NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

Wintersemester 2024/25
2. Termin, 11.4.2025
GRUPPE A

Sonja Kramer, Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 18 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkte pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 18 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 18 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(18)	(6)	(6)	(6)	(18)	(36)	

Teil 1: Multiple-Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und Definitionen

1. (*Aspekte & Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Aspekte zu einem mathematischen Begriff werden durch eine fachdidaktische Analyse gewonnen.
   (b) Eine Grundvorstellung ist eine sinnstiftende inhaltliche Deutung eines mathematischen Begriffs.
   (c) Unter dem Aspekt eines mathematischen Begriffs versteht man die mathematische Definition dieses Begriffs.
   (d) Universelle Grundvorstellungen haben einen normativen Charakter.

2. (*Funktionsbegriff: Aspekte und Grundvorstellungen.*) Welche Aussagen sind korrekt? Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.
   (a) Die Kovariationsvorstellung beruht darauf, dass f jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.
   (b) Der Paarmengenaspekt spielt darauf an, dass eine Funktion durch die Paare $(a, f(a)) \in A \times B$ beschrieben werden kann.
   (c) Im Rahmen der Zuordnungsvorstellung wird f als ein einziges Objekt gesehen, das den Zusammenhang zwischen Elementen in A und B als Ganzes beschreibt.
   (d) Die Objektvorstellung ermöglicht es besonders gut, Eigenschaften der gesamten Funktion, wie etwa ihre Monotonie zu erfassen.

3. (*Zum Folgenbegriff.*) Wir betrachten die Definition des Folgenbegriffs (Eine reelle Folge x ist eine Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) Die Definition baut auf dem Iterationsaspekt auf.
   (b) Die Definition baut auf dem Zuordnungsaspekt auf.
   (c) Die Definition bedient wesentlich die Objektvorstellung.
   (d) Der Aufzählungsaspekt ist in der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ von Folgen sichtbar.

4. (*Eigenschaften von Folgen.*) Welche der Aussagen über Eigenschaften reeller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind sinnvolle Be- und Umschreibungen der jeweiligen Definitionen?
   (a) Unbeschränkte Folgen wachsen über jede positive Schranke hinaus.
   (b) Ist eine Folge beschränkt, so gibt es ein (beschränktes) Intervall, aus dem die Folgenglieder nicht hinauswachsen können.
   (c) Monoton wachsende Folgen respektieren die $\leq$-Relation.
   (d) Um einen Häufungswert einer Folge tummeln sich in jeder Umgebung unendlich viele Folgenglieder.

5. *(Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.)* Welche der folgenden Aussagen zum Grenzwertbegriff reeller Folgen

$$\lim x_n = a \quad \text{falls,} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

sind korrekt?

   (a) Die Grenzwertdefinition der Analysis ist eine überwiegend statische Formulierung.

   (b) Eine schlecht ausgeprägte Umgebungsvorstellung ist eine Hauptursache von Fehlvorstellungen.

   (c) Die Umgebungsvorstellung ist eine vorwiegend dynamische Vorstellung.

   (d) Der Grenzwertdefinition der Analysis liegt die Vorstellung vom aktual Unendlichen zugrunde.

6. (*Zur Differenzierbarkeit.)* Welche der folgenden Aussagen zum Begriff der Differenzierbarkeit reeller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

   (a) Die Grundvorstellung von der lokalen Linearität ist die fachmathematisch wichtigste.

   (b) Im Kontext der Schulanalysis ist die Grundvorstellung von der lokalen Änderungsrate dominant.

   (c) Der Aspekt „Grenzwert des Differenzenquotienten" hängt primär mit der Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors zusammen.

   (d) Die Grundvorstellung von der Tangentensteigung wird von beiden Aspekten des Differenzierbarkeitsbegriffs bedient.

2 Sätze & Resultate

7. (*Eigenschaften von Folgen, 1.*) Welche Aussagen über reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind korrekt?

   (a) Wenn (x_n) konvergent ist, dann ist (x_n) auch beschränkt.

   (b) Wenn (x_n) beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (c) Wenn (x_n) nach oben beschränkt ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

   (d) Wenn (x_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend ist, dann ist (x_n) auch konvergent.

8. (*Eigenschaften von Folgen, 2.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungswert.

   (b) Jede beschränkte reelle Folge hat einen Grenzwert.

   (c) Jede monotone und beschränkte reelle Folge hat einen Grenzwert.

   (d) Es gibt durchaus konvergente reelle Folgen mit zwei verschiedenen Grenzwerten.

9. *(Reihen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sind korrekt?

   (a) Die Koeffizientenfolge einer konvergenten Reihe muss ebenfalls konvergieren.

   (b) Die Koeffizientenfolge einer konvergenten Reihe muss ebenfalls konvergieren und zwar gegen 0.

   (c) Ist die Koeffizientenfolge einer Reihe konvergent, so konvergiert die Reihe.

   (d) Ist die Koeffizientenfolge einer Reihe eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe.

10. *(Funktionen & ihre Eigenschaften.)* Welche Aussagen über reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind korrekt?

    (a) Ist f stetig, dann ist f auch beschränkt.

    (b) Ist f differenzierbar, dann ist f auch beschränkt.

    (c) Ist f stetig, dann ist f integrierbar auf jedem Intervall $[a, b]$.

    (d) Ist f differenzierbar, dann ist f auch stetig.

11. *(Kurvendiskussion.)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

    (a) Hat f in x_0 ein Extremum, dann hat f' dort eine Nullstelle.

    (b) Hat f' in x_0 eine Nullstelle, dann muss f dort nicht unbedingt eine Extremstelle haben.

    (c) Hat f in x_0 eine waagrechte Tangente, dann hat f in x_0 sicher eine Extremstelle.

    (d) Ist f monoton wachsend, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x.

12. *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.)* Welche der folgenden Aussagen über den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung sind korrekt? Der Haupsatz besagt (für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$):

   (a) $\frac{d}{dx} \int_a^b f(t)\, dt = f(x)$

   (b) $F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ ist eine Stammfunktion von f.

   (c) Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion und diese ist dann automatisch differenzierbar.

   (d) Falls G (beliebige) Stammfunktion von f ist, gilt $\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$.

3 Beispiele & Gegenbeispiele

13. *(Grenzwerte für Folgen & Reihen.)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $\frac{n^2}{n!} \to 0$ für $n \to \infty$.

   (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}$.

   (c) $\frac{8n^3 + 4n^2 - 7}{4 + 4n^2 - 4n^3} \to \infty$.

   (d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$.

14. *(Folgengrenzwert konkret.)* Welche der folgenden Aussagen über die Folge

$$x_n = 1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n$$

   sind korrekt?

   (a) In jeder Umgebung von $x = -1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

   (b) In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

   (c) In jeder Umgebung von $x = 0$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

   (d) In jeder Umgebung von $x = 1$ liegen fast alle Folgenglieder.

15. *(Eigenschaften von Funktionen.)* Welche Aussagen über die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

   sind korrekt?

   (a) f ist beschränkt.

   (b) f ist differenzierbar.

   (c) f ist streng monoton wachsend.

   (d) $f'(x) > 0$ für alle x.

16. *(Cosinusfunktion & Ableitung.)* Wir betrachten die folgende Überlegung für kleine h

$$\sin(h) = \sin(0+h) \approx \sin(0) + \sin'(0)\, h = h\,.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Die Überlegung ist korrekt, weil die Sinusfunktion in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

(b) Die Überlegung ist nicht korrekt weil die Sinusfunktion in der Nähe von $x_0 = 0$ gut durch die waagrechte Gerade $y(h) = 1$ approximiert werden kann.

(c) Die Überlegung ist korrekt und zeigt, dass die Sinusfunktion in der Nähe von $x_0 = 0$ gut durch die erste Mediane approximiert werden kann.

(d) Die Überlegung ist nicht korrekt, weil das 2. Gleichheitszeichen falsch ist.

17. *(Differenzierbarkeit.)* Klarerweise gilt für die Funktion $f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$, dass sie differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x) = 3x^2$$

Aber welche der folgenden Argumentationen belegen das schlüssig?

(a) $f(x+h) - f(x) = 3x^2h + h^2(3x+h) = f'(x)h + r(h)$ und $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.

(b) f ist stetig und daher differenzierbar. Die Form der Ableitung ergibt sich dann aus der Ableitungsregel $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(c) Die Aussage folgt aus der Ableitungsregel für Potenzfunktionen $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(d)
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + h(3x+h) \to 3x^2 \quad (h \to 0).$$

18. *(Stückweise definierte Funktion.)* Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gilt $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0$.

(b) (b) ist korrekt und daher ist f auch in $x_0 = 0$ differenzierbar.

(c) f ist differenzierbar in $x_0 = 0$ mit $f'(0) = 0$, weil der Limes des Differenzenquotienten bei $x_0 = 0$ gegen 0 geht (für x gegen 0).

(d) f hat in $x_0 = 0$ kein lokales Minimum, weil die Funktion dort nicht differenzierbar ist.

Teil 2: Offene Aufgaben

1 Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

1. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

   (a) Formulieren Sie (beide Teile des) den Hauptsatz(es) der Differential- und Integralrechnung mathematisch exakt. (3 Pkte)

   (b) Skizzieren Sie die Beweisidee für den ersten Teil des Satzes. Fertigen Sie eine Skizze an! (3 Pkte)

2 Aufgaben zur fachdidaktischen Reflexion und zur Unterrichtspraxis

2. *Zum Folgenbegriff.*

   (a) Beschreiben Sie, was man in der Fachdidaktik unter einer Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff versteht, und geben Sie an, wie sich Grundvorstellungen von Aspekten eines mathematischen Begriffs unterscheiden. (2 Pkte)

   (b) Beschreiben Sie kurz die drei Aspekte zum Folgenbegriff und begründen Sie, welchen der drei Aspekte Sie vorrangig bedienen würden, um den Folgenbegriff in der Schule einzuführen. Formulieren Sie eine entsprechende Einstiegsaufgabe mit zugehöriger Lösungserwartung. (4 Pkte)

3. *Stetigkeit von Funktionen.*
   Betrachten Sie den umseitigen Ausschnitt einer Unterhaltung einer Schülerin (7. Klasse AHS) mit dem LLM ChatGPT.

   Bearbeiten Sie die folgende Punkte:

   (a) Die gestellte Frage ist aus fachmathematischer Sicht zu kritisieren. Warum? Diskutieren Sie! (2 Pkte)

   (b) Der von der LLM generierte Beginn der Antwort zielt auf eine andere Fragestellung ab. Geben Sie an, unter welcher Ausgangsfrage, die gegebene Antwort Sinn ergibt, und vervollständigen Sie die Antwort entsprechend. (2 Pkte)

   (c) Formulieren Sie einen kurzen Text, in dem Sie die unter (a) und (b) diskutierten Sachverhalte schüler/innegerecht darstellen. (2 Punkte).

ChatGPT

Hallo, ich habe eine mathematische Frage: Ist die Funktion f mit f(x)=(cos(x)-1)/x an der Stelle x=0 stetig?

Wir untersuchen die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

an der Stelle $x = 0$. Dazu prüfen wir den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

1. Existenz des Grenzwerts

Da der Ausdruck für $x = 0$ nicht definiert ist (wegen der Division durch x), verwenden wir die Regel von L'Hôpital. Diese Regel gilt, weil der Zähler $\cos(x) - 1$ und der Nenner x beide gegen 0 streben.

Ableitungen:

- **Zähler:** $\frac{d}{dx}(\cos(x) - 1) = -\sin(x)$
- **Nenner:** $\frac{d}{dx}x = 1$

Anwenden der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{1}.$$

Da $\sin(0) = 0$, erhalten wir

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$