erste Anwendung des Satzes v. Baire in der FA lernen wir nun den Satz von Banach-Steinhaus kennen; er folgert glm. Beschränktheit einer Operatorfamilie aus deren pktw. Beschränktheit. Daher wird er auch oft als Prinzip der glm. Beschränktheit (uniform boundedness principle) bezeichnet.

Dieser Name ist auch historisch betrachtet besser, denn der Satz wurde zuerst 1922 von Hahn für Funktionale und Banach für Operatoren bewiesen. Banach und Steinhaus bewiesen 1927 eine Verschärfung [W, Aufgabe IV.8.20]. Die ursprünglichen Beweise waren elementar und verwendeten die sog. Methode des gleitenden Buckels; die Idee den Satz v. Baire in diesem Kontext zu verwenden geht vermutlich auf Saks zurück [W, p 190].

Wir werden im folgenden kurzen § das Hauptresultat formulieren und beweisen und einige Folgerungen – Charakterisierung beschränkter Mengen, pktw Konvergenz von Operatorfolgen – daraus ziehen.

FA 187

5.38 THM (Satz v. Banach-Steinhaus)

Sei E ein (B)-Raum, F ein NVR, I eine beliebige Indexmenge und $T_i \in L(E,F)$ $\forall i \in I$.

Falls

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \quad \forall x \in E$$

dann gilt schon

$$\sup_{i\in I} \|T\| < \infty$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ setze $E_n := \{x \in E \mid \sup_i \|T_i x\| \le n\}$

$$\overset{\text{lt. Voraus.}}{\Longrightarrow} E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n .$$

Weil alle T_i stetig sind ist $E_n = \bigcap_{i\in I} \|T_i(.)\|^{-1}([0,n])$

abg. (stetige Urbilder abg. Mengen; $\cap$ davon).

$\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow}$ mindestens ein E_n enthält einen inneren Pkt.

es reicht KOR 5.34

d.h.: $\exists N \in \mathbb{N}, y \in E_N, \varepsilon > 0$ mit

$$\|x-y\| \le \varepsilon \Rightarrow x \in E_N$$

offensichtlich aus Def

Wegen $z \in E_N \Leftrightarrow -z \in E_N$ und der Konvexität von E_N gilt

$$\|x\| \le \varepsilon \Rightarrow x = \tfrac{1}{2}\big((x+y)+(x-y)\big) \in \tfrac{1}{2}(E_N + E_N) \subseteq E_N .$$

D.h. $\forall \|x\| \le \varepsilon \Rightarrow \|T_i x\| \le N$, also $\sup_{i\in I} \|T_i\| \le \frac{N}{\varepsilon} < \infty$. $\square$

FA 188

5.39 BEM (zum Satz v. Banach-Steinhaus)

(i) Eine Formulierung, die näher am Kern des Arguments orientiert ist lautet:

E, F NVR, $T_i \in L(E,F)$ $\forall i \in I$. Falls $M := \{x \in E \mid \sup_i \|T_i x\| < \infty\}$ nicht mager (z.B.: $M = E$, E vollst.)

„$(T_i)_i$ pktw. beschr"

$\Longrightarrow \sup_i \|T_i\| < \infty$

„$(T_i)_i$ glm beschr"

(ii) Beachte, dass der Beweis keine Aussage über die Größe von $\sup_i \|T_i\|$ macht!

(iii) Die Vollst. von E (bzw. die Abschwächung in (i)) ist essentiell.

Denn sei $E = c_{00}$; $T_i : c_{00} \to \mathbb{K}$ mit $T_i(x) = i x_i$.

Weil für alle $x = (x_i)_i \in c_{00}$ nur endl. viele $x_i \neq 0$ sind gilt $\sup_i |T_i x| < \infty$ $\forall x \in c_{00}$ aber $\|T_i\| = i$ und somit $\sup_i \|T_i\|$ unbeschränkt!

5.40 KOR (Beschränktheit via Funktionale) E NVR, $M \subseteq E$.

TFAE: (i) M ist beschränkt

(ii) $\forall x' \in E'$: $x'(M) \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt

(i.e., $\forall x' \in E'$: $\sup_{m \in M} |x'(m)| < \infty$)

FA 189

2007-12-26

Beweis: (i) ⇒ (ii): klar $[\,|x'(m)| \le \|x'\|\,\|m\|\,]$

(ii) ⇒ (i): Wir verwenden die kanonische Einbettung $\iota_E : E \to E''$ ([vgl. 5.18]; $\iota_E(x)(x') = x'(x)$, $x \in E$, $x' \in E'$). Lt. Voraus. gilt

$$\infty > \sup_{m \in M} |x'(m)| = \sup_{m \in M} |\iota_E(m)(x')| \quad \forall x' \in E'.$$

$$\underset{\substack{\text{Banach-}\\ \text{Steinhaus}\\ [E' \text{ vollst!}]}}{\Longrightarrow} \quad \infty > \sup_{m \in M} \|\iota_E(m)\| \overset{5.18}{=} \sup_{m \in M} \|m\| .$$ □

Die „duale" Version von 5.40 benötigt die Vollst. von E.

5.41 KOR (Beschränktheit im Dual) E (B)-Raum, $M' \subseteq E'$.

TFAE: (i) M' beschränkt

(ii) $\forall x \in E$: $\{m'(x) \mid m' \in M'\}$ beschränkt

(i.e., $\forall x \in E$: $\sup_{m' \in M'} |m'(x)| < \infty$)

Beweis: (i) ⇒ (ii): klar

(ii) ⇒ (i): folgt unmittelbar aus S. v. Banach-Steinhaus. □

5.42 MOTIVATION (Punktweise Limiten von Operator-folgen)

Zum Abschluss dieses § zeigen wir, dass pktw. Limiten von Folgen stetiger Operatoren wieder stetig sind. Das ist insofern bemerkenswert, als es für stetige Funktionen nicht stimmt.

FA 190

5.43 KOR (Pktw. Limiten stetiger Operatorfolgen)

Sei E ein (B)-Raum, F NVR, $T_n \in L(E,F)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Falls $\forall x \in E$ der Limes $\lim T_n x$ existiert, dann definiert

$$T: x \mapsto \lim_n T_n x$$

einen Operator in $L(E,F)$.

Beweis: Die Linearität von T ist klar (vgl. etwa Beweis von 2.31)
Zur Stetigkeit: $\exists \lim_n T_n x \Longrightarrow (T_n x)_n$ beschränkt

$$\overset{\text{Banach}}{\underset{\text{Steinhaus}}{\Longrightarrow}} (T_n)_n \text{ beschränkt; setze } M = \sup_n \|T_n\|$$

Nun gilt
$$\|Tx\| = \lim_n \|T_n x\| \leq M \|x\|$$
also T stetig. $\square$

5.44 AUSBLICK (Zur Punktweisen Konvergenz von Operatorfolgen)

Oft ist die pktw. Konvergenz von Folgen in $L(E,F)$ leicht zu zeigen (vgl. [W, p143ff], Korovkinsche Sätze, ...)
Mittels Banach-Steinhaus resp. Kor. 4.43 folgt dann schon die Stetigkeit des Grenzoperators – das ist ein starkes Werkzeug.

17. VO, 15.6.

FA 191

18 VO, 26.6.23

§5.4. Der Satz von der offenen Abbildung

5.45 Motivation (Weitere Konsequenzen des S. v. Baire)

In diesem § und in §5.5 lernen wir weitere Konsequenzen aus dem Satz v. Baire kennen: Den Satz v. d. offenen Abb. inkl. Folgerungen – sie erlauben es insbesondere die Stetigkeit der Inversen von bij. Operatoren festzustellen und den Satz vom abg. Graphen (§5.5) inkl. Folgerungen – sie erlauben es insbesondere die Stetigkeit von Operatoren festzustellen.

Die entsprechenden Aussagen sind nahe verwandt bzw. oft nur eine Umformulierung: Aber es ist sehr nützlich die verschiedenen Aspekte eines Phänomens zu beleuchten – vor allem in Anwendungssituationen, denn eine subtile Änderung in der Formulierung kann viel bewirken ...

Wir beginnen mit einer Definition

5.46 Def (offene Abb.)

Eine Abb zw. MR heißt offen, falls sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

5.47 BEOBACHTUNG UND BSP (zu offenen Abb)

(i) Offensichtlich besteht folgender Zusammenhang zwischen offenen & stetigen Abb: für bij Abb. T gilt

$$\boxed{T \text{ offen } \Leftrightarrow T^{-1} \text{ stetig}}$$

Offenheit ist daher der maßgeschneiderte Begriff, um Stetigkeit Inverser Abb. zu diskutieren (vgl. dazu 2.37(iii)).

(ii) WARNUNG: offene Abb. bilden i.A. abg. Mengen nicht auf abg. Mengen ab.

Gegenbsp.: $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ ist offen (klar)

aber $M = \{(x,y): x \geq 0,\ xy \geq 1\}$ ist abg und $p(M) = (0,\infty)$

(iii) Wir sind speziell an der Offenheit lin. Abb interessiert. Folgendes Kriterium wird sich als sehr nützlich erweisen

5.48 LEMMA (Offenheit lin. Abb) Seien E, F NVR, $T: E \to F$ lin.

TFAE: (i) T ist offen

(ii) T bildet offene Kugeln um 0 in E auf Nullumgebungen in F ab, d.h. mit

$B_r := \{x \in E: \|x\| < r\}$, $V_\varepsilon := \{y \in F: \|y\| < \varepsilon\}$ gilt

$\forall r > 0\ \exists \varepsilon > 0: V_\varepsilon \subseteq T(B_r)$

(iii) $\exists \varepsilon > 0: V_\varepsilon \subseteq T(B_1) = T(oE^{\circ})$

eigentlich $B_\varepsilon \subseteq F$; der leichteren Lesbarkeit wegen V_ε

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii): klar, denn $0 \in T(B_r)$ und Bilder offener Mengen sind offen.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in U \subseteq E$ offen $\Rightarrow Tx \in T(U)$

U offen $\Rightarrow \exists r > 0: x + B_r \subseteq U$

$$\Rightarrow Tx + T(B_r) \subseteq T(U) \overset{(iii)}{\Longrightarrow} Tx + V_\varepsilon \subseteq T(U)$$

(ε passend)

$$\Rightarrow T(U) \text{ offen}$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Folgt sofort aus der Homogenität von T. $\square$

5.48A BSP (nicht offene Abb)

$T: \ell^\infty \to c_0$

$(x_n)_n \mapsto (\frac{1}{n} x_n)$ ist nicht offen, denn

$T(B_1) = \{(y_n)_n \in c_0 : |y_n| < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ ist keine Nullumgebung in $(c_0, \|\ \|_\infty)$.

5.49 BEM + MOTIVATION (offen vs surj)

Offensichtlich sind offene lin. Abb surj. [$y \in F \Rightarrow \exists \lambda : \lambda y \in V_\varepsilon$ $\Rightarrow \lambda y \in T(B_1) \Rightarrow y = T(\frac{1}{\lambda} x)$ für ein $x \in B_1$]

Dass in (B)-Räumen die Umkehrung (für stetiges T) stimmt, ist einer der wichtigsten Sätze der FA, wie wir an seinen zahlreichen Konsequenzen sehen werden.

FA 194

5.50 THM (Satz von der offenen Abbildung, [Banach, 1929])

Seien E, F (B)-Räume.
Falls $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjektiv ist, dann ist T offen.

Beweis: Wir zeigen (iii) in 5.48 – und zwar in 2 Schritten.

1. Schritt: Wir zeigen mit Hilfe der Vollst. von F und dem S. v. Baire, dass $\boxed{\exists \varepsilon_0 > 0 : V_{\varepsilon_0} \subseteq \overline{T(B_1)}}$

T surj $\Rightarrow F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T(B_n)$ [Bezeichnung wie in 5.48(iii)]

$\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow}$ mind. ein $\overline{T(B_n)}$ hat einen inneren Pkt, gemäß Kor. 5.34

d.h. $\exists n \in \mathbb{N}, y_0 \in \overline{T(B_n)}, \varepsilon > 0$ mit

$\|z - y_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow z \in \overline{T(B_n)}$ $(*)$

Sei nun $y \in F$ mit $\|y\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|(y_0 + y) - y_0\| \leq \varepsilon$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \underline{y_0 + y \in \overline{T(B_n)}}$ (Δ)

Wegen $z \in \overline{T(B_n)} \Rightarrow -z \in \overline{T(B_n)}$ [$z \in T(B_n) \Rightarrow \exists x \in B_n$: $Tx = z$; $-x \in B_n \Rightarrow T(-x) = -Tx = -z \in T(B_n)$; $z \in \overline{T(B_n)} \Rightarrow$ $z = \lim z_k$, $z_k \in T(B_n) \Rightarrow -z_k \in T(B_n)$ und $-z_k \to -z \Rightarrow -z \in \overline{T(B_n)}$]

gilt $(*)$ auch für $-y_0$; genauer

$\|-z + y_0\| = \|z - y_0\| \leq \varepsilon \overset{(*)}{\Longrightarrow} z \in \overline{T(B_n)} \Rightarrow -z \in \overline{T(B_n)}$

also $\|w + y_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow w \in \overline{T(B_n)}$ $(**)$

Daher gilt für y wie oben (d.h $\|y\| \le \varepsilon$)

$$\|y\| \le \varepsilon \Rightarrow \|(-y_0+y)+y_0\| \le \varepsilon \overset{(**)}{\Rightarrow} \underline{-y_0+y \in \overline{T(B_n)}} \quad (\Delta\Delta)$$

Schließlich ist $\overline{T(B_n)}$ konvex [$\lambda+\mu=1$, $z,w \in T(B_n) \Rightarrow \exists x,v \in B_n : Tx=z$, $\underline{Tv=w} \Rightarrow \lambda z+\mu w = \lambda Tx + \mu Tv = T(\underbrace{\lambda x+\mu v}_{\in B_n}) \in T(B_n)$; $z,w \in \overline{T(B_n)} \Rightarrow \lambda z+\mu w = \lambda \lim z_k + \mu \lim w_k = \lim(\underbrace{\lambda z_k+\mu w_k}_{\in T(B_n)})$] und daher gilt

$$y = \frac{1}{2}\underbrace{(y_0+y)}_{\substack{\in \overline{T(B_n)} \\ (\Delta)}} + \frac{1}{2}\underbrace{(-y_0+y)}_{\substack{\in \overline{T(B_n)} \\ (\Delta\Delta)}} \in \overline{T(B_n)}.$$

Also gilt $V_\varepsilon \subseteq \overline{T(B_n)} \Rightarrow V_{\varepsilon/n} \subseteq \overline{T(B_1)}$.

<u>2. Schritt</u>: Wir müssen den Abschluß loswerden, also zeigen, dass $V_{\varepsilon_0} \subseteq T(B_1)$ gilt. Das erledigt das folgende []

<u>5.51 LEMMA.</u> (Loswerden des Abschlußes)

Sei F NVR und E ein (B)-Raum, $T \in L(E,F)$.

Dann gilt: $\quad B_s \subseteq \overline{T(B_r)} \Rightarrow B_s \subseteq T(B_r)$

[Hier ist natürlich B_s die offene s-Kugel in F, B_r die offene r-Kugel in E]

<u>Beweis</u>: oBdA $r=s=1$ [sonst skaliere unter Verwendung von (N2)] und verwende $B(E)$ bzw $B(F)$ für die offenen Einheitskugeln.

Sei $A := B(F) \cap T(B(E)) \Rightarrow \overline{A} = \overline{B(F)}$ (lt. Vorauss.) $\quad (*)$

Sei nun $z \in B(F)$ und wähle $0 < \delta < 1$ so dass $\|z\| < 1-\delta < 1$ ($z=0$ ist trivial). Setze $y := \frac{z}{1-\delta}$.

Es genügt zu zeigen, dass $y \in T(B(E))/(1-\delta)$ [$\Rightarrow z \in T(B(E))$]

Dazu definieren wir induktiv eine Folge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ so dass $y_n - y_{n-1} \in \delta^{n-1} A$ und $\|y_n - y\| < \delta^n$. (Δ)

Das ist möglich, denn setze $y_0 = 0$ und ang. $y_1, \dots, y_{n-1}$ sind schon definiert. Wir können y_n geeignet wählen, da $y \in B_{\delta^{n-1}}(y_{n-1})$ und $y_{n-1} + \delta^{n-1} A \subseteq B_{\delta^{n-1}}(y_{n-1})$ dicht liegt. (wegen (*)) [Also $\exists y_n \in B_{\delta^n}(y)$ und $y_n \in y_{n-1} + \delta^{n-1} A$.]

Lt. Definition von A existiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ mit

$$Tx_n = y_n - y_{n-1} \quad \text{und} \quad \|x_n\| \le \delta^{n-1} \qquad (**)$$

Setze nun $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dann gilt

$$\|x\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \underset{\substack{(**)\text{ und}\\ \text{geom. Reihe}}}{\le} \frac{1}{1-\delta} \quad \text{also } x \in \overset{E \text{ vollst}}{B_{\frac{1}{1-\delta}}(E)} \text{ und}$$

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n \overset{(**)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}) = -y_0 + \lim y_n \overset{(\Delta)}{=} 0 + y = y$$

$$\Rightarrow y \in T(B(E))/(1-\delta). \qquad \square$$

5.52 KOR (Banach'scher Isomorphiesatz)

> Seien E, F (B)-Räume und $T \in L(E,F)$ bijektiv.
> Dann ist der inverse Operator T^{-1} stetig.

Beweis: Unmittelbar klar aus 5.50 mittels 5.47(i). ∎

5.53 BEM (Bedeutung von 5.52)

Insbesondere besagt 5.52:

$$\boxed{E, F \text{ (B)-Räume},\ T \in L(E,F) \text{ bij} \Rightarrow T \text{ Isomorphismus}}$$

Vgl. dazu 2.37(iii): dort ist $\mathrm{im}\,T$ also nicht vollständig ($\Leftrightarrow$ abg). Das ist die einzige Obstruktion gegen die Isomorphie, wie das folgende Korollar belegt

5.54 KOR (Isomorphie inj. Operatoren)

Seien E, F (B)-Räume, $T \in L(E,F)$ injektiv. Dann gilt

$$T^{-1}: \mathrm{im}(T) \to E \text{ stetig} \Leftrightarrow \mathrm{im}(T) \text{ abg.}$$

Beweis: ($\Leftarrow$) $\mathrm{im}(T)$ abg $\overset{1.23(iii)}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{im}(T)$ (B)-Raum $\Rightarrow$ $T \in L(E, \mathrm{im}(T))$ bijektiv $\overset{5.52}{\Longrightarrow}$ T^{-1} stetig

($\Rightarrow$) $T^{-1} \in L(\mathrm{im}(T), E) \Rightarrow T: E \to \mathrm{im}(T)$ Iso $\Rightarrow \mathrm{im}(T)$ vollst $\overset{1.23(iii)}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{im}(T)$ abg. ∎

Wir beenden diesen § mit einem weiteren Korollar zum Satz v.d. offenen Abbildung – effektiv besteht aber auch der ganze nächste § aus Folgerungen dieses Satzes.

<u>5.55 KOR</u> (Äquivalenz v. Normen auf (B)-Räumen)

Seien V ein VR und $\| \, \|$, $||| \, |||$ 2 Normen, die V zu einem (B)-Raum machen. Dann gilt

$$\exists M > 0 : \|x\| \leq M |||x||| \;\forall x \implies \| \, \| \text{ und } ||| \, ||| \text{ sind äquivalent}$$

<u>Beweis</u>: Wende 5.52 auf die <u>stetige</u> Abb $\mathrm{id}: (V, ||| \, |||) \to (V, \| \, \|)$ an. $\square$

§ 5 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

5.56 Motivation (Abg. Abbildungen)
Wir sind weiterhin den Auswirkungen des Satzes v. Baire in der FA auf der Spur und besprechen verwandte Aussagen zum Satz v. d. offenen Abb.
Wir beginnen mit der Untersuchung von linearen Abbildungen die etwas allgemeiner als stetig sind

5.57 Def (Domäne abg. Abb) Seien E, F NVR, $D \subseteq E$ ein TR.

(i) Sei $T: D \to F$ linear, dann nennen wir D die <u>Domäne</u> von T; wir schreiben $T: E \supseteq \mathrm{dom}(T) \to F$.

(ii) Sei $T: E \supseteq D \to F$ linear. T heißt <u>abgeschlossen</u>, falls gilt

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \text{ in } E \\ Tx_n \to y \text{ in } F \end{array}\right\} \Longrightarrow x \in D \text{ und } Tx = y$$

5.58 Bem (Abg. vs. stetig)

(i) Ist $T: E \to F$ stetig + lin $\Rightarrow$ T ist abg.

(ii) Genauer können wir den Zusammenhang zw. abg und stetigen lin Abb wie folgt beschreiben: Wir betrachten nur den Fall $E = \mathrm{dom}(T)$ ($D \subseteq E$ TR analog) und die folgenden 3 Aussagen

FA 200

18. Vo, 26.6.23

19. = letzte VO 29.6.23

(a) $x_n \to x$

(b) $Tx_n \to y$ (für ein $y \in F$)

(c) $Tx = y$

Stetigkeit bedeutet: (a) $\Rightarrow$ (b) + (c)

Abgeschlossenheit bedeutet: (a) + (b) $\Rightarrow$ (c)

5.59 Bsp (abg. Abb) Viele Differentialoperatoren sind abg, z.B.:

(i) Sei $E = F = C[-1,1]$, $D = C^1[-1,1]$ (klarerweise mit $\|\ \|_\infty$)

$T : E \supseteq D \to E$ sei definiert durch $Tf = f'$

Ein bekannter Satz der Analysis

besagt: $f_n' \to g$ glm, $f_n \to f$ pktw $\Rightarrow f' = g$.

Insbesondere ist T abg.

Beachte: T ist nicht stetig (vgl. 2.19(ii)).

(ii) Sei $E = F = L^2[-1,1]$, T, D wie oben. Dann ist T nicht abg.

Denn sei $f_n(t) := (t^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$, $f(t) = |t|$, $g(t) = \begin{cases} -1 & t<0 \\ 0 & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$,

dann gilt $f_n \to f$ glm also auch in L^2

$f_n'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}} \to g$ in L^2 (dom Konv; aber nicht glm.!)

aber $f \notin D = C^1[-1,1]$

(iii) In (ii) liegt das Problem weniger an T als an D. Wählt

man z.B. $D = \{ f \in L^2 \mid$ absolut stetig, $f' \in L^2 \}$

dann ist T abg. [Maßtheorie, [W p155]].

Dieses Bsp verdeutlicht, warum es sinnvoll & wichtig ist Operatoren T mit $\text{dom}(T) \subsetneq E$ zu betrachten. FA 201

5.60 BEM + MOTIVATION (zu abg. Abb.)

(i) WARNUNG: Abg Operatoren bilden i.A. nicht abg. Mengen auf abg. Mengen ab – sie sind also kein Analogon zu offen Abb.
Präziser als abg wäre der Begriff „graphenabgeschlossen"
Wir präzisieren das im Folgenden.

(ii) Für $T: E \supseteq D \to F$ linear, D TR bezeichnen wir den Graphen von T als

$$G(T) \equiv gr(T) := \{(x, Tx) \mid x \in D\} \subseteq E \times F.$$

$G(T)$ ist TR von $E \times F$. (Folgt trivial aus der Lin. von T.)

(iii) Es gilt $\boxed{T: E \supseteq D \to F \text{ abg} \Leftrightarrow gr(T) \subseteq E \times F \text{ abg.}}$

denn $G(T)$ abg — bzgl $\|x\|_E + \|y\|_F$ oder $\max(\|x\|_E, \|y\|_F)$

$\Leftrightarrow (x_n, Tx_n) \to (x, y) \Rightarrow (x, y) \in G(T)$

$\Leftrightarrow$: T abg. — d.h.: $x \in D$, $y = Tx$

(iv) Einen noch präziseren Zusammenhang zwischen stetigen & abg Operatoren stellt das folgende Lemma her – mittels des Begriffs der „Graphennorm".

5.61 LEMMA + DEF (Graphennorm)

Seien E, F (B)-Räume, $D \subseteq E$ TR, $T: E \supseteq D \to F$ abg.

Dann gilt: (i) D versehen mit der Norm

$$|||x||| := \|x\| + \|Tx\| \quad (= \|x\|_E + \|Tx\|_F)$$

ist ein (B)-Raum. $|||\ |||$ heißt Graphennorm

(ii) $T: (D, |||\ |||) \to F$ ist stetig.

Beweis: (i) Sei $(x_n)_n \subset F$ bzgl $|||\ |||$. $\Rightarrow (x_n)_n, (Tx_n)_n \subset F$

$\Rightarrow \exists x, y$ mit $x = \lim x_n$, $y = \lim Tx_n$

T abg $\Rightarrow x \in D$, $y = Tx$ $\Rightarrow |||x_n - x||| \to 0$

(ii) klar, denn $\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = |||x||| \ \forall x \in D$. $\square$

Der folgende Satz ist eine Anwendung des Satzes v.d. offenen Abb auf abg. Operatoren bzw. sein Analogon für abg. Operatoren

5.62 SATZ (offene Abb für abg. Op.) Seien E, F (B)-Räume, $D \subseteq E$ TR, $T: E \supseteq D \to F$ abg und surj. Dann gilt

(i) T ist offen

(ii) Ist T zusätzlich inj, dann ist T^{-1} stetig.

FA 203

Beweis: (i) 5.61 (ii) $\Rightarrow T:(D, |||\,|||) \to F$ stetig; 5.61(i) $\Rightarrow (D, |||\,|||)$ (B)-Raum $\overset{\text{offene Abb}}{\underset{5.50}{\Longrightarrow}} T:(D, |||\,|||) \to F$ offen;

$\|x\| \leq |||x||| \overset{5.55}{\Longrightarrow} \|\,\|$ & $|||\,|||$ äquivalent

$\Longrightarrow T:(D, \|\,\|) \to F$ offen

(ii) folgt sofort aus 4.47 (i). $\square$

Nun zum Hauptresultat des §.

5.63 THM (Satz vom abg. Graphen)

$\boxed{\text{Seien } E, F \text{ (B)-Räume, } T: E \to F \text{ abg. Dann ist } T \text{ stetig}}$

Beweis: 5.61(ii) $\Rightarrow T$ stetig bzgl. $|||\,|||$ auf E

5.55 $\Longrightarrow |||\,|||$ und $\|\,\|$ sind äquivalent auf E

[die Voraus. von 5.55 sind erfüllt, denn $\|x\| \leq |||x|||\ \forall x \in E$ und 5.61(i) $\Rightarrow (E, |||\,|||)$ ist (B)-Raum]

$\Rightarrow T$ stetig bzgl. $\|\,\|$ auf E. $\square$

5.64 BEM (zum Satz v. abg. Graphen)

(i) 5.63 besagt also, dass ein auf einem ganzen (B)-Raum definierter abg Operator in einen (B)-Raum schon stetig ist. Also insgesamt mit 5.58 (ii):

$\boxed{E, F \text{ (B)-Räume: } T: E \to F \text{ lin: } \quad T \text{ abg} \Leftrightarrow T \text{ stetig}}$

FA 204

(ii) 5.63 zusammen mit 5.43 zeigen, dass es praktisch sehr schwierig ist einen unstetigen Operator zwischen (B)-Räumen <u>explizit</u> anzugeben.

(iii) Wir haben den Satz v. abg. Graphen mit Hilfe des Satzes v.d. offenen Abb. bewiesen (explizit wird 5.55 im Beweis verwendet das direkt aus 5.52 folgt; letzteres ist Konsequenz aus 5.50). Es geht aber auch umgekehrt. z.B kann der Banachsche Isomorphiesatz 5.52 wie folgt aus dem Satz v. abg. Graphen bewiesen werden:

<u>zz</u>: E, F (B)-Räume, $T \in L(E,F)$ bij $\Rightarrow T^{-1}$ stetig

<u>Beweis</u>: $G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) \mid y \in F\} = \{(Tx, x) \mid x \in E\}$ ist abg in $F \times E$, da $G(T)$ abg. in $E \times F \Rightarrow T^{-1}$ stetig. □

Zum Abschluß eine wichtige Anwendung

<u>5.65 Kor</u> (Satz v. Hellinger–Toeplitz) Sei H ein (H)-Raum, $T: H \to H$ linear und $\forall x, y \in H$: $\langle Tx \mid y \rangle = \langle x \mid Ty \rangle$ (*). Dann ist $T \in L(H,H)$.

[Lineare Ops, die die Symmetriebedingung (*) erfüllen sind automatisch stetig, also selbstadj ⇝ wichtig!]

Beweis: Es genügt die Abg. von T zu zeigen (5.63).

Sei $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Dann gilt $\forall z \in H$

$$\langle y | z \rangle = \langle \lim Tx_n, z \rangle = \lim \langle Tx_n, z \rangle \overset{(*)}{=} \lim \langle x_n, Tz \rangle$$

$$= \langle x, Tz \rangle \overset{(*)}{=} \langle Tx, z \rangle \Rightarrow y = Tx \Rightarrow T \text{ abg.} \quad \square$$